TEOREMA DE KATOK EN DIMENSIÓN DOS Y VARIEDAD ESTABLE DE PESIN

RAFAEL POTRIE

Resumen. La idea es dar una prueba del Teorema de Katok en el caso de superficies. Nos basamos en [B] y [KH]. Asumimos la desigualdad de Ruelle y el principio variacional (ver [M]) que probaremos en otro momento y el teorema de Oseledets que presentamos en otra nota y se puede encontrar en [AB].

1. Introducción

El objetivo de esta nota es probar el siguiente Teorema.

Teorema 1.1 (Katok)**.** *Un difeomorfismo f de clase $C^{1+\alpha}$ de una superficie compacta con entropia positiva verifica que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\{x \ : \ f^n(x) = x\} \geq h_{top}(f)$$

En realidad, no llegaremos a mostrar esta versión exactamente sino que mostraremos una versión un tanto más cualitativa, es decir, si un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$ de una superficie compacta tiene entropia positiva, entonces, posee infinitos puntos periódicos de períodos arbitrariamente grandes (de hecho, que contiene una herradura). Para entender la prueba de eso solamente, el lector puede saltearse las secciones 4.1 y 5 asi como el Apéndice (donde discutiremos algunos resultados conocidos en el caso que f sea C^1 y exista descomposición dominada).

Vale la pena mencionar algunos resultados vinculados. Misiurewicz ([Mis]) prueba que el resultado es cierto para mapas continuos (no necesariamente diferenciables) del intervalo. Por otro lado, Mary Rees ([R]) construye un ejemplo de homeomorfismo minimal del toro $\mathbb{T}^2$ (en particular sin orbitas periódicas) y con entropía positiva, dicho ejemplo se puede hacer incluso unicamente ergódico ([BCL]).

No es dificil ver que en dimensiones más grandes, se puede hacer ejemplos de mapas reales analíticos con entropia positiva y sin orbitas periódicas (basta tomar un anosov lineal por una rotacion irracional), por otro lado, Herman ([H]) construye en dimension 4 un difeomorfismo analítico que al mismo tiempo es minimal, por lo que tengo entendido, no se sabe si se puede hacer únicamente ergódico.

1.1. Teorema de Oseledets.

Para comenzar utilizaremos el siguiente resultado que enunciamos en el caso de superficies. Ver [KH, M, AB] por mas información y demostraciones.

Teorema 1.2 (Oseledets)**.** *Sea f un difeomorfismo C^1 de una superficie compacta M y sea μ una medida ergódica invariante por f. Entonces, existen $\lambda_1 \leq \lambda_2$ que verifican lo siguiente:*

- *Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, entonces se tiene que para casi todo punto x segun μ se tiene que si $v \in T_xM\backslash\{0\}$ entonces existe el siguiente límite*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log(\|Df_x^n v\|) = \lambda$$

- *Si $\lambda_1 < \lambda_2$ entonces se tiene que existen $E_1(x), E_2(x)$ espacios invariantes para casi todo punto segun μ (i.e. $Df_x(E_i(x)) = E_i(f(x))$) que verifican $T_xM = E_1(x) \oplus E_2(x)$ y se verifica que si $v \in E_i(x)$ entonces existen los siguientes límites*

17 de abril de 2010.

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log(\|Df_x^n v\|)=\lambda_i$$

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log\sin\langle(E_1(f^n(x)),E_2(f^n(x)))$$

A los valores λ_1 y λ_2 les llamamos *exponentes de Lyapunov* y en el caso que ambos sean distintos de cero decimos que μ es una medida hiperbólica. Usualmente nos vamos a interesar en el caso (más interesante) en que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

1.2. Resultados sobre la entropía. Vamos a utilizar dos resultados fundamentales sobre la entropía y como se relacionan con los exponentes de Lyapunov. Ver [M] por pruebas y más detalles en las definiciones de entropía (que no utilizaremos realmente pues lo que usaremos queda escondido en estos teoremas).

Teorema 1.3 (Principio Variacional)**.** *Sea $T : X \to X$ continua en X compacto. Entonces*

$$h_{top}(T)=\sup_{\mu\ invariante}h_\mu(T)=\sup_{\mu\ ergodica}h_\mu(T)$$

Por tanto, sabemos que si un difeomorfismo tiene entropia positiva, entonces tiene medidas ergodicas cuya entropia es arbitrariamente cercana a dicha entropia. La entropia métrica se relaciona con los exponentes de Lyapunov a través de la siguiente desigualdad de Ruelle.

Teorema 1.4 (Desigualdad de Ruelle)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1 de una superficie y μ una medida ergódica, entonces, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ y*

$$h_\mu(f)\leq \min\{\lambda_2,-\lambda_1\}$$

2. Teoría Lineal

En esta sección vamos a ver como el crecimiento subexponencial de los ángulos entre los espacios invariantes que nos garantiza el Teorema de Oseledets, nos permite "diagonalizar" la derivada para hacerla actuar practicamente como un cociclo diagonal.

Teorema 2.1 (ε-Reducción de Pesin)**.** *Sea $f : M \to M$ difeomorfismo C^1 de una superficie y μ una medida ergódica con exponentes $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una función C_ε medible tal que $C_\varepsilon(x) \in GL(\mathbb{R}^2, T_xM)$ que verifica*

(a) $\lim_{n\to\pm\infty}\log(\|C_\varepsilon(f^n(x))\|+\|C_\varepsilon^{-1}(f^n(x))\|)=0$

(b) *Existen $a^i_\varepsilon : M \to \mathbb{R}$ tal que $a^i_\varepsilon(x) \in [\exp(\lambda_i-\varepsilon),\exp(\lambda_i+\varepsilon)]$ para $\mu-$casi todo x y para μ-casi todo x tenemos que*

$$C_\varepsilon^{-1}(f(x))Df_xC_\varepsilon(x)=\begin{pmatrix} a^1_\varepsilon(x) & 0\\ 0 & a^2_\varepsilon(x)\end{pmatrix}$$

Demostración.Sean $v^1_x \in E_1(x)$ y $v^2_x \in E_2(x)$ unitarios y medibles. Definimos

$$M^i_{\varepsilon,x}:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|Df^n_xv^i_x\|e^{-n\lambda_i-\varepsilon|n|}\geq 1 \qquad i=1,2$$

Entonces, definimos $C_\varepsilon(x) : \mathbb{R}^2 \to T_xM$ mediante definir en la base canónica $\{e_1, e_2\}$ como

$$C_\varepsilon(x)e_i=\frac{v^i_x}{M^i_{\varepsilon,x}}$$

Para calcular entonces los a^i_ε observamos que

$$C_\varepsilon^{-1}(f(x))Df_xC_\varepsilon(x)e_i = C_\varepsilon^{-1}(f(x))Df_x\frac{v_x^i}{M_{\varepsilon,x}^i} = \pm\frac{\|Df_xv_x^i\|}{M_{\varepsilon,x}^i}C_\varepsilon^{-1}(f(x))v_{f(x)}^i = \pm\frac{M_{\varepsilon,f(x)}^i}{M_{\varepsilon,x}^i}\|Df_xv_x^i\|e_i$$

Con lo cual tenemos

$$a_\varepsilon^i(x) = \pm\frac{M_{\varepsilon,f(x)}^i}{M_{\varepsilon,x}^i}\|Df_xv_x^i\|$$

Para estimar $a_\varepsilon^i(x)$ veamos que

$$\|Df_xv_x^i\|M_{\varepsilon,f(x)}^i = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\|Df_xv_x^i\|\|Df_{f(x)}^nv_{f(x)}^i\|e^{-n\lambda_i-|n|\varepsilon} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\|Df_x^{n+1}v_x^i\|e^{-n\lambda_i-|n|\varepsilon} =$$

$$= e^{\lambda_i}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|Df_x^{n+1}v_x^i\|e^{-(n+1)\lambda_i-|n|\varepsilon} =$$

$$= e^{\lambda_i}e^{\varepsilon}\underbrace{\sum_{n\geq 0}\|Df_x^{n+1}v_x^i\|e^{-(n+1)\lambda_i-|n+1|\varepsilon}}_{A} + e^{\lambda_i}e^{-\varepsilon}\underbrace{\sum_{n<0}\|Df_x^{n+1}v_x^i\|e^{-(n+1)\lambda_i-|n+1|\varepsilon}}_{B}$$

Tenemos que $A+B = M_{\varepsilon,x}^i$ y $A,B\geq 0$ con lo cual tenemos que $e^{\lambda_i}(e^\varepsilon A + e^{-\varepsilon}B) \in [\exp(\lambda_i-\varepsilon)M_{\varepsilon,x}^i, \exp(\lambda_i+\varepsilon)M_{\varepsilon,x}^i]$ probando (b), es decir, que

$$e^{\lambda_i-\varepsilon}\leq a_\varepsilon^i(x)\leq e^{\lambda_i+\varepsilon}$$

Nos queda entonces utilizar la subexponencialidad del decaimiento de los ángulos entre $v_{f^n(x)}^1$ y $v_{f^n(x)}^2$ para probar (a).

Por un lado, tenemos que $\|C_\varepsilon(x)\|\leq 1$ ya que $M_{\varepsilon,x}^i\geq 1$ y por lo tanto, solo tenemos que cuidar $\|C_\varepsilon^{-1}(x)\|$. Se verifica que

$$C_\varepsilon^{-1}(x) = \begin{pmatrix} M_{\varepsilon,x}^1 & 0 \\ 0 & M_{\varepsilon,x}^2\end{pmatrix}W(x)$$

donde $W(x)(av_x^1+bv_x^2) = ae_1+be_2$. Y por lo tanto $\|C_\varepsilon^{-1}(x)\|\leq\|W(x)\|\,\text{máx}\{M_{\varepsilon,x}^1, M_{\varepsilon,x}^2\}$.

