EXISTENCIA DE INTERSECCIONES HOMOCLÍNICAS NO TRIVIALES LEJOS DE LOS MORSE-SMALE

RAFAEL POTRIE

RESUMEN. La idea es presentar el paper [C2] donde se prueba, en topología C^1, la conjetura débil de Palis que asegura que el conjunto de difeomorfismos Morse-Smale junto con el conjunto de difeomorfismos que presentan una intersección homoclínica transversal es abierto y denso en el conjunto de todos los difeomorfismos.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

No voy a incluir mucha motivacion acerca de los resultados que se presentarán, vale la pena leer el primer capítulo de [Less] (el resto también) donde se motivan muy bien estos resultados en superficies (ni hablar que vale la pena leer también las introducciones de [PS, C2]).

La idea es estudiar el espacio $Diff^1(M)$ donde M es una variedad compacta sin borde y este espacio de difeomorfismos se dota de la topología C^1, es decir, dos difeomorfismos estan cerca si lo estan como mapas entre espacios métricos con la topología uniforme y al mismo tiempo sus derivadas se encuentran cercanas (lo mejor es pensarlo en variedades encajadas donde todo es mas fácil de definir porque no hay problema de comparar las derivadas por mas que vayan a puntos diferentes).

---

rpotrie@cmat.edu.uy; Primera versión, sin corregir. 3/12/2008, estoy intentando corregir ortografía e inclui algunas sugerencias del Rata a quien agradezco.

Palis propuso como primer paso buscar un fenomeno responsable de la complejidad en los sistemas caóticos. Primero hay que acordar que es un sistema caótico, o complejo, para eso, se define que es un sistema simple y se utiliza para eso los difeomorfismos conocidos como de Morse-Smale (su conjunto no errante consiste de finitos puntos periodicos hiperbólicos cuyas variedades invariantes se intersectan de forma transversal) que son conocidos por su simpleza, en particular, son estructuralmente estables, tienen entropía nula y todo punto tiene una órbita periódica como omega límite. La conjetura débil de Palis afirma que lejos de los difeomorfismos de Morse-Smale la dinámica es compleja, y lo expresa conjeturando que hay un abierto y denso de difeomorfismos en el complemento de la clausura de los difeomorfismos Morse-Smale para los cuales existe un corte homoclínico transversal que es sabido implica entropía positiva y existencia de herraduras (shifts).

En resumen, si $\mathcal{MS} = \{f \in Diff^1 \ : \ f \ es \ Morse-Smale\}$ y $\mathcal{I} = \{f \in Diff^1 \ : \ f \ tiene \ herradura\}$ la conjetura débil de Palis afirma que $Diff^1 = \overline{\mathcal{MS} \cup \mathcal{I}}$.

En particular, vale la pena compararlo con un resultado de Katok que dice que un difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ con entropía positiva en una superficie tiene una herradura, lo cual soporta un principio (trucho) que seria: *Un difeo C^1-genérico se puede tratar como un difeo $C^{1+\alpha}$*, este principio también esta soportado en el trabajo [ABC].

Este resultado fue probado en [PS] para difeomorfismos de superficies (donde en realidad se prueba la conjetura fuerte de Palis en la cual no me voy a meter) y recientemente fue probado en general en [C2] (en [BGW] fue probada en dimensión 3).

El factor común en todas las pruebas es trabajar en $Diff^1 \backslash \overline{\mathcal{MS} \cup \mathcal{I}}$. Allí se encuentra algún tipo de hiperbolicidad (débil) y luego utilizar dinámica unidimensional en las variedades que no se sabe sean uniformemente contraidas o expandidas para lograr las intersecciones (este parrafo fue super vago, pero va a quedar claro mas adelante).

