CLASES HOMOCLINICAS GENERICAS CON INTERIOR

RAFAEL POTRIE

23 de Junio de 2008

RESUMEN. La idea de estas notas es dar un resumen de lo que es mi tesis de maestria ([Pot]) y el trabajo que hicimos junto a Martin ([PotS]), la falta de tildes se debe a pereza no a burrez (algunos al menos), el resto de las faltas de ortografia no tengo excusa...

1. Introducción

El problema central de mi tesis de maestria es el siguiente:

Conjetura 1 ([ABD])**.** *Si el conjunto no errante de un difeomorfismo generico tiene interior, entonces, es toda la variedad.*

Este problema se enmarca en un area de los sistemas dinamicos llamada dinamica generica que se interesa en estudiar propiedades dinamicas satisfechas por un conjunto "grande" de difeomorfismos. El concepto de "grande", si bien arbitrario, tiene cierto sentido. La idea es estudiar conjuntos grandes en el sentido topologico (abiertos, residuales, etc) para las topologias C^r en el espacio de los difeomorfismos.

El interes que le encuentro a este problema que vamos a estudiar es que a mi gusto deja en evidencia lo poco que se sabe al respecto. En las notas veremos algunas formas de atacar el problema y en particular tratare de exponer las ideas de la prueba la conjetura en la topologia C^1 y con algunas propiedades (bastante restrictivas, si la dimension de la variedad es grande) en la dinamica de la aplicacion tangente, que en particular prueban el resultado en el caso de dimension 2 (ya conocido, demostrado en [ABCD]) y en el caso de dimension 3 lejos de tangencias.

2. Dinamica generica, el ergodic closing lemma de Mañe

Mas que entrar en contar propiedades genericas conocidas para difeomorfismos (varias de las cuales se pueden encontrar en [BDV], y otras que utilizaremos en [Pot]) voy a aprovechar esta seccion para contar la prueba de un resultado de Mañe que a mi gusto fue el que encendio el estudio de la dinamica generica ([M]). El motivo no es solo que me guste el resultado sino que las ideas que en su prueba aparecen son el centro de lo que quiero contar en estas notas.

Teorema 1 (Corollary II de [M])**.** *Existe un residual $\mathcal{R}$ de $Diff^1(M^2)$ de forma tal que si $f \in \mathcal{R}$ entonces, o bien f es Axioma A, o bien el cardinal del conjunto de pozos y fuentes es infinito.*

Esbozo Basta probar que si $\mathcal{O}$ es la clausura del conjunto de difeos con infinitos pozos y/o fuentes, entonces los Axioma A son densos en el complemento de $\mathcal{O}$. Esto se debe a que tener infinitos pozos o fuentes es una propiedad G_δ (interseccion numerable de abiertos) con lo cual los que tienen infinitos pozos y fuentes son un residual en $\mathcal{O}$ y dado que los Axioma A son abiertos (o casi, en superficies es facil ver que un Axioma A se puede perturbar a un Axioma A sin ciclos) quedaria probado el teorema.

Paso 1: Como el conjunto de pozos y fuentes varia semicontinuamente al variar el difeo en la topologia C^1, podemos suponer que la cantidad de pozos y de fuentes es constante en un entorno de f. Esto nos permite ver que si probamos que $Per_1(f)$ (periodicos silla) es un conjunto hiperbolico, estamos prontos (hay que usar el closing lemma pa que $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$). Ademas, podemos utilizar el hecho de que no podemos perturbar los periodicos silla para convertirlos en pozos o fuentes.

Paso 2: Este paso es tecnico pero la idea es simple. Primero, utilizando el Lema de Franks (ver [F]) se ve que el angulo entre los subespacios estable e inestable de los puntos silla ha de estar uniformemente alejado de cero, si no fuese asi, una pequeña rotacion permite crear un valor propio 1 y luego un pozo o una fuente. El hecho que los angulos se encuentren alejados de cero implica que hay una descomposicion dominada en el espacio tangente de $\Lambda = \overline{Per_1(f)}$ (si no la hubiese seria posible crear angulos pequeños).