Primero vamos a probar la subexponencialidad de $\|W(f^n(x))\|$. Para eso, observamos que (llamando $w(x) = \langle(v_x^1, v_x^2)\rangle$)

$$\|av_x^1+bv_x^2\| = a^2+b^2+2ab\cos w(x) = (a+b\cos w(x))^2+b^2\sin^2 w(x) = (b+a\cos w(x))^2+a^2\sin^2 w(x)$$

Sumando las últimas dos ecuaciones, obtenemos

$$2\|av_x^1+bv_x^2\| = (a+b\cos w(x))^2+(b+a\cos w(x))^2+(a^2+b^2)\sin^2 w(x) \geq (a^2+b^2)\sin^2 w(x) = \|ae_1+be_2\|\sin^2 w(x)$$

y por lo tanto $\|W(x)\|\leq\frac{\sqrt{2}}{\sin w(x)}$ que por el teorema de Oseledets sabemos es subexponencial. Entonces, nos basta estudiar la subexponencialidad de $M_{\varepsilon,x}^i$.

Estudiamos los conjuntos $X_N = \{x\in M : |M_{\varepsilon,x}^i| < N\}$ que verifican que $\bigcup_N X_N = M(mod 0)$. Fijado N, casi todo punto de X_N vuelve infinitas veces a X_N por el Teorema de recurrencia de Poincare.

Ahora, como las funciones $\log a_\varepsilon^i : M\to\mathbb{R}$ son acotadas, el Teorema de Birkhoff nos dice que para casi todo punto se verifica que existe $(i=1,2)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log a_\varepsilon^i(f^j(x)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(a_\varepsilon^i(f^{n-1}(x))\dots a_\varepsilon^i(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{M_{\varepsilon,f^{n-1}(x)}^i}{M_{\varepsilon,x}^i}\|Df_x^nv_x^i\|$$

Ahora, fijando N suficientemente grande de forma tal que $x \in X_N$ es un punto genérico, podemos considerar la subsucesión $n_j \to \infty$ tal que $f^{n_j}(x) \in X_N$ y obtenemos que (como el límite no depende de la subsucesión y el del último término es λ_i por el Teorema de Oseledets)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(a^i_\varepsilon(f^{n-1}(x))\dots a^i_\varepsilon(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n_x v^i_x\| = \lambda_i$$

Esto implica la subexponencialidad de $M^i_{\varepsilon,x}$.

□

3. Pasando la información a la variedad

En esta sección intentaremos dar cartas en la variedad que nos permitan aprovechar la información lineal que obtuvimos en la propia superficie. Para esto usaremos de forma fundamental el hecho de que trabajamos con difeomorfismos de clase $C^{1+\alpha}$.

Teorema 3.1 (Coordenadas Lyapunov de Pesin)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ de una superficie Riemanniana M con un mapa exponencial* exp $> TM \to M$. *Sea μ una medida ergódica hiperbólica para f (con $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$). Entonces, para todo $\rho_0 > 0$ y ε suficientemente pequeño, existe una función medible $\rho : M \to (0, \rho_0)$ y una familia medible de isomorfismos lineales $C(x) : \mathbb{R}^2 \to T_xM$ que, siendo $\xi_x : B(0, \rho(x)) \to M$ dada por $z \mapsto \exp_x(C(x)z)$, verifican*

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \rho(f^n(x)) = 0$ *y se cumple* $\rho(f(x)) \in (e^{-\varepsilon}\rho(x), e^{\varepsilon}\rho(x))$.

(ii) *El mapa $\xi^{-1}_{f(x)} \circ f \circ \xi_x : B(0, \rho(x)/(2 \max e^{\lambda_i})) \to B(0, \rho(f(x)))$ coincide con la restricción de un difeomorfismo G_x de $\mathbb{R}^2$ de la forma*

$$z \mapsto \begin{pmatrix} a^1_\varepsilon(x) & 0 \\ 0 & a^2_\varepsilon(x) \end{pmatrix} z + \beta_x(z)$$

Con los $a^i_\varepsilon(x)$ como en el Teorema 2.1 y con $\beta_x(0) = 0$ y para una constante $K = K(f)$ se verifica que

$$\|D_z\beta_x\| \leq K\|C(f(x))^{-1}\|\rho(x)^\alpha \leq 3\varepsilon$$

Notar que el hecho que $\rho(f(x)) \in (e^{-\varepsilon}\rho(x), e^{\varepsilon}\rho(x))$ implica directamente la subexponencialidad de ρ (ver la prueba del Lema al final de esta sección) y este hecho es el clave a la hora de construir las variedades estables. Intentaré dar una breve motivación heurística de este hecho: Una vez que tenes esto, podemos considerar una sucesion de funciones de $\mathbb{R}^2$ de la forma que nos da este Teorema y para ellas construir variedades estables e inestables (esto lo haremos en la próxima sección), el problema, es que para asegurar que estas variedades quedan definidas realmente en la variedad, necesitamos que se encuentren siempre en el dominio de definición que pasa a la variedad (es decir, en $B(0, \rho(x))$), ahora, como $\rho(f(x)) \in (e^{-\varepsilon}\rho(x), e^{\varepsilon}\rho(x))$, sabemos que los puntos de la variedad estable de x de tamaño $\rho(x)$ se mantendrán siempre en el dominio que este Teorema nos permite "controlar" y por lo tanto, tenemos en x una variedad estable de tamaño $\rho(x)$.

Es importante notar que esto también nos va a dar que el tamaño de las variedades estables e inestables es subexponencial, pero si $\rho(x)$ cambiara peor, no podriamos ni siquiera asegurar que hay variedades estables e inestables.

Demostración.Consideramos $\varepsilon < \frac{1}{100} \min\{1 - e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2} - 1\}$. Aplicamos entonces el Teorema 2.1 con ese valor de ε. Definimos entonces

$$F_x(z) = \xi^{-1}_{f(x)} \circ f \circ \xi_x(z)$$

de alguna manera estamos abusando notación, ya que el dominio de definición de ξ_x no ha sido aun determinado. Por lo pronto, sabemos que existe R_0 no muy grande, de forma tal que $\exp_x$ está bien definida en $B(0, R_0)$ para todo $x \in M$. Por otro lado, por como estamos definiendo $F_x(z)$ va a estar bien definida siempre y cuando $||C_\varepsilon(x)z|| \leq R_0$ y si $v = \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x(C_\varepsilon(x)z)$ entonces se cumple que $||C_\varepsilon(f(x))^{-1}v|| < R_0$. Por la continuidad uniforme de f, definiremos R_1 de forma tal que si dos puntos estan a distancia menor que R_1 entonces sus imagenes por f estan a distancia menor que R_0.

Evidentemente, $F_x(z)$ es de la forma

$$F_x(z) = \begin{pmatrix} a_\varepsilon^1(x) & 0 \\ 0 & a_\varepsilon^2(x) \end{pmatrix} z + \beta_x(z)$$

Con $\beta_x(0) = 0$. O sea que si escribimos $z = (u, v)$ tendremos que

$$F_x(u, v) = (a_\varepsilon^1(x)u + \beta_x^1(u, v), a_\varepsilon^2(x)v + \beta_x^2(u, v))$$

Por otro lado, como $\exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x = D_x f + g_x$ y si elegimos R pequeño, tenemos que la exponencial es practicamente la identidad (ni hablar que es C^∞) entonces tendremos que Dg_x será $\alpha-$Holder con constante similar a la de f. Es decir

$$||D_z g_x|| \leq L||z||^\alpha$$

Ahora, consideramos β_x que verifica que $D_z\beta_x = D_z(C_\varepsilon(f(x))^{-1} \circ g_x \circ C_\varepsilon(x))$ entonces

$$||D_z\beta_x|| = ||C_\varepsilon(f(x))^{-1} \circ D_{C_\varepsilon(x)z} g_x|| \leq ||C_\varepsilon(f(x))^{-1}||L||C_\varepsilon(x)z||^\alpha \leq L||C_\varepsilon(f(x))^{-1}||||C_\varepsilon(x)||^\alpha||z||^\alpha$$

Con lo cual $D_z\beta_x$ es α-Holder con constante $k(x) := L||C_\varepsilon(f(x))^{-1}||||C_\varepsilon(x)||^\alpha \geq 1$ que obviamente es *temperada*, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log k(f^n(x)) = 0$$

lo cual sale directamente del Teorema 2.1.

Consideramos entonces

$$r(x) := \min\left\{\rho_0, \left(\frac{\varepsilon}{2k(x)}\right)^{1/\alpha}, \frac{R_1}{2}||C_\varepsilon(x)||^{-1}\right\}$$

Utilizando dicho $r(x)$, tenemos que F_x tal cual lo definimos, está bien definida en $B(0, 2r(x))$. Notar que para que este bien definido, hay que cuidar las siguientes propiedades:

(1) $||C_\varepsilon(x)z|| \leq R_0$. Esto es directo si $z \in B(0, r(x))$ por la propia definición de $r(x)$ (obviamente, $R_1 \leq R_0$) . Vale la pena recordar del Teorema 2.1 que $||C_\varepsilon(x)|| \leq 1$ para todo x, con lo cual la restricción de que $r(x)$ sea menor que $R_1||C_\varepsilon(x)||^{-1}$ es realmente artificial.

(2) $d(f(x), f(\exp_x(C_\varepsilon(x)z))) \leq R_0$ (para poder aplicar $\exp_{f(x)}^{-1}$, notar que como radialmente la exponencial preserva distancias, es exactamente esta la condición para estar en el dominio de definición). Esto queda asegurado por el hecho de que $r(x) \leq R_1||C_\varepsilon(x)||^{-1}$ y por como elegimos R_1.