Vamos a presentar la prueba de [C2] y esta se divide en 2 etapas (las definiciones quedan para la siguiente sección):

Teorema 1.1. *Existe $\mathcal{G}_A$, residual de $Diff^1 \backslash \overline{\mathcal{MS} \cup \mathcal{I}}$ tal que $\forall f \in \mathcal{G}_A$ existe un conjunto K_0 minimal no periódico parcialmente hiperbólico con fibrado central de dimensión uno.*

Teorema 1.2. *Existe $\mathcal{G}_B$, residual en $Diff^1$ tal que $\forall f \in \mathcal{G}_B$ y K_0 minimal no periódico parcialmente hiperbólico con central de dimensión uno se cumple que existe una clase homoclínica no trivial.*

Vale la pena observar que el Teorema 1.1 ya era conocido (ver [W2]) pero vamos igual a dar una prueba basada en [C3]. En el Teorema 1.2 con los mismos argumentos se puede probar un enunciado mas general, por ejemplo permitiendo que K_0 sea transitivo por cadenas (no periodico) y obteniendo que el conjunto es límite Haussdorff de clases homoclínicas relativas no triviales (nosotros nos abstendremos a lo necesario para los fines de esta nota) y de hecho es germen de los resultados en [C3] que se utilizan para probar la conjetura fuerte de Palis en cualquier dimensión (es un trabajo en curso entre Sylvain Crovisier y Enrique Pujals).

2. Definiciones y resultados previos

En esta sección la idea es introducir los conceptos utilizados en los enunciados de los dos teoremas que probaremos y algunos ingredientes que aparecerán en la prueba de estos. En particular introducir el concepto de hiperbolicidad parcial (y descomposición dominada que también será utilizado) y contar un poco sobre dinámica genérica que aparece en ambos teoremas y en particular sobre clases de recurrencia y conjuntos transitivos por cadenas.

En mi opinión es recomendable saltear esta sección a no ser que no se conozca nada sobre estos temas, en ese caso, una vez leida esta sección recomiendo releer la primera para no perder la línea con la demostración de los resultados principales.

2.1. Formas debiles de hiperbolicidad. Como referencia para estos temas, vale la pena leer el Apéndice B de [BDV].

Decimos que un compacto invariante Λ admite descomposición $N-$dominada si $T_\Lambda M = E \oplus F$ es una descomposición Df invariante que verifica que para cualquier par de vectores unitarios $v_E \in E$ y $v_F \in F$ se cumple

$$2\|Df^N v_E\| < \|Df^N v_F\|$$

El índice de la descomposición es la dimensión del fibrado E.

Esto permite dar una descomposición en más fibrados generalizando la definición de forma muy natural, decimos que $T_\Lambda M = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$ es $N-$dominada si dados $v_i \in E_i$ y $v_j \in E_j$ vectores unitarios con $i < j$ tenemos

$$2\|Df^N v_i\| < \|Df^N v_j\|$$

En particular, se cumple que $\left(\bigoplus_{i=1}^k E_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=k+1}^m E_j\right)$ es una descomposición dominada (de hecho eso también sirve como definición).

Un fibrado invariante E es uniformemente contraido (expandido) si se cumple que existe $N > 0$ ($N < 0$) tal que para todo vector unitario v_E se verifica que $2\|Df^N v_E\| < 1$.

Una descomposición en tres fibrados $T_\Lambda M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ (posiblemente triviales, con la restricción de que o E^s o E^u sea no trivial) es parcialmente hiperbólica si se cumple que es $N-$dominada, el fibrado E^s es uniformemente contraido y el fibrado E^u uniformemente expandido. Cuando el fibrado central es trivial, diremos que la descomposición es hiperbólica a secas (definición usual).

En el caso de los fibrados uniformes, es conocido que los fibrados se integran dando lugar a foliaciones (o mejor dicho laminaciones) estables y/o inestables de tamaño uniforme que de alguna manera traducen a la variedad las propiedades de la aplicación tangente, en el caso de los fibrados centrales (no uniformes) hay resultados pero no tan potentes, y estos los veremos cuando comencemos con la prueba del Teorema 1.2 (la referencia clásica de todo esto es [HPS]).