Con esto queremos decir que existe una descomposicion $Df-$invariante $T_\Lambda M = E \oplus F$ del fibrado tangente de M restricto a Λ de forma tal que se cumple que existe $0 < \lambda < 1$ tal que (existe una norma adaptada por [Gou1], es lo mismo, pero simplifica las cuentas)

$$\|Df_x|_E\| \|Df_x^{-1}|_F\| < \lambda \qquad \forall x \in \Lambda$$

Ademas, no es dificil probar que E y F coinciden con los subespacios estables e inestables para los puntos periodicos y ademas se cumple que en estos, se verifica que si $\pi(p)$ es el periodo de $p \in Per(f)$

$$\|Df_p^{\pi(p)}|_E\| < \lambda^{\pi(p)}$$

Si no fuese asi, componiendo con homotecias en cada punto de la orbita se obtiene una fuente. Vale algo analogo para la inestable.

Paso 3: Este paso es escencialmente el mas complicado pues hace uso de un teorema dificil (de probar pero no de enunciar, con lo cual no hay mucho drama) que es el Ergodic Closing Lemma que afirma que existe un conjunto de probabilidad total de puntos que mediante una pequeña perturbacion es posible perturbarlos en puntos periodicos (hasta aca no es diferente al closing lemma usual) con la propiedad que acompañan la orbita del punto sin perturbar hasta cerrarse[1].

Lo que tenemos que hacer entonces para ver que f es Axioma A (ya perturbamos, no es que no sea necesario perturbar, lo hicimos p.ej. para que los periodicos sean densos en el no errante y para que la cantidad de pozos y fuentes sea localmente constante) es probar que los fibrados E y F son efectivamente hiperbolicos.

Supongamos que el fibrado E no es hiperbolico, con lo cual podemos (tomando limite de puntos que demoran cada vez mas en ser "hiperbolicos") encontrar un punto x tal que $\|Df^n|_E\| \geq (1-\varepsilon)^n \ \forall n$ [2]. Un argumento de teoria ergodica permite ver que si se toma limite de las medidas promediadas en la orbita de x obtenemos una medida invariante para la cual, si consideramos su descomposicion ergodica, tenemos puntos de Σ cumpliendo que $\|Df^n|_E\| \geq (1-\varepsilon)^n$ $\forall n$. Ahora, utilizando el ergodic closing lemma obtenemos un punto periodico que no contrae mucho en el periodo contradiciendo lo probado en el Paso 2.

$\square$

Un corolario simple de este teorema es que si un difeomorfismo de una superficie es robustamente transitivo (i.e. tiene un entorno en el cual todos en el entorno son transitivos), entonces, es un difeo de Anosov ya que al no poder ser aproximado por un difeomorfimso con pozos y fuentes es automaticamente Axioma A y por lo tanto, dado que es transitivo, de Anosov (en realidad, tenemos que se puede aproximar por Anosov, pero sin mucha dificultad se puede adaptar).

3. Clases homoclinicas y extensiones del Teorema de Mañe

Es importante observar que si bien las hipotesis que se hacen son de caracter global, los argumentos no lo son. De hecho, son semilocales con esto me refiero a que se pueden hacer en el invariante maximal de algun abierto (que no necesariamente sea toda la variedad) es decir, si sabemos que en un determinado abierto no hay pozos ni fuentes robustamente, entonces, podemos concluir, que al menos mediante perturbaciones, el invariante maximal de dicho abierto sera hiperbolico.

Esta observacion fue hecha en [DPU] ademas de proveer una prueba similar del teorema de la seccion anterior en dimension 3. Lo que se hace es definir la nocion de clase homoclinica

[1]Formalmente, existe Σ de probabilidad total (i.e. mide 1 para cualquier medida invariante) de forma tal que para todo ε y todo $x \in \Sigma$ existe g arbitrariamente cerca de f con un punto periodico p de forma tal que $d(g^i(p), f^i(x)) \leq \varepsilon \ \forall 0 \leq i \leq \pi(p)$.