La clave de la elección de $r(x)$ no es que el mapa quede bien definido, sino el hecho que permite controlar la norma de $D_z\beta_x$ y que es subexponencial (esto es lo que no se puede hacer sin la condición Holder en la derivada pues se necesita un control del modulo de continuidad que queda dado por esa relación en la derivada).

Ahora, queremos ver que podemos extender F_x a un difeomorfismo G_x de $\mathbb{R}^2$ que esta globalmente C^1 cerca de la matriz diagonal con entradas $a_\varepsilon^1(x)$ y $a_\varepsilon^2(x)$.

Antes, asumamos que podemos elegir $\rho(x) \leq r(x)$ que verifique lo que pide el Teorema (es decir, $\rho(f(x)) \in (e^{-\varepsilon}\rho(x), e^\varepsilon\rho(x))$). Esto lo probaremos en un Lema estandar al terminar la prueba[1].

Consideramos un chichon C^∞, $b : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ tal que $||t|| < \rho(x)$ implica que $b(t) = 1$ y si $||t|| < 2\rho(x)$ entonces $b(t) = 0$. Podemos también considerar que b decrece al crecer $||t||$ y que $||b'(z)|| \leq 2\rho(x)^{-1}$.

[1]Funciona utilizar $\rho(x) := \inf_{n\in\mathbb{Z}} r(f^n(x))e^{\frac{\varepsilon|n|}{10}} \geq 0$

Definimos

$$G_x(z) := b(z)F_x(z) + (1-b(z))\begin{pmatrix} a_\varepsilon^1(x) & 0 \\ 0 & a_\varepsilon^2(x) \end{pmatrix} = b(z)F_x(z) + (1-b(z))D_0F_x$$

Tenemos entonces que estimar $D_zG_x - D_0F_x$ y probar que es globalmente menor que ε. Notar que si $\|z\| \geq 2\rho(x)$ entonces $b'(z) = 0$ con lo cual esta bien definido lo que escribimos a continuación:

$$D_zG_x - D_0F_x = b(z)D_zF_x + (1-b(z))D_0F_x + (F_x(z) - D_0F_x)b'(z) - D_0F_x = b(z)D_z\beta_x + \beta_x(z)b'(z)$$

Tomando normas, obtenemos

$$\|b(z)D_z\beta_x\| \leq \|D_z\beta_x\| \leq k(x)(2\rho(x))^\alpha \leq \varepsilon$$

Por otro lado, si $\|z\| \leq 2\rho(x)$ tenemos que

$$\|\beta_x(z)b'(z)\| \leq \|\beta_x(z)\|\|b'(z)\| \leq \|\beta_x(z)\|2\rho(x)^{-1} \leq \varepsilon\rho(x)2\rho(x)^{-1} \leq 2\varepsilon$$

Como cuando $\|z\| \geq 2\rho(x)$ tenemos que $b'(z) = 0$ obtenemos que

$$\|D_zG_x - D_0F_x\| \leq 3\varepsilon$$

□

En lo único que hacemos uso de la hipotesis $C^{1+\alpha}$ es para que $\rho(x)$ sea temperada (o subexponencial) ya que hay que controlar la distorsión lineal $\|C_\varepsilon(x)^{-1}\|$ que es la que hace que ρ pueda tender a cero. El resto vale si usamos la continuidad uniforme de la derivada. Naturalmente, si $\|C_\varepsilon(x)^{-1}\|$ está acotada, también tenemos el mismo resultado.

Ahora veamos que si tenemos una sucesión subexponencial, también la podemos elegir de forma tal que no pegue "saltos" muy grandes que es lo que nos falto probar en el teorema.

Lema 3.1. *Sea $T : X \to X$ una transformación medible e invertible que preserva μ. Sea $K : X \to \mathbb{R}^+$ una función medible que verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log K(T^n(x)) = 0$$

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon : X \to \mathbb{R}^+$ que verifica que $K_\varepsilon(x) \leq K(x)$ y también verifica las siguientes propiedades:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log K_\varepsilon(T^n(x)) = 0$
- $K_\varepsilon(T(x)) \in (e^{-\varepsilon}K_\varepsilon(x), e^{\varepsilon}K_\varepsilon(x))$

Demostración.Consideramos

$$K_\varepsilon(x) := \inf_{n\in\mathbb{Z}} K(x)e^{\frac{\varepsilon|n|}{10}}$$

Evidentemente, dado que $K(x)$ es temperada, tenemos que $K_\varepsilon(x)$ está bien definida y es mayor a cero en todo punto. Al mismo tiempo, $K_\varepsilon(x) \leq K(x)$ es directo de la definición.

Es rápido corroborar que $K_\varepsilon(T(x)) \in (e^{-\varepsilon}K_\varepsilon(x), e^{\varepsilon}K_\varepsilon(x))$ (ver el Teorema 2.1 por una cuenta parecida) y por último, para ver la subexponencialidad, observamos que se deduce de la afirmación previa ya que implica que

$$-\varepsilon \leq \log K_\varepsilon \circ T - \log K_\varepsilon \leq \varepsilon$$

con lo cual, si consideramos la función $\varphi = \log K_\varepsilon$ tenemos que $\varphi \circ T - \varphi$ es integrable y una conocida consecuencia del Teorema de Birkhoff concluye.

□

4. Sucesiones de funciónes C^1 y el Teorema de Haddamard-Perron

Consideramos ahora el siguiente contexto. Sea $\{f_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que son de la forma (notar que cambiamos de orden la dirección contractiva y expansiva por razones psicológicas)

$$f_m(x,y) = (a_m x + \alpha_m(x,y), b_m y + \beta_m(x,y))$$

Donde se cumple $0 < b_m < \lambda < 1 < \mu < a_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y para un cierto ε suficientemente pequeño (en particular, $\varepsilon \ll \min\{\mu - 1, 1-\lambda\}$) se cumple que

$$\alpha_m(0,0) = \beta_m(0,0) = 0 \qquad \|D_z\alpha_m\|, \|D_z\beta_m\| < \varepsilon \qquad \forall m \in \mathbb{Z} \ \ \forall z \in \mathbb{R}^2$$

Usaremos que entonces tenemos para $z \in \mathbb{R}^2$

$$D_z f_m(u,v) = (a_m u + \alpha_m^u(z)u + \alpha_m^v(z)v, b_m v + \beta_m^u(z)u + \beta_m^v(z)v)$$

con α_m^σ y β_m^σ funciones menores que ε para todo $m \in \mathbb{Z}$ y $\sigma = u, v$.

Bajo estas hipótesis, veremos que existe cierto $\gamma > 0$ tal que los conos horizontales son preservados por $D_z f_m$.

Definimos entonces el *cono horizontal* de ancho $\gamma \in (0,1)$ en $z \in \mathbb{R}^2$ como[2]

$$H_\gamma(z) = \{(u,v) \in T_z\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \ : \ |v| \le \gamma |u|\}$$

Tenemos el siguiente Lema

Lema 4.1. *Existe $1 > \gamma > \gamma' > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{R}^2$ y $m \in \mathbb{Z}$ se cumple que*

$$D_z f_m(H_\gamma(z)) \subset H_{\gamma'}(f_m(z)) \subset H_\gamma(f_m(z))$$

Además, existe una constante $\eta > 1$ tal que si $v \in H_\gamma(z)$ entonces $\|D_z f_m v\| \ge \eta \|v\|$.

Demostración.Sabiendo que $|v| \le \gamma|u|$ tenemos que comparar $a_m u + \alpha_m^u u + \alpha_m^v v$ con $b_m v + \beta_m^u u + \beta_m^v v$.

Tenemos

$$|a_m u + \alpha_m^u u + \alpha_m^v v| \ge \mu|u| - \varepsilon|u| - \varepsilon|v| \ge (\mu - \varepsilon(1+\gamma))|u|$$

$$|b_m v + \beta_m^u u + \beta_m^v v| \le \lambda|v| + \varepsilon|u| + \varepsilon|v| \le (\lambda\gamma + \varepsilon(1+\gamma))|u|$$

Necesitamos entonces que

$$\frac{\lambda\gamma + \varepsilon(1+\gamma)}{\mu - \varepsilon(1+\gamma)} = \gamma' < \gamma < 1$$

$$\mu - \varepsilon(1+\gamma) = \eta > 1$$

para que $\eta > 1$ como queremos, necesitamos que $\gamma < \frac{\mu-1}{\varepsilon} - 1$ (que como $\varepsilon \ll \mu - 1$ no hay problema) y para que $\gamma' < \gamma$ necesitamos que

$$\lambda\gamma + \varepsilon(1+\gamma) < \mu\gamma - \varepsilon(1+\gamma)\gamma$$

y por lo tanto

$$\frac{\gamma}{1-\gamma^2} > \frac{\varepsilon}{\mu - \lambda}$$

[2]Consideramos $\gamma < 1$ por simplicidad nomas.

Que de nuevo, como ε era pequeño, no impone problemas (observar que a priori, como γ tiene restricciones por arriba y abajo, podria ser que haya problemas, de hecho, puede pasar si ε no es pequeño).

□

Observación 1. Obtuvimos entonces las siguientes cotas para γ (por si en algun momento sirven)

$$\gamma < \frac{\mu - 1}{\varepsilon} - 1 \qquad \frac{\gamma}{1-\gamma^2} > \frac{\varepsilon}{\mu - \lambda} \tag{1}$$

◊

Ahora, vamos a trabajar la transformada del Gráfico. Consideramos

$$L(\gamma) := \{g \in Lip(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ : \ Lip(g) \leq \gamma\}$$

Donde obviamente, $Lip(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es el espacio de funciónes Lipchitz de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $Lip(g)$ denota la constante de Lipchitz, es decir, el minimo valor de K tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Vamos a definir un operador $\Gamma_m : L(\gamma) \to L(\gamma)$ dado por el hecho que $\Gamma_m g$ tendrá como gráfico la imágen del gráfico de g por f_m. Para ver que queda bien definido hay que probar algunas cosas.