2.2. Dinámica genérica. Como se ve en los enunciados de los teoremas, otro ingrediente importante va a ser la dinámica genérica, es decir, el estudio de propiedades que son satisfechas por difeomorfismos que pertenecen a conjuntos residuales de difeomorfismos (intersecciones numerables de abiertos y densos). Una buena referencia a los temas de dinámica genérica es [BDV] (capítulo 10).

En principio, los resultados de dinámica genérica que usaremos no son muchos, en particular, utilizaremos que existe un conjunto residual $\mathcal{KS}$ de $Diff^1$ que verifica que $\forall f \in \mathcal{KS}$ se cumple que todos los puntos periódicos de f son hiperbólicos, y sus variedades invariantes se intersectan de forma tranversal (esto obviamente incluye el caso en que no se intersectan). En particular, un difeomorfismo Kupka-Smale (en $\mathcal{KS}$) cuyo conjunto no errante es finito, es Morse-Smale.

Lo otro que utilizaremos es lo motivado por [BC]. Definimos la siguiente relación entre puntos de M que es que "se puede ir por $\varepsilon-$pseudo órbitas de x a y" como:

$$x \dashv_\varepsilon^f y \;\Leftrightarrow\; \exists x = x_0, \ldots x_n = y \; n \geq 1 \;;\; d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

Usualmente omitiremos la referencia a f. Diremos que $x \dashv y$ sii $\forall \varepsilon > 0 \; x \dashv_\varepsilon y$.

Diremos que un conjunto Λ es transitivo por cadenas si $\forall x, y \in \Lambda$, se tiene $x \dashv y$.

Si denotamos como $\mathcal{R}(f) = \{x \ : \ x \dashv x\}$ al conjunto recurrente por cadenas podemos definir las clases de recurrencia como las clases de equivalencia de la relación $x \vdash\dashv y \Leftrightarrow x \dashv y,\ y \dashv x$ (observar que en el conjunto $\mathcal{R}(f)$ la relación es idéntica, la simetría y transitividad son inmediatas).

Lo interesante de esta relación, es que gracias a un famoso teorema de Conley (llamado a veces Teorema fundamental de los sistemas dinámicos, cuya prueba es bien simple y bonita, se puede encontrar en español en [S]) se tiene que para todo homeomorfismo en un espacio métrico X se cumple que existe una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ que verifica que:

- $\varphi(f(x)) \leq \varphi(x)$ y la igualdad se cumple si y solo si $x \in \mathcal{R}(f)$.
- φ asigna valores diferentes a clases de recurrencia diferentes.
- La imagen por φ del conjunto recurrente por cadenas es un cerrado con interior vacío.

Por lo tanto, se tiene una buena comprensión de la dinámica fuera del recurrente por cadenas. Lamentablemente, en general, el conjunto recurrente por cadenas no tiene propiedades interesantes dinámicamente (p.ej, pueden haber transitivos disjuntos en la misma clase de recurrencia). Sin embargo, en la topología C^1 gracias a un resultado reciente de Bonatti y Crovisier, este conjunto ha tomado una gran importancia:

Antes damos una definición, $H(p, f)$ denota la *clase homoclínica* de p, es decir $\overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}$ (en el caso genérico, por ser un difeomorfismo genérico, es Kupka-Smale, entonces se tiene que $H(p, f) = \overline{W^s(p) \cap W^u(p)}$). Muchas veces omitiremos la referencia al difeomorfismo por suponer queda claro en el contexto.