[2]En realidad se puede suponer que el punto verifica $\|Df^n|_E\| \geq 1 \ \forall n$ pero no lo necesitaremos.

robustamente transitiva como una clase homoclinica H que es localmente maximal incluso luego de perturbaciones [3].

El paso dos tiene que ser mejorado ya que es mentira ahora que los periodicos no puedan cambiar de indice, pero se adapta para probar que igual la clase tiene que admitir algun tipo de descomposicion dominada. En este caso, habra un fibrado unidimensional y a este se le podra aplicar el paso 3 probando la hiperbolicidad de este. Por ende, el resultado es el siguiente: si una clase homoclinica es robustamente transitiva, entonces, es parcialmente hiperbolica.

El resultado fue luego mejorado aun mas en [BDP]. Aqui se prueba la siguiente dicotomia, o bien una clase homoclinica se encuentra contenida en la clausura del conjunto de pozos y fuentes del difeomorfismo, o bien esta admite alguna descomposicion dominada (esta dicotomia no es excluyente). La prueba de esto utiliza ideas similares, pero introduce una idea fundamental (creo que ya presente en [DPU]) que son las transiciones que permiten "mezclar" las derivadas de puntos periodicos diferentes de una clase homoclinica utilizando el hecho de que todos los puntos periodicos de un indice dado se encuentran homoclinicamente relacionados en la clase y por lo tanto hay puntos periodicos que pasan mucho tiempo cerca de uno y dps del otro.

Una consecuencia interesante (ver [BD1, BD2]) es la construccion de clases homoclinicas que con cierta robustez son acumuladas por infinitos pozos y/o fuentes. Basta para eso, construir una clase homoclinica que no admita descomposicion dominada, esto puede ser realizado en dimension 3 si se construye una clase homoclinica que contenga simultaneamente un punto periodico de indice 2 con valor propio estable complejo y uno de indice 1 con valor propio inestable complejo.

El paso 3 tambien puede ser extendido de la siguiente manera. Definimos la descomposicion dominada mas fina $T_HM = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ como la que cumple que ningun fibrado puede ser descompuesto de forma tal que sea invariante. En este caso, los argumentos del paso 3 permiten probar lo siguiente. Genericamente, si la clase homoclinica no intersecta la clausura del conjunto de pozos y/o fuentes, entonces, los fibrados extremales de la descomposicion dominada mas fina son hiperbolicos en volumen (es decir, el mas contractivo cumple que el determinante del diferencial de f restricto a ese fibrado es uniformemente contractivo y analogamente con el menos contractivo). La idea es que si eso no ocurriese se podrian construir pozos y/o fuentes con el metodo del paso 3 de la seccion anterior.

Hay ejemplos mostrando que estos resultados son optimos en algun sentido (ver seccion 7 de [BDV]).

4. Clases homoclinicas con interior

Como dijimos en la introduccion, la idea es ver que no existen.

[3]Es decir, existe U entorno de H y $\mathcal{U}$ entorno de f de forma tal que para todo $g \in \mathcal{U}$ se cumple que $H_g = \bigcap_n g^n(U)$ es una clase homoclinica.

Primero voy a comentar un par de resultados de [ABD] que son interesantes para lo que voy a contar dps.

El primer resultado a mi gusto interesante es que prueban la conjetura si la clase es parcialmente hiperbolica fuerte (es decir $T_HM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ dominada tal que f contrae vectores de E^s uniformemente y f^{-1} hace lo mismo con los vectores de E^u). La prueba va por adaptar un resultado de [DW] que permite probar que si no fuese toda la variedad, la clase se podria "explotar" con pequeñas perturbaciones.

El otro, que utiliza consecuencias de [BC], es que el teorema vale para clases aisladas (muy similar, un poco mas general, que las clases robustamente transitivas).

Sobre el segundo resultado, me gustaria observar que es directo si se sabe que los fibrados extremales son unidimensionales, pues como la clase es aislada, su descomposicion dominada tiene que ser hiperbolica en volumen en estos fibrados, y siendo unidimensionales es lo mismo que ser hiperbolica!!!.