Sea $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $G_m(x) = a_m x + \alpha_m(x, g(x)) = \pi_1 \circ f_m(x, g(x))$ donde π_1 es la proyección en la primera coordenada y π_2 en la segunda. Usaremos el mismo γ que para el Lema anterior.

Lema 4.2. *Si $g \in L(\gamma)$, tenemos que G_m es un homeomorfismo creciente de $\mathbb{R}$.*

Demostración.

$$|G_m(x) - G_m(y)| = |a_m x + \alpha_m(x, g(x)) - a_m y - \alpha_m(y, g(y))| \geq \mu|x - y| - |\alpha_m(x, g(x)) - \alpha_m(y, g(y))| \geq$$

$$\geq \mu|x - y| - \varepsilon\|(x, g(x)) - (y, g(y))\| \geq \mu|x - y| - \varepsilon(|x - y| + |g(x) - g(y)|) \geq (\mu - \varepsilon(1 + \gamma))|x - y|$$

Por las estimaciones hechas en el Lema anterior, tenemos lo deseado.

□

Observación 2. Obtuvimos que $|G_m(x) - G_m(y)| \geq (\mu - \varepsilon(1 + \gamma))|x - y|$.

◊

Esto nos permite definir el operador $\Gamma_m : L(\gamma) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dado por

$$\Gamma_m(g)(x) := \pi_2 \circ f_m(G_m^{-1}(x), g(G_m^{-1}(x)))$$

Vamos a ver que para toda $g \in L(\gamma)$ tenemos que $\Gamma_m(g) \in L(\gamma)$.

Lema 4.3. *Se cumple que $\Gamma_m(L(\gamma)) \subset L(\gamma)$.*

De hecho, se tiene $\Gamma_m(L(\gamma)) \subset L(\gamma')$, pero no es de mucha utilidad.

Demostración.Tenemos que $\Gamma_m g(G_m(x)) = b_m g(x) + \beta_m(x, g(x))$ entonces, una cuenta muy similar a lo que veniamos haciendo, nos da

$$|\Gamma_m g(G_m(x)) - \Gamma_m g(G_m(y))| \leq \lambda|g(x) - g(y)| + |\beta_m(x, g(x)) - \beta_m(y, g(y))| \leq (\lambda\gamma + \varepsilon(1 + \gamma))|x - y|$$

Por otro lado, como observamos en la Observación 2 tenemos que por lo tanto

$$|\Gamma_m g(G_m(x)) - \Gamma_m g(G_m(y))| \leq \frac{\lambda\gamma + \varepsilon(1 + \gamma)}{\mu - \varepsilon(1 + \gamma)}|G_m(x) - G_m(y)|$$

Que por la Observación 1 concluye la prueba.

□

Ahora, fijada una órbita de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, es decir, una sucesión $\underline{z} = \{z_m = (x_m, y_m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ que verifica $f_m(z_m) = z_{m+1}$, definimos el espacio

$$L(\gamma, \underline{z}) = \{\{g_m \in L(\gamma)\}_{m\in\mathbb{Z}} \ : \ g_m(x_m) = y_m\}$$

Para definir una métrica en $L(\gamma, \underline{z})$ primero notamos $\|\cdot\|_\infty$ como la norma

$$\|g - \tilde{g}\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g(x) - \tilde{g}(x)|}{|x|}$$

que está bien definida en el espacio de funciones Lipchitz y acotada por la suma de las constantes de Lipchitz. Esto hace al espacio de funciones Lipchitz completo como se puede corroborar con un cálculo directo.

Definimos en $L(\gamma, \underline{z})$ la métrica siguiente que lo hace un espacio métrico completo

$$d(\{g_m\}, \{\tilde{g}_m\}) = \sup_{m\in\mathbb{Z}} \|g_m - \tilde{g}_m\|_\infty$$

Notar que como $(g_m - \tilde{g}_m)(x) = 0$ obtenemos que la condición Lipchitz nos da $\|g_m - \tilde{g}_m\| \leq 2\gamma$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ (y por lo tanto la distancia queda bien definida).

Vamos a ver que la transformada del gráfico, definida como $\Gamma(\{g_m\}) = \{\Gamma_{m-1} g_{m-1}\}$ es una contracción de la bola de radio 1/2 alrededor de la sucesión de funciónes constante $g_m(x) = y_m$. Es fácil observar que para cualquier órbita $\underline{z}$ se cumple que $\Gamma : L(\gamma, \underline{z}) \to L(\gamma, \underline{z})$.

Una observación importante, es que si no fijamos la órbita $\underline{z}$, entonces la métrica deja de tener sentido, ya que la expansividad infinita de la sucesión de funciones hace que la distancia entre dos sucesiones de gráficos sea infinita!.

Lema 4.4. *Existe $\nu < 1$ tal que si $\{g_m\}$ y $\{\tilde{g}_m\}$ son sucesiones de funciones en $L(\gamma, \underline{z})$ entonces se verifica que*

$$d(\Gamma\{g_m\}, \Gamma\{\tilde{g}_m\}) < \nu d(\{g_m\}, \{\tilde{g}_m\})$$

Demostración.Por como está definida la distancia en $L(\gamma, \underline{z})$ basta estudiar que pasa con la distancia de $\Gamma_m g_m$ y $\Gamma_m \tilde{g}_m$. Recordamos que $\Gamma_m g_m(G_m(x)) = b_m g_m(x) + \beta_m(x, g_m(x))$ entonces

$$|\Gamma_m g_m(G_m(x)) - \Gamma_m \tilde{g}_m(G_m(x))| = |b_m(g_m(x) - \tilde{g}_m(x)) + \beta_m(x, g_m(x)) - \beta_m(x, \tilde{g}_m(x))| \leq (\lambda + \varepsilon)|g_m(x) - \tilde{g}_m(x)|$$

Como ε es pequeño, sabemos que $\nu = \lambda + \varepsilon < 1$ obtenemos la contracción deseada.

□

Este Lema nos garantiza la existencia de un único punto fijo $\varphi = \{\varphi_m\}$ que verifica que para todo m se tiene que $\varphi_m \in L(\gamma)$, $\varphi_m(x_m) = y_m$, verifica la propiedad de invariancia

$$\Gamma_m \varphi_m = \varphi_{m+1}$$

Y se cumple que si $\tilde{z}_l = (x, \varphi_m(y))$ entonces, si $\underline{\tilde{z}} = \{\tilde{z}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una órbita entonces

$$d(z_m, \tilde{z}_m) \to 0 \qquad con \qquad m \to -\infty$$

En particular, tenemos esta sucesion de funciones, correspondiente a la *variedad inestable*, para la órbita especial $\underline{0}$ que consiste de aplicar 0 constantemente. Si ahora decidiesemos cambiar la sucesión de funciones f_m poco en la topología C^1 manteniendo el hecho que $\underline{0}$ es una órbita entonces el Lema siguiente nos dice que la variedad inestable no cambia mucho

Lema 4.5. *Sea $f : X \to X$ con X espacio métrico completo que verifica $d(f(x), f(y)) < \lambda d(x, y)$ con $\lambda < 1$. Entonces, para todo ε, existe $0 < \delta < 1 - \lambda$ tal que si $d(f(x), g(x)) < \delta$ para todo x y se verifica que $d(g(x), g(y)) < (\lambda + \delta)d(x, y)$ para todos x, y. Entonces, el punto fijo de g esta a distancia menor que ε del de f.*

Demostración.Considerar $\delta \leq \frac{\varepsilon(1-\lambda)}{1+\varepsilon}$ y acotar la distancia entre x_0 (fijo de f) e y_0 (fijo de g). Ver Proposicion 1.1.5 de [KH].

□

Por otro lado, al fijarse en puntos (orbitas) cercanas, se puede pensar como una versión de este Lema también pues los espacios si bien son diferentes, los mapas son parecidos.

De hecho, es importante notar que todo lo que hicimos en esta sección funcionaba exactemente igual si considerabamos que las funciones f_m eran de la forma

$$f_m(x, y) = (x_0^m + a_m x + \alpha_m(x, y), y_0^m + b_m y + \beta_m(x, y))$$

Ya que componer con una translación no afecta ninguno de los argumentos que realizamos.

Analogamente, para estas sucesiones, se pueden construir variedades estables.

4.1. Diferenciabilidad de las variedades estables e inestables. Esta sección no es importante si lo que se desea es entender la prueba del Teorema de Katok.

La prueba de esto es simple, pero no la haremos al detalle pues no es lo que más nos interesa. La idea es que una función Lipchitz tiene un "cono" derivada, es decir, los vectores "tangentes" al gráfico (es decir, los puntos límite de $\frac{g(x_n)-g(x)}{|x_n-x|}$ con $x_n \to x$). Como la derivada manda estos conos en si mismos, el hecho que las variedades estables e inestables sean puntos fijos de la transformada del gráfico implica que estos conos son "invariantes" por las f_m. Esto sin mucha dificultad se puede mostrar que implica que son subespacios y por lo tanto la función es diferenciable. Naturalmente, en $(0, 0)$ son tangentes a lo que tienen que ser.

5. El Teorema de la Variedad Estable para medidas hiperbólicas de difeomorfismos suaves

Esta sección no es importante si lo que se desea es entender la prueba del Teorema de Katok pero nos resulto interesante incluir esta consecuencia del trabajo que realizamos en la sección anterior.