Teorema 2.1 ([BC]). *Existe un residual $\mathcal{G}_{rec}$ de $Diff^1$ tal que para todo $f \in \mathcal{G}_{rec}$ se cumple que $\mathcal{R}(f) = \overline{Per(f)}$. Además, si una clase de recurrencia $\mathcal{C}$ contiene un punto periódico p, entonces $\mathcal{C} = H(p, f)$.*[1]

Observacion 2.1. Una consecuencia que utilizaremos es la siguiente, y que tiene que ver con nuestro objetivo de forma muy clara. Si tenemos una clase de recurrencia (para un difeomorfismo genérico) que contiene un punto periódico y además un punto que no esta en su órbita, entonces, existe una clase homoclínica no trivial, en particular, un corte homoclínico transversal y $f \in \mathcal{I}$.

$\diamondsuit$

Otro resultado vinculado, que de alguna manera refuerza el anterior y da un resultado también interesante por si mismo es el siguiente Shadowing Lemma débil de Croviser para difeomorfismos genéricos (la versión de [C1] es mas fuerte, pero utilizaremos la que enunciamos, este resultado sera utilizado recién en la prueba del Teorema 1.2):

Teorema 2.2 ([C1]). *Existe un residual $\mathcal{G}_{shadow}$ de $Diff^1$ de forma tal que si $f \in \mathcal{G}_{shadow}$ y K es un conjunto transitivo por cadenas, entonces K es acumulado en la topología de Haussdorff por órbitas periódicas.*

[1] Este teorema es consecuencia del connecting lemma para pseudo-órbitas de [BC], la segunda afirmación requiere de argumentos no triviales (que tiene que ver con [CMP]). Los esbozo por ser tan relevante para nuestros propositos: El connecting lemma para pseudo órbitas implica que las clases de recurrencia son iguales genéricamente a los conjuntos débilmente transitivos maximales (clases de equivalencia de la relación generada en el no errante por $x \prec y \Leftrightarrow \forall U$ entorno de x y V de y, $\exists n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ que por el connecting lemma para pseudo órbitas coincide genéricamente con la relación antes expuesta). Al mismo tiempo, en [CMP] se prueba que las clases homoclínicas genéricas son débilmente transitivos maximales. Esto se hace de la siguiente manera, primero, utilizando el connecting lemma de Hayashi, se prueba que, genéricamente, para todo punto periódico, el conjunto $\overline{W^u(p)}$ (resp. $\overline{W^s(p)}$) es estable Lyapunov para f (resp. f^{-1}). Esto (independientemente del significado de estabilidad lyapunov) implica que estos conjuntos contienen todo transitivo que intersectan, al mismo tiempo, utilizando la variación continua de las clases homoclínicas y de estos conjuntos (en un residual), nuevamente utilizando el connecting lemma, es fácil probar que la clase homoclínica de un punto es $\overline{W^s(p)} \cap \overline{W^u(p)}$ lo cual implica que estas son débilmente transitivos maximales.

La topología de Haussdorff dada por

$$d_H(A,B) = \text{máx}\{\inf_{x\in A}\{d(x,B)\}, \inf_{x\in B}\{d(x,A)\}\}$$

3. Demostración del Teorema 1.1

3.1. Teorema de Wen y su versión para medidas ergódicas. Estamos buscando alguna forma de hiperbolicidad, entonces, arranquemos por la descomposición dominada. Para ello, busquemos primero propiedades satisfechas por difeomorfimos lejos de tangencias[2] (esta idea apareció en [PS] y luego fue generalizada en [W1]). La idea es que si no hay dominación entre el espacio estable e inestable de un punto periódico entonces es posible mediante una pequeña perturbación crear una tangencia homoclínica.

Es decir, si consideramos un difeomorfismo que no se puede aproximar por uno con tangencias, y el conjunto $\Lambda_i = \overline{Per_i(f)}$ donde Per_i denota el conjunto de puntos periódicos de índice i (el índice de un punto periódico es la dimensión de su espacio estable) se cumplirá (y así lo enuncia Wen en [W1]) que existirá N y $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$2\|Df^N v_s\| < \|Df^N v_u\| \qquad \forall v_s \in E^s(p)\ v_u \in E^u(p) \quad p \in Per_i$$

y por lo tanto una descomposición dominada de índice i, $T_{\Lambda_i}M = E \oplus F$.