Donde falla la prueba en el caso que no sea aislada? Escencialmente solo en el hecho de que al perturbar el punto periodico que se obtiene no necesariamente tiene porque estar en la clase con lo cual convertirlo en pozo o fuente no significa ninguna contradiccion.

La idea de nuestra prueba es asegurar que al perturbar el punto queda en la clase y para eso utilizaremos otra propiedad probada en [ABD] que nos permitira conseguir asegurar que el punto se encuentra en la clase. Esta propiedad es la estabilidad Lyapunov.

Prueban en [ABD] que una clase homoclinica generica con interior es estable Lyapunov, es decir, para todo U entorno de H existe V tambien entorno de H tal que $f^n(\overline{V}) en U \ \forall n \geq 0$.

5. Clases homoclinicas con interior con fibrados extremales unidimensionales

En esta seccion voy a comentar los resultados obtenidos al respecto con Martin (ver [PotS] y [Pot]). Escencialmente conseguimos, bajo la hipotesis de que la clase tiene interior y su descomposicion dominada mas fina tiene fibrados extremales unidimensionales, aplicar igualmente el argumento de Mañe y probar que esta tiene que ser parcialmente hiperbolica y por ende toda la variedad.

Teorema 2 ([PotS]). *Existe un residual $\mathcal{R}$ de forma tal que para todo $f \in \mathcal{R}$, si H es una clase homoclinica con interior con descomposicion dominada $T_HM = E \oplus F$ y $dimF = 1$ entonces F es hiperbolico.*

Este teorema tiene varias consecuencias que tienen que ver con la conjetura, en particular, la prueba en el caso que M es una superficie (resultado ya conocido, ver [ABCD]) y en dimension 3, por ejemplo, asumiendo que la clase no tienen puntos periodicos con valores propios complejos. Otra consecuencia interesante, probada en [Pot] es la siguiente:

Teorema 3 ([Pot]). *Existe un residual $\mathcal{R} \subset Diff^1(M^3)$ de forma tal que para todo $f \in \mathcal{R}$, si H es una clase homoclinica con interior y lejos de tangencias* [4] *entonces, $H = M$.*

La prueba de este ultimo es un poco mas rebuscada de lo que podria ser pues en [Pot] opte por dar una prueba mas debil del teorema de arriba, pero con menos prerequisitos (en particular evite utilizar el Lema de Liao, ver [L, W]). Lo que se hace en [Pot] es probar que si M tiene dimension 3, para difeomorfismos genericos, si la clase admite una decomposicion dominada en 3 subfibrados entonces la clase ha de ser toda la variedad, esto sin probar como paso intermedio que la clase sea parcialmente hiperbolica (aunque una vez que es toda la variedad se deduce de [DPU]) sino mas bien utilizando argumentos mas "a pedal" con las variedades centro estables.

Esbozo de la prueba del Teorema 2 La idea es la misma que la del teorema de Mañe, lo unico que no podemos asegurar que al perturbar el punto periodico que encontramos este en la clase.

Escencialmente, si el fibrado no fuese hiperbolico, tendriamos un punto recurrente para el cual no hay suficiente hiperbolicidad, esto implica que el otro fibrado es "hiperbolico" en dicha orbita por la descomposicion dominada (esto requiere algunos trucos tecnicos[5] porque no es inmediato, pero si muy intuitivo). Ahora, la idea es que si las variedades que integran el fibrado F tuviesen propiedades dinamicas, entonces podemos conseguir un punto que acompaña la orbita, pero no solo eso, obtendriamos que este punto periodico cumple que su estable corta la inestable de un punto de la clase, la estabilidad Lyapunov entonces implica (que la clase sea estable Lyapunov pa f y f^{-1} implica que es saturada por estables e inestables) que el punto periodico obtenido esta en la clase y esto da la misma contradiccion que en el Teorema de Mañe.

Acabamos entonces de dar una idea de porque entonces es importante obtener propiedades dinamicas para las variedades que integran F y es justamente aqui que usamos el hecho de que sean unidimensionales para aplicar los resultados de [PS, LS].