Teorema 5.1 (Teorema de la variedad estable de Pesin)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ que deja invariante una medida ergódica μ con exponentes $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Entonces, casi todo punto $x \in M$ tiene variedades estables e inestables locales $W^{ss}_{loc}(x)$ y $W^{uu}_{loc}(x)$ de diametro al menos $\rho(x)$ (que varia subexponencialmente). Además, estas variedades son C^1 y varian mediblemente.*

Demostración.La prueba es simple. Existe un conjunto Λ de medida total, dado por el Teorema 3.1, tal que si $x \in \Lambda$, entonces existen

$$f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f_m(x_1, x_2) = (a_m x_1 + \alpha_m(x_1, x_2), b_m x_2 + \beta_m(x_1, x_2))$$

que extienden a las funciones $F_m : B(0, \rho(f^m(x))/2e^{\lambda_2}) \to B(0, \rho(f^{m+1}(x)))$ que coincide con $C(f^{m+1}(x))^{-1} \circ \exp^{-1}_{f^{m+1}(x)} \circ f \circ \exp_{f^m(x)} \circ C(f^m(x))$. Como alli tenemos variedades estables como las construidas en la seccion anterior (4) y se cumple que si consideramos $W^{ss}_{loc} = W^{ss} \cap B(0, \rho(x)/2e^{\lambda_2})$ donde W^{ss} es la variedad estable en el paso 0. Por la forma de f_m y por el hecho que $a_m + \varepsilon < e^{\lambda_1+\varepsilon} < e^{-\varepsilon} < 1$ tenemos que la imagen por f_0 de $f_0(W^{ss}_{loc}) \subset B(0, \rho(f(x))/2e^{\lambda_2})$. Inductivamente, vemos que aplicando los f_m los puntos de W^{ss}_{loc} convergen a 0 exponencialmente y siempre se mantienen en el dominio de definición de F_m (que coincide con f).

El diametro entonces de W^{ss}_{loc} es entonces aproximadamente de $\rho(x)/2e^{\lambda_2}$ módulo la distorsión introducida por las exponenciales y por los mapas $C(x)$ y $C(x)^{-1}$. Como todo eso es también subexponencial, obtenemos lo deseado.

□

6. Shadowing exponencial

La idea es probar el siguiente Teorema y despues ver como de él se deduce el Teorema de Katok.

Teorema 6.1 (Closing Lemma No Uniforme, [K]). *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$ de una superficie dejando invariante una medida ergódica μ con exponentes $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Entonces, para todo $\delta > 0$ existe un conjunto Λ de medida $\mu(\Lambda) > 1-\delta$ tal que para todo r_1 existe r_2 tal que si $x \in \Lambda \cap f^{-n}(\Lambda)$ y $d(x, f^n(x)) < r_2$ entonces existe un punto periódico $p \in M$ tal que $f^n(p) = p$ y $d(f^k(p), f^k(x)) < r_1$ para todo $0 \le k \le n$.*

Antes vamos a dar alguna definición y probar un resultado previo. Vamos a trabajar con sucesiones de funciones de $\mathbb{R}^2$ similares a las de la sección anterior.

Fijados $0 < a < 1 < b$, $\varepsilon > 0$ y $d > 0$ decimos que una sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de difeomorfismos C^1 de $\mathbb{R}^2$ es una (a,b,ε,d)*–secuencia hiperbólica* sii:

$$f_m(x,y) = (x_m^0 + a_m x + \alpha(x,y), y_m^0 + b_m y + \beta(x,y))$$

con $\alpha(0,0) = \beta(0,0) = 0$, se cumple que $\|D\alpha_z\|$ y $\|D\beta_z\|$ son menores que ε para todo $z \in \mathbb{R}^2$, se cumple que $\max\{|x_m^0|, |y_m^0|\} \le d$ y tenemos que $a_m \le a$ y $b_m \ge b$.

Consideramos $\mathcal{F}(a,b,\varepsilon,d)$ el espacio de dichas sucesiones con la topología producto. Decimos que $\underline{z} = \{z_m\}$ es una *órbita* de $\{f_m\} \in \mathcal{F}(a,b,\varepsilon,d)$ sii tenemos que $f_m(z_m) = z_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Decimos que la órbita es *acotada* si $\sup_m \|z_m\| < \infty$.

Notaremos $f_m^n = f_{m+n-1} \circ \ldots \circ f_m$ y $f_m^{-n} = (f_{m-1}^n)^{-1}$ si $n > 0$.

Se verifica el siguiente Teorema

Teorema 6.2 (Shadowing Exponencial). *Para todo $0 < a < 1 < b$ y $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(a,b)$, $d > 0$ y $\{f_m\} \in \mathcal{F}(a,b,\varepsilon,d)$ existe una única órbita acotada $\{z_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de $\{f_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Además, existe un $R_0 = R_0(a,b,\varepsilon) < \infty$ (no depende de $\{f_m\}$ ni de d) que verifica*

(A1) $\sup_m \|z_m\| < R_0 d$

(A2) *La órbita es uniformemente hiperbólica: Es decir, existe $C > 0$ y vectores unitarios[3] v_m^s, v_m^u en $T_{z_m}\mathbb{R}^2$ tal que $D_{z_m} f_m \mathbb{R} v_m^\sigma = \mathbb{R} v_{m+1}^\sigma$ ($\sigma = s,u$) y se cumple que*

$$\|D_{z_m} f_m^n v_m^s\| \le C(a+5\varepsilon)^n \qquad \|D_{z_m} f_m^n v_m^u\| \ge C^{-1}(b-5\varepsilon)^n \qquad \forall n \ge 0$$

Además, se cumple que si $\{\tilde{f}_m\} \in \mathcal{F}(a,b,\varepsilon,d)$ verifica que $\tilde{f}_k = f_k$ para todo $-M \le k \le M$, entonces se verifica que

$$A = \|z_0 - \tilde{z}_0\| \le R_0 d((a+5\varepsilon)^M + (b-5\varepsilon)^{-M})$$

Y por lo tanto

$$\|z_m - \tilde{z}_m\| \le \min\{2R_0 d, A((a-5\varepsilon)^m + (b+5\varepsilon)^m)\}$$

Demostración.Supongamos que dos puntos del plano (x_0, y_0) y (x_1, y_1) verifican que $y_0 \ne y_1$ entonces, tenemos que si $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la proyección en la segunda coordenada, entonces

$$|\pi_2 \circ f_m(x_0, y_0) - \pi_2 \circ f_m(x_1, y_1)| \ge b|y_0 - y_1|$$

Inductivamente (y haciendo un argumento analogo para iterados negativos) si $x_0 \ne x_1$ obtenemos que dos órbitas cualesquiera $\underline{z}$ y $\underline{w}$ verifican que

$$\sup_m \|z_m - w_m\| = \infty$$

con lo cual si existe una órbita acotada, necesariamente será única.

Para probar que la órbita existe (y que verifica (A1) para un R_0 bien elegido), observamos que dado que el órigen se envia en un punto de norma menor que $2d$ para todo f_m, sabemos que eligiendo bien

[3] Notamos $\mathbb{R}v$ como la dirección definida por el vector v en el espacio vectorial al que pertenezca.

R_0 el cuadrado C de lado $R_0 d$ centrado en 0 verifica que $f_m(C)$ se atraviesa a si mismo. Basta tomar R_0 tal que $(a+\varepsilon)R_0 d < (R_0 - 1)d$ y $(b-\varepsilon)R_0 d > (R_0+1)d$ (notar que d se cancela!!! por lo tanto, R_0 realmente no depende de d!!!).

De esta manera, la misma prueba del Shadowing Lemma para matrices hiperbólicas (con alguna estimacioncita extra) nos da el punto deseado.

La hiperbolicidad sale directo de iterar los conos sobre z_{n+m} y llevarlos a z_m por el diferencial de las funciones correspondientes (el 5ε capaz es medio exagerado, pero seguro anda al menos).

La afirmación sobre la orbita para una sucesión de difeomorfismos que coincide en varios iterados sale de "pararse en el medio" y fijarse que la órbita por como la construimos (iterando el cuadrado de lado $R_0 d$) queda dada exactamente asi al iterar. Notar que en un caso (para definir A) obtenemos $a+5\varepsilon$ y $b-5\varepsilon$ y en el otro lado es alreves, esto no representa un error tipografico, dado que tiene que ver con que las cotas estan hechas al reves.

□

Corolario 6.1. *Si se verifica que existe $n > 0$ tal que $f_{m+n} = f_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, entonces, se cumple que $z_{m+n} = z_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.*

Demostración.Esto es consecuencia de la unicidad y el hecho que si $\{z_m\}$ es una órbita, entonces $\{z_{n+m}\}$ también.

□

Demostración del Teorema 6.1. Vamos a probar que fijado $\delta > 0$, existe $\Lambda_\delta \subset \Lambda$ con medida $\mu(\Lambda_\delta) > 1-\delta$ tal que si fijamos $r_1 > 0$, existe r_2 tal que si $x, f^n(x) \in \Lambda_\delta$ y $d(x, f^m(x)) < r_2$, entonces, existe una órbita periódica de período n que pasa sus primeros n iterados a distancia menor que r_1 de x.

Aplicamos ahora el Teorema que nos da buenas coordenadas (el Teorema 3.1) que usa fuertemente el hecho que f es $C^{1+\alpha}$.