En [LS], se prueba que, genericamente, una clase homoclinica con una descomposicion dominada de codimension uno, cumple que las variedades centrales localmente invariantes (dadas por [HPS]) tienen una cierta propiedad dinamica. Formalmente, prueban que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma tal que la variedad centro $W^{cu}_{\delta}(x)$ verifica que $f^{-n}(W^{cu}_{\delta}(x)) \subset W^{cu}_{\varepsilon}(f^{-n}(x))$. Si bien esto es una propiedad dinamica, esta no va a ser suficiente para nuestros propositos, de hecho, vamos a tener que conseguir una propiedad dinamica mas fuerte (necesitamos que los puntos sean asintoticos, no que se mantengan cercanos), que en general no se tiene porque cumplir para clases homoclinicas genericas, pero veremos que si se ha de cumplir en el caso que la clase tenga interior no vacio.

[4] No se puede perturbar f de forma tal que el difeo resultante tenga una tangencia en H.

[5] Por ejemplo el Lema de Liao [L, W]

Primero veamos que los puntos periodicos de la clase han de tener variedades inestables de tamaño uniforme. Si no fuese asi, deberian terminarse arbitrariamente cerca de algunos puntos periodicos. Pero utilizando el resultado de [LS] obtendriamos pozos que sombrean arbitrariamente cerca sillas de la clase, con lo cual podemos deducir que el valor propio en el periodo de estas sillas esta arbitrariamente cerca de 1. Es facil probar que esto no puede ser para una clase con interior ya que si existiera un punto periodico con dicha propiedad, no es dificil ver que tambien se podria encontrar uno en el interior de la clase (que es de alguna manera persistente para difeos genericos)[6] con la misma propiedad. Esto se obtiene observando que en el interior "robusto" tenes un punto periodico homoclincamente relacionado con el tuyo, y estos dos van a pertencer a un conjunto hiperbolico. Ahora, utilizando el shadowing lemma obtenes un punto periodico en la clase que se pasa por el interior y al mismo tiempo acompaña al punto periodico que no es muy hiperbolico en el periodo por un tiempo arbitrariamente largo en relacion a su periodo. A este, mediante el lema de Franks lo podemos convertir en un pozo en el interior persistente, una contradiccion.

Una vez obtenido el resultado de que los puntos periodicos tienen variedades inestables largas en la clase, esta propiedad se puede trasladar a todos los puntos de esta. Para eso, supongamos que hay puntos para los cuales la variedad centro inestable no tiene un tamaño uniforme que se comporta como inestable. Esto implica que dichos puntos no van a contraer mucho al pasado en la direccion F con lo cual si van a contraer en la direccion E y tendran variedades estables de buen tamaño. Los resultados de [HPS] junto con el connecting lemma para pseudo-orbitas de [BC] permiten entonces llegar a un absurdo (o bien se encuentra un conjunto atractor dentro de la clase, o un punto periodico que no tiene variedad inestable larga).

□

Esbozo de la prueba del Teorema 3 En dimension 3 la descomposicion dominada $T_H M = E \oplus F$ tiene que tener al menos un fibrado unidimensional. Asumiremos que es F.

En la clase puede haber puntos de indice 1 e indice 2. Asumamos primero que hay puntos de indice 1, entonces, un resultado reciente de Gourmelon ([Gou2], ver tambien [ABCDW]) asegura que si el fibrado E no se descompone en dos subfibrados, entonces se puede aproximar el difeo por uno que tenga tangencias en H. Esto prueba que el teorema vale si hay puntos de indice 1.