Tenemos entonces que fijado $\varepsilon > 0$ (que lo elegimos de forma tal que $\lambda_1 + 100\varepsilon < 0 < \lambda_2 - 100\varepsilon$) conseguimos una función $\rho : \Lambda \to (0, \rho_0)$ medible tal que si consideramos los mapas $\xi_x : B(0,\rho(x)) \to M$ tal que $\xi_x(z) = \exp_x(C_\epsilon(x)z)$ entonces[4] el mapa $F_x = \xi_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \xi_x : B(0, \rho(x)/(2e^{\lambda_2})) \to B(0, \rho(f(x)))$ coincide con la restricción a $B(0, \rho(x)/(2e^{\lambda^2}))$ de un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\tilde{F}_x(x_1, x_2) = (a_x x_1 + \alpha_x(x_1, x_2), b_x x_2 + \beta_x(x_1, x_2))$$

El Teorema de Luisin (Teorema 2.23 de [Rud]) dice lo siguiente: Sea $\varphi : X \to \mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) una función medible donde $\mu(X) = 1$. Entonces, para todo $\delta > 0$ existe una función continua y acotada $g : X \to \mathbb{K}$ tal que coincide con φ en un conjunto compacto de medida[5] mayor que $1-\delta$.

Consideramos entonces, un conjunto compacto $\Lambda_\delta \subset \Lambda$ tal que se verifica que $\mu(\Lambda_\delta) > 1-\delta$ y también tenemos que las funciones ρ, $C_\varepsilon^{\pm 1}$ son continuas. Consideramos entonces $\rho_1 = \text{mín}_{x\in\Lambda_\delta} \rho(x)$ y $A = \sup_{x\in\Lambda_\delta} \|C_\epsilon(x)^{\pm 1}\|$.

Definimos entonces $\eta > 0$ tal que toda bola de radio ρ_1 despues de ser transformada por una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ de norma menor o igual que A contiene una bola de radio 10η. Como ρ_0 era inicialmente suficientemente pequeño, sabemos que la exponencial no contiene mucha distorsión y por lo tanto, obtenemos que

$$B(x, 5\eta) \subset \xi_x(B(0, \rho(x))) \qquad \forall x \in \Lambda_\delta$$

[4]Vamos a elegir ϵ al final del Teorema. Se verifica que $\rho(f(x)) \in [e^{-\epsilon}\rho(x), e^{\epsilon}\rho(x)]$. La elección va a tener que ver solo con el tamaño de ε con lo cual quedará bien definido.

[5]La idea de la prueba es simple, considerar un compacto de medida $1-\delta/2$ y un abierto que lo contenga. Por Uryson, podemos aproximar las funciones simples de forma que sean continuas en los compactos esos y que sean ahi también casi constantes. Entonces, en un conjunto de medida $1-\delta$ (un changui ahi) donde converge uniformemente.

Ahora, fijado $r_1 < \eta$, consideramos $R_0 = R_0(e^{\lambda_1+\varepsilon}, e^{\lambda_2-\varepsilon}, \varepsilon)$ dado por el Teorema 6.2 y consideramos entonces

$$d \leq \frac{\text{mín}\{\tilde{r}_1, \rho_1, \}}{R_0}$$

Donde $\tilde{r}_1$ es el radio de una bola que este contenido en la imagen de una bola de radio r_1 por una transformación lineal de norma menor o igual que A.

El Teorema se deduce de aplicar el Teorema 6.2 a una sucesión de funciones que consideraremos a continuación.

Primero, para $0 \leq m < n-1$ consideramos $f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada como las funciones $G_{f^m(x)}$ construidas en el Teorema 3.1. Para $m = n-1$ consideramos un transladado de $G_{f^{n-1}(x)}$ de forma tal que la imagen del cero sea el punto correspondiente a x (en lugar de $f^n(x)$). Ahora, completamos esta sucesión de funciones periodicamente, es decir, $f_{kn+m} = f_m$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

El Teorema 6.2 (en realidad, el Corolario 6.1) nos da uná órbita acotada z_m periódica. Como si cambiasemos f_{n-1} eliminando la translación, la órbita es trivialmente la constante igual al origen, la estimación de las distancias nos da (por simplicidad, consideramos que $n-1$ es par):

$$\|z_m\| \leq R_0 d((a+5\varepsilon)^{\frac{n-1}{2}} + (b-5\varepsilon)^{-\frac{n-1}{2}})((a-5\varepsilon)^{m-\frac{n-1}{2}} + (b+5\varepsilon)^{m-\frac{n-1}{2}})$$

Alcanza entonces mostrar que para $0 \leq m \leq n-1$ se tiene que $\|z_m\| \leq \rho(f^m(x))$. Para eso, vemos que si fijamos $\epsilon > 0$ podriamos haber elegido ε suficientemente pequeño de forma tal que si $0 \leq m \leq n-1$ entonces

$$((a+5\varepsilon)^{\frac{n-1}{2}} + (b-5\varepsilon)^{-\frac{n-1}{2}})((a-5\varepsilon)^{m-\frac{n-1}{2}} + (b+5\varepsilon)^{m-\frac{n-1}{2}}) \leq \text{máx}\{e^{-\epsilon m}, e^{-\epsilon(n-m)}\}$$

Y usando que $\rho(f(x)) \in [e^{-\epsilon}\rho(x), e^{\epsilon}\rho(x)]$ concluimos.

□

Notar que al final de la prueba fue escencial el decrecimiento sub-exponencial del tamaño de las cartas para poder garantizar que la órbita que encontramos para la sucesión de funciones del plano era efectivamente una órbita del difeomorfismo. Posiblemente, este paso es el paso clave de la prueba y es donde se evidencia la importancia de la hipotesis de que f sea $C^{1+\alpha}$.

7. Entropia y Herraduras

Solamente voy a probar la existencia de herraduras (conteniendo el soporte de una medida hiperbólica) pues para probar el Teorema en su versión cuantitativa (probar que hay herraduras cuya entropía aproxima la entropía de la medida) es necesario introducir más elementos sobre la entropía que no son el lo que estoy interesado. Si algun día escribo la prueba de la desigualdad de Ruelle, capaz termino la prueba. El enunciado que voy a probar es entonces el siguiente:

Teorema 7.1 (Katok, versión "cualitativa"). *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ de una superficie compacta que preserva una medida ergódica μ con exponentes $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Entonces, sop$(\mu)$ está contenido en una clase homoclínica.*

Recordamos que la clase homoclínica de una órbita periódica es la clausura de todas las intersecciones transversales entres sus variedades estables e inestables (también coincide con la clausura de los puntos periódicos homoclinicamente relacionados).

Esta versión débil del Teorema de Katok junto con la desigualdad de Ruelle igual nos da como consecuencia el siguiente Corolario que es independiente de la teoría ergódica.

Corolario 7.1. *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ de una superficie compacta. Entonces, si $h_{top}(f) > 0$, entonces f tiene una herradura.*

La prueba de este hecho sale bastante directo de la sección anterior ya que las órbitas periódicas que construimos son hiperbólicas y sabemos que tienen entonces variedades estables e inestables de tamaño (si consideramos $\tilde{r}_1$ muchisimo más chico que ρ_1) razonablemente grande con lo cual, sabiendo que el punto periódic tiene iterados muy cercanos (usando que r_2 también lo podemos considerar pequeño con relación al tamaño de las variedades) obtenemos que hay intersecciones homoclinicas como las deseadas.

Apéndice A. Caso C^1-dominado

Nos basamos en [ABC, AB3]. Vamos a asumir que $f : M \to M$ es un difeomorfismo C^1 de una superficie M que deja invariante una medida ergódica μ con exponentes $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ y tal que en $sop(\mu)$ se tiene una descomposición dominada $E \oplus F$.

Esto significa que para todo $x \in sop(\mu)$ se cumple que $\|Df_{/E}\| \leq \frac{1}{2}\|Df_{/F}\|$ (estamos utilizando el hecho que los subespacios son unidimensionales y la existencia de una métrica adaptada [G])

Es bastante directo mostrar, a partir de la existencia de familias de placas invariantes ([HPS]) tal cual es hecho en [ABC] que tenemos el siguiente resultado (ellos muestran un resultado mucho más general, sin restricciones de dimensión). En [AB3] no usan [HPS], pero, si bien es creible que no sea necesario utilizarlo, me parece que hay algunos problemitas con la prueba (al final trato de esbozar como puede funcionar).

Teorema A.1 (Pesin dominado)**.** *Bajo estas hipotesis, casi todo punto segun μ tiene variedades estables e inestables de diametro subexponencial.*

Demostración. Tenemos para todo punto familias de placas invariantes. Es decir, un mapa continuo $\Phi^{cs} : sop(\mu) \to Emb^1([-1,1], M)$ tal que para todo ε existe δ tal que

$$f(\Phi^{cs}_x((-\delta,\delta))) \subset \Phi^{cs}_{f(x)}((-\varepsilon,\varepsilon))$$

Se tiene una función $a^n : sop(\mu) \to \mathbb{R}^+$ dada por $a^n(x) = \|D_x f^n_{/E}\|$ (claramente $a^n(x) = a(f^{n-1}(x)) \dots a(x)$). El exponente λ_1 es entonces $\lim_n \frac{1}{n}\log(a^n(x)) = \lambda_1 < 0$ para casi todo punto $x \in sop(\mu)$.

Consideramos $BL^s(\ell, f) = \{x \in sop(\mu) \ : \ \log(a^{n\ell}(x)) < -n \ \forall n > 0\}$

Para concluir, vamos a utilizar el siguiente Lema de [AB3] que me parece bastante interesante por si mismo (creo que usando el Lema de Pliss se pueden obtener resultados similares[6]).

Lema A.1 (Lema 4.7 de [AB3])**.** *Sea μ una medida invariante para f de soporte $\Lambda = sop(\mu)$. Supongamos que $\eta \in (0,1)$, $\alpha > 0$ y $\ell \in \mathbb{Z}^+$ verifican las siguientes propiedades:*

(P1) $\mu(\{x \in \Lambda \ : \ \lambda_1(x) > -\alpha\}) < \eta$ *donde $\lambda_1(x) < \lambda_2(x)$ son los exponentes de μ.*
(P2) $\ell > 1/(\alpha\eta)$
(P3) $\int_\Lambda \left| \frac{1}{\ell}\log\|Df^\ell_{/E}\| - \lambda_1 \right| d\mu < \alpha\eta$

Entonces, se cumple que $\mu(\Lambda \backslash BL^s(\ell, f)) < 3\eta$.

Demostración. Para $x \in \Lambda$, sea

$$\varphi(x) = \log\|D_x f^\ell_{/E}\| \qquad \varphi^*(x) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^{\ell j}(x))$$

Tenemos que $BL^s(\ell, f) = \{x \ : \ \varphi^*(x) < -1\}$. Entonces, por el Teorema ergódico maximal,

[6] De hecho, no lo pense mucho, pero cpaz anda una prueba de este estilo para lo que necesitamos realmente. Como el exponente es menor que α, tenemos que todo punto verifica que $\|Df^n(x)\| < C(x)e^{-n\alpha+\varepsilon n}$ fijando algún ε. Entonces, Considerando los puntos donde $C(x) < K$ cubrimos todos. Entonces, siempre vamos a encontrar el ℓ deseado. Esto da un resultado más débil, pero que sirve a nuestros propositos. Como no habia reflexionado mucho antes, y ya lo escribí, voy a dejar el Lema, pero lo que necesitamos sale mucho más barato!.

$$\int_{BL^s(\ell,f)^c} (\varphi + 1)d\mu \geq 0$$

Por lo tanto, considerando en $\mathcal{A} = \{x \ : \ \lambda_1(x) \leq -\alpha\}$ que es un conjunto invariante, también tenemos[7]

$$\int_{BL^s(\ell,f)^c\cap\mathcal{A}} (\varphi + 1)d\mu \geq 0$$

Esto implica que

$$\int_{BL^s(\ell,f)^c\cap\mathcal{A}} (\frac{\varphi}{\ell} + \frac{1}{\ell})d\mu \geq 0$$

Como por (P2) tenemos que $\int_{\mathcal{A}} \frac{1}{\ell}d\mu \leq \eta\alpha$ tenemos y por (P3) sabemos[8] que $\int_{BL^s(\ell,f)^c\cap\mathcal{A}} \lambda_1 d\mu \geq \eta\alpha + \int_{BL^s(\ell,f)^c\cap\mathcal{A}} \frac{\varphi}{\ell}d\mu$

$$\int_{BL^s(\ell,f)^c\cap\mathcal{A}} \lambda_1(x)d\mu = 2\alpha\eta \int_{BL^s(\ell,f)^c\cap\mathcal{A}} \frac{\varphi}{\ell}d\mu \geq 0$$

Pero entonces tenemos que

$$\alpha\mu(BL^s(\ell, f)^c \cap \mathcal{A}) \leq \alpha\eta$$

Por lo tanto, tenemos que $\mu(BL^s(\ell, f)^c) \leq \mu(\mathcal{A}^c) + \eta \leq 3\eta$ (usando (P1)) como queríamos.

$\square$

Utilizando este Lema (que podriamos haber cambiado de alguna manera por el Lema de Pliss que también nos asegura que los conjuntos $BL^s(\ell, f)$ son grandes para ℓ grande) obtenemos justamente eso. Fijado $\eta > 0$, conseguimos mostrar que para ℓ suficientemente grande se cumple que la medida de $BL^s(\ell, f)$ es mayor que $1 - \eta$. Basta para esto considerar que lím $\frac{1}{n}\log(a^n(x)) = \lambda_1$ para casi todo punto y usar el hecho que estas funciones estan uniformemente acotadas (por el logaritmo de la norma de Df) para, por el Teorema de Convergencia Dominada deducir que se cumple para ℓ suficientemente grande la propiedad (P3) del Lema. Por otro lado, basta tomar $0 < \alpha < \lambda_1$ y ℓ suficientemente grande para que se cumplan también las propiedades (P1) y (P2).

Entonces, tenemos que para esos puntos, el conjunto $BL^s(\ell, f)$ mide mas que $1 - \eta$. La continuidad uniforme de Df^ℓ nos permite encontrar un valor $s > 0$ de forma tal que para cualquier punto en $B(x, s)$ con $x \in BL^s(\ell, f)$ se cumple que la contracción de Df^ℓ en un cierto cono alrededor de E es similar a la de x y por lo tanto veremos contracción en todos los pasos y por lo tanto, obtendremos que

$$f^\ell(\Phi_x^{cs}((-\delta, \delta))) \subset \Phi_{f^\ell(x)}^{cs}((-\nu\delta, \nu\delta))$$

Donde $0 \leq \nu \leq 1$ y obtener (inductivamente, un buen lugar para ver esto hecho es [PS] Lema 2.0.3) la existencia de las variedades estables deseadas que tendrán en $BL^s(\ell, f)$ un tamaño mayor que un

[7] El Teorema Ergodico Maximal dice que si $\varphi : X \to \mathbb{R}$ está en $L^1(\mu)$ y μ es T invariante entonces considerando $\varphi^*(x) = \sup_{n\geq 1} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ T^j(x)$ se verifica que

$$\int_{\{\varphi^*\geq 0\}} \varphi d\mu \geq 0$$

Esto se deduce de la siguiente forma, sea $\varphi_n = \max_{1\leq k\leq n}\{\sum_{i=0}^{k} \varphi \circ T^i\}$ entonces basta mostrar que $\int_{\{\varphi_n\geq 0\}} \varphi \geq 0$ para todo n (pues son dominios crecientes). Entonces, se ve con algunos cálculos estandar (ver [M] capítulo 2) que

$$\int_{\{\varphi_n\geq 0\}} \varphi \geq \int_{\{\varphi_n\geq 0\}} \varphi_n - \int_{\{\varphi_n\geq 0\}\cap\{\varphi_n\circ T\}} \varphi_n \circ T \geq 0$$

[8] Observar que el Teorema de Birkhoff nos dice que para casi todo punto se cumple que $\ell\lambda_1(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{\ell j}(x))$, cpaz esto permite prescindir de que (P3). No me queda claro, pero habrá que pensarlo.

cierto r que depende solamente de ℓ y de f (esto incluye la dominación, en particular, el valor de r se puede tomar igual para g cercano a f).

La subexponencialidad viene dada por el hecho de que la variedad estable en $f(x)$ tiene a lo sumo el tamaño multiplicado por $K = \sup_{x\in M} \|D_x f\| > 1$ (si se agranda) o por $k = \inf_{x\in M} m(D_x f) \in (0,1)$ (donde $m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$ cuando se achica) y por lo tanto, si $d : sop(\mu) \to \mathbb{R}^+$ es la función diametro de la variedad estable , entonces tenemos que la función $\log d(f(x)) - \log d(x) \in [\log k, \log K]$ y por lo tanto es integrable. Una consecuencia clásica del Teorema de Birkhoff da la subexponencialidad[9].

□

Ahora voy a intentar dar una prueba sin usar el hecho que tenemos la familia de placas invariante (basada en [AB3]).

La idea es la siguiente, tomamos discos (en este caso curvas) que sean tangentes al cono centro estable (alrededor de E). Nos fijamos bolas B_n de radio $re^{a^n(x)+\varepsilon n}$ centradas en $f^n(x)$ (que tienen radio que tiende a cero) y si nos fijamos un arco centro estable en esa bola, su imagen por f^{-n} tiene que ser un disco centro estable (son invariantes para iterados pasados) que se salga de la bola de radio r alrededor de x (si r es elegido pequeño). La prueba es medio inductiva, la idea es que si tengo un arco tangente al cono en $B(x,r)$ y que siempre está en B_j entonces su proximo iterado está contenido en la próxima bola. Por lo tanto, sea γ_n un arco centro estable que contiene $f^n(x)$ y que se sale de B_n, entonces $cc_x(f^{-n}(\gamma_n) \cap B(x,r)) = D_n$ es un arco que se sale de $B(x,r)$. Ahora, considerando D_n, por la dominación son uniformemente equicontinuos, y por lo tanto convergen a un arco límite que evidentemente va a ser estable.

Notar que no necesariamente se tiene que $f^{-j}(\gamma_n)$ se salga de B_{n-j} (como dice en [AB3]).

A.1. Herraduras y otras consecuencias de los exponentes positivos. Antes que nada, vamos a retomar un poco algo de la sección pasada. En general, si tenemos un difeomorfismo $f : M \to M$ de una superficie compacta que deja invariante una medida ergódica μ con exponentes $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, podemos considerar, por el Teorema de Oseledets, que para casi todo punto $x \in M$ se cumple que tenemos direcciones invariantes $T_xM = E_1(x) \oplus E_2(x)$ asociadas a cada uno de los exponentes. Notaremos $\Lambda = sop(\mu)$.

Antes de proseguir, observamos que las hipotesis en las que nos encontramos son suficientes (más que suficientes de hecho) para trabajar exactamente la misma prueba que en el caso $C^{1+\alpha}$ haciendo un sombreado de funciones de $\mathbb{R}^2$ y proyectarlo (de hecho, tenemos que las cartas las podemos considerar subexponenciales como mínimo gracias a la dominación). Sin embargo, intentaremos dar una prueba alternativa, que parece un tanto más directa (por el hecho de no pasar por las sucesiones de funciones).