Asumamos ahora que no los hay. Es facil ver que podemos asumir que no los hay de forma robusta. En este caso probaremos que la clase tiene que ser hiperbolica (de nuevo tenemos la misma dificultad para aplicar el resultado de Mañe). Lo que vamos a hacer es utilizar una

[6] La idea es asi, te tomas los difeos para los cuales un abierto no esta contenido en la clase homoclinica y el complemento de la clausura de esos. Te fijas ahora dentro de los cuales la clase varia continuamente, y un abierto ahi metido. Lo cubris por abiertos de una base numerable y es facil ver que eso implica que el abierto se mantiene en el interior de la clase (son argumentos clasicos).

idea de [M2], adaptada en [PPV] para el caso en que no tenes que F sea uniformemente hiperbolico, pero si que tiene variedades que lo integran de tamaño uniforme. La idea es que si no fuese hiperbolico el fibrado E, entonces se puede obtener un punto periodico con muy mala contraccion en E que esta en la clase homoclinica. Aca hay que usar argumentos similares a los del teorema anterior. Una cosa diferente (en las cuestiones tecnicas) es el uso del Lema de Pliss (ver [W] o el segundo apendice de [Pot]).

□

Referencias

[ABCD] F.Abdenur , C. Bonatti, S. Crovisier and L.Diaz, Generic diffeomorphisms on compact surfaces. *Fund. Math.* **187** (2005), 127–159.

[ABCDW] F.Abdenur , C. Bonatti, S. Crovisier , L.Diaz and L.Wen, Periodic points and homoclinic classes. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **27** (2007), 1-22.

[ABD] F. Abdenur, C. Bonatti and L.Diaz, Nonwandering sets with non empy interior, *Nonlinearity* **17** (2004), 175–191.

[BC] C. Bonatti and S. Crovisier, Recurrence et Generite, *Inventiones Math.* **158** (2004), 33–104.

[BD1] C. Bonatti, L.J. Diaz, Connexions hétérocliniques et généricite d'une infinité de puits ou de sources, *Annales Scientifiques de l'École Normal Supérieure de Paris*, 32 (4), 135-150, (1999)

[BD2] C. Bonatti, L.J. Diaz, On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms, *Publications Mathématiques I.H.E.S.*, **96**, 171-197, (2002).

[BDP] C. Bonatti, L.J. Diaz y E. Pujals, A C^1-generic dichotomy for diffeomorphisms: Weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources, *Annals of Mathematics*, **158**(2), 355-418, (2003).

[BDV] C. Bonatti, L.J. Díaz and M. Viana, Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, *Springer-Verlag* (2005).

[DPU] L.J. Diaz, E. Pujals y R. Ures, Partial hyperbolicity and robust transitivity, *Acta Mathematica*, **183**, 1-43, (1999).

[DW] D.Dolgopyat y A. Wilkinson, Stable accesibility is C^1 dense, *Asterisque* (2003)

[F] J. Franks, Nessesary conditions for stability of diffeomorphisms, *Transactions of the A.M.S.* **158**, 301-308 (1971).

[Gou1] N. Gourmelon, Addapted metrics for dominated splitting, *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* **27** (2007), 1839-1849.

[Gou2] N. Gourmelon, Generation of homoclinic tangencies by C^1 perturbations. *Prepublications del Institute Math. de Bourgogne* 502 (2007).

[HPS] M. Hirsch,C. Pugh and M. Shub, Invariant Manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).

[LS] P. Lessa and M.Sambarino, Invariant Manifolds for codimension one dominated splitting. Preprint.

[L] S. Liao, On the stability conjecture, *Chinese Annals of Math.* **1** (1980), 9-30.

[M] R. Mañe, An ergodic closing lemma, *Annals of Math.* (1982)

[M2] R. Mañe, A proof of the C^1 stability conjecture, *Publications del IHES*(1987)

[Pot] R. Potrie, Clases homoclinicas genéricas con interior. Tesis de Maestría, PEDECIBA (2008)

[PotS] R. Potrie y M. Sambarino, Codimension one generic homoclinic classes with interior, *Preprint* PreMat 103/08

[PPV] M.J. Pacifico, E. Pujals y J. Vieitez, Robustly expansive homoclinic classes, *Ergodic Theory and Dyn. Syst* (2004)

[PS] E.R. Pujals and M. Sambarino, Integrability on codimension one dominated splitting, *Bull. Braz. Math. Soc., N.S.* **38** (2007) 1-19.

[W] L. Wen, The selecting lemma of Liao, *Disc.and Cont. Dyn. Sys.* **20** (2008) 159-175.