Entonces, tenemos que para casi todo punto $x \in \Lambda$ tenemos las funciones

$$a^n \in L^1(\mu) \qquad a^n(x) = \|D_x f^n_{/E_1(x)}\| = \prod_{j=0}^{n-1} \|D_{f^j(x)} f_{/E_1(f^j(x))}\| = a^1(f^{n-1}(x))\dots a^1(x)$$

$$b^n \in L^1(\mu) \qquad b^n(x) = \|D_x f^{-n}_{/E_2(x)}\| = \prod_{j=0}^{n-1} \|D_{f^{-j}(x)} f^{-1}_{/E_2(f^j(x))}\| = b^1(f^{n-1}(x))\dots b^1(x)$$

Como en la sección anterior, podemos definir los *Bloques de Pesin*[10]

$$BL^s(\ell,f) = \{x \in \Lambda \ : \ \log a^{n\ell}(x) \le -n\}$$
$$BL^u(\ell,f) = \{x \in \Lambda \ : \ \log b^{n\ell}(x) \le -n\}$$

[9] Es importante notar esto, este es un argumento super general y muestra que el problema de no usar $C^{1+\alpha}$ es no tener la subexponencialidad de las coordenadas, ya que si hay variedades estables, necesariamente son subexponenciales.

[10] Esta definición viene de [AB3] donde dice que no es la misma que en la literatura. No puedo yo afirmar esto, ni decir cual es la de la literatura, pero evidentemente la idea es la misma, bloques donde hay una cierta uniformidad.

Es sencillo ver que el hecho que $\frac{1}{n}\log a^{n\ell}(x) \to \ell\lambda_1 < -1$ (con $\ell > \ell_0$ suficientemente grande) y dado que eso implica que fijado $x \in \Lambda$ (genérico) y $\varepsilon > 0$ tenemos que existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ tenemos que $\log a^n(x) \leq n\lambda_1 + n\varepsilon$, sabemos que (usando que $\log a^{n+m}(x) = \log a^n(f^m(x)) + \log a^m(x)$) existe $\ell > \ell_0$ tal que $x \in BL^s(\ell, f)$.

Por lo tanto, obtenemos que

$$\Lambda = \bigcup_{\ell>0} BL^s(\ell, f) = \bigcup_{\ell>0} BL^u(\ell, f) \quad (mod\ 0)$$

Para mejorar un poco la definición de estos objetos (ya que solo podemos decir que un punto pertenece o no a $BL^s(\ell, f)$ si es un punto genérico para la medida, que tenga bien definidos los espacios de Oseledets), diremos que $x \in BL^s(\ell, f)$ si existe un subespacio $E \subset T_xM$ tal que $\log \|D_x f^{n\ell}_{/E}\| \leq -n$ para todo $n > 0$ (análoga definición para $BL^u(\ell, f)$).

Proposición A.1. *Para todo $\ell > 0$, tenemos que $BL^s(\ell, f)$ es un conjunto compacto y que E_1 varia continuamente allí.*

Demostración.De hecho, casi que probaremos primero la segunda afirmación para deducir la primera. Sea $\{x_n\} \subset BL^s(\ell, f)$ una sucesión que suponemos verifica $x_n \to x$. Queremos ver que $x \in BL^s(\ell, f)$ y para eso probaremos que $E(x_n)$ tiende a un subespacio $E(x)$ donde se verifica lo deseado.

Para ello, consideramos una subsucesión x_{n_j} tal que $E(x_{n_j})$ converja a un subespacio $E(x)$.

Se verifica, por continuidad de Df, que fijado $n > 0$ tenemos que

$$\log \|D_x f^{n\ell}_{/E(x)}\| \leq -n$$

Esto muestra que $BL^s(\ell, f)$ es un conjunto compacto. Ahora, tenemos que probar que E está bien definido.

Para ello, si suponemos que existe $F \neq E$ en T_xM que verifica lo mismo, podemos ver sin problema que eso implica (módulo en una de esas cambiar ℓ, no estoy seguro, pero por las dudas) que para todo $n > 0$

$$\log \|D_x f^{n\ell}\| \leq -n$$

Ahora, esto implica que (por el Lema de Pliss, incluso se puede probar más facilmente este enunciado)[11] existen infinitos iterados $f^{n_k}(x)$ de x tales que para todo $n > 0$ se tiene

$$\log \|D_{f^{n_k}(x)} f^{n\ell}\| \leq -\frac{n}{2}$$

Esto nos da un radio uniforme alrededor de cada uno de estos iterados donde tenemos contracción uniforme y por un tema de que el area de la variedad es finita, obtenemos necesariamente un solapamiento entre estas "variedades estables". Esto implica que x está en la cuenca de un pozo y por otro lado, esto implica que la medida estaba soportada en un pozo, lo cual es absurdo.

□

Observación 3. La prueba de arriba casi que alcanza a probar el enunciado siguiente: Si existe $x \in sop(\mu)$ tal que el diferencial contrae en todos los iterados (o un iterado del diferencial) entonces, μ está soportada en un pozo. Lo que falla en principio es que la norma del producto y el producto de las normas no es lo mismo. Esto creo que lo salvamos arriba, pero habría que mirarlo. Nota: si es cierto que si los dos exponentes son negativos, entonces μ está soportada en un pozo, esto se puede probar con una técnica similar a la del Lema 4.7 de [AB3] (que probamos la sección pasada, notar que allí no se explota el hecho que E es unidimensional) o bien con la técnica del Lemma 8.4 de [ABC].

[11] Notar que en realidad es un poco delicado, porque al ser de dimensión dos, no es cierto que la norma del producto sea igual al producto de la norma, pero el hecho que tenemos a priori esas dos direcciones donde contrae en todos los iterados por Df^ℓ nos permite aplicar Pliss a cada una y deducir lo que queremos.

◊

Ahora, vamos a utilizar el hecho que la intersección de dos conjuntos de medida $1-\varepsilon/2$ tiene medida por lo menos $1-\varepsilon$. Sea entonces, fijado ε un ℓ suficientemente grande tal que los conjuntos $BL^s(\ell, f)$ y $BL^u(\ell, f)$ midan más que $1-\varepsilon/2$. Definimos entonces, para dicho ℓ el conjunto $\Lambda_\varepsilon = BL^s(\ell, f) \cap BL^u(\ell, f)$ que verifica que $\mu(\Lambda_\varepsilon) > 1-\varepsilon$.

Considerando de repente ℓ más grande y intersectando con otro conjunto de medida arbitrariamente grande, obtenemos que podemos considerar que todo punto en Λ_ε tiene variedad estable e inestable local de longitud al menos $r > 0$ (no se si es necesario restringir Λ_ε, pero es cierto que lo podemos restringir para que valga).

Volvemos entonces a suponer que hay una descomposición dominada en Λ de tipo $T_\Lambda M = E \oplus F$.

Podemos considerar conos invariantes C^E y C^F suficientemente angostos alrededor de estas direcciones que verifiquen $D_x f C^F_x \subset C^F_{f(x)}$ y $D_x f^{-1} C^E_x \subset C^E_{f^{-1}(x)}$. Estos conos pueden ser extendidos (ya que varian continuamente) a un pequeño entorno V de Λ manteniendo la propiedad de arriba. Esto permite poner alrededor de cada punto de Λ_ε una cajita hecha por curvas tangentes a estos conos (y que en los puntos de Λ_ε coinciden con las variedades estables e inestables.

Si consideramos entonces un punto x tal que x y $f^n(x)$ pertenecen a Λ_ε obtenemos entonces un punto periódico hiperbólico que sombrea ese pedazo de órbita y a partir de ello (por el hecho que se les puede encontrar variedades estables e inestables grandes a la órbita periódica) construir herraduras como deseabamos.

Referencias

[ABC] F. Abdenur, C. Bonatti y S. Crovisier, Nonuniform hyperbolicity for C^1-generic dynamics, *Israel J. of Math.* (2010).

[AB] A. Avila y J. Bochi, TRIESTE LECTURE NOTES ON LYAPUNOV EXPONENTS PART I, (2008) disponibles en http://www.mat.puc-rio.br/ jairo/.

[AB2] A. Avila y J. Bochi, On the subadditive ergodic theorem, Notas disponibles en http://www.mat.puc-rio.br/ jairo/.

[AB3] A. Avila y J. Bochi, Nonuniform hyperbolicity, global dominated splittings and generic properties of volume preserving diffeomorphisms, *Preprint, arXiv* (2009).

[BCL] F. Beguin, S. Crovisier y F. Le Roux, Construction of curious minimal uniquely ergodic homeomorphisms on manifolds: the Denjoy-Rees technique, *Ann. Sci. ENS.* **40** (2007), 251-308.

[B] J. Buzzi, Katok's theorem on surface diffeomorphisms, (2006) Ecole d'ete Grenoble.

[G] N. Gourmelon, Addapted metrics for dominated splitting, *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* **27** (2007), 1839-1849.

[H] M. Herman, Construction d'un diffeomorphisme minimal d'entropie topologique non nulle, *Ergodic Theory and Dyn. Systems* **1** (1981) 65-76.

[HPS] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, Invariant Manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).

[KH] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press (1995).

[K] A. Katok, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms, *Publ. Math. IHES* **51** (1980) 137–173.

[M] R. Mañe, Teoria Ergódica,*Projeto Euclides, CNPq IMPA* (1983).

[Mis] M. Misiurewicz, Horseshoes for continuous mappings of the interval, *Dynamical Systems* (Bressanone, 1978). pp. 125–135.

[PS] E.R. Pujals y M. Sambarino, A suficient condition for robustly minimal foliations, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **26** (2006) 281-289.

[R] M. Rees, A minimal positive entropy homeomorphism of the 2-torus, *J. London Math Soc.* **23** (1981) 537–550.

[Rud] W.Rudin, *Real and Complex Analisis*.

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay

E-mail address: `rpotrie@cmat.edu.uy`