Sea $Tang = \{f \in Diff^1 \ : \ \exists p \in Per(f) \ con \ W^s(p) \ tangente \ a \ W^u(p) \ en \ un \ punto\}$, entonces, tendremos la siguiente versión uniforme del Teorema de Wen (sacada de [W2]). Dado un punto periódico p, denotamos su período como $\pi(p)$.

Teorema 3.1 (Wen)**.** *$f \in Diff^1\backslash\overline{Tang}$. Entonces, existe $\mathcal{U}$ entorno de f, enteros N y m, constantes $\delta_0, C > 0$ y $\lambda > 1$ tales que $\forall g \in \mathcal{U}$ y p punto periódico de g se cumple que si $T_pM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ es la decomposición de T_pM en los valores propios de $Df_p^{\pi(p)}$ en los intervalos $(-\infty, -\delta_0)$, $[-\delta_0, \delta_0]$ y $(\delta_0, +\infty)$ respectivamente, entonces:*

- *E^c tiene dimensión ≤ 1.*
- *$E^s \oplus E^c \oplus E^u$ es $N-$dominada.*
- $$\prod_{i=0}^{\frac{\pi(p)}{m}-1} \|Df^m_{/E^s(f^{im}(p))}\| \leq C\lambda^{\pi(p)}$$

  y algo análogo con E^u.

Sin mucho problema, y (fácilmente de creerse), en [C3] se obtiene el siguiente corolario para medidas ergódicas usando algunos refinamientos del Ergodic closing lemma de Mañe de [ABC].

Corolario 3.1. *Sea $f \in Diff^1\backslash\overline{Tang}$ y μ medida ergódica, entonces, hay dos opciones:*

1. *μ es hiperbólica. En dicho caso esta soportada en una clase homoclínica (posiblemente trivial).*
2. *μ tiene un único exponente de Lyapunov nulo y el soporte de μ admite una descomposición dominada $E^s \oplus E^c \oplus E^u$ que coincide μ-ctp con la descomposición de Oseledet's.*

La prueba de esto no es difícil, la idea es que el Ergodic closing lemma de Mañe se puede adaptar para que también al aproximar por puntos periódicos la medida se aproximen los exponentes de lyapunov y los subespacios invariantes de las órbitas periódicas (recordar que el Ergodic closing lemma de Mañe asegura que dada una medida ergódica se puede aproximar débilmente por medidas soportadas en órbitas periódicas).

[2]Una tangencia homoclínica es un punto de intersección tangente entre la variedad estable e inestable de un punto periódico. Es evidente que si un difeomorfismo presenta una tangencia entonces pertenece a $\overline{\mathcal{I}}$.

Luego, el hecho que los subespacios de Oseledet's sean dominados, implica que en el caso que la medida sea hiperbólica que esta tiene que estar soportada en una clase homoclínica (esto tiene que ver con que vale el típico Anosov closing lemma para medidas hiperbólicas con esta condición, con la misma prueba ya que en [ABC] se prueba que si Oseledet es dominado entonces vale el Teorema de Pesin por más que el difeomorfismos sea sólamente C^1). Si interesa, esto esta hecho re prolijo en [C3].

3.2. Dinámica lejos de tangencias. En esta sección vamos a probar un Teorema de [C3] que de alguna manera resume lo que se sabe de dinámica lejos de tangencias. La prueba es bastante simple y el resultado en si engloba bastante de lo que se sabía hasta el momento.

Teorema 3.2 ([C3] Section 1.2)**.** *Sea $f \in Diff^1 \backslash \overline{Tang}$ y K_0 un conjunto compacto invariante con descomposición dominada $T_{K_0}M = E \oplus F$. Supongamos que E no es uniformemente contraido entonces hay 3 opciones:*

1. *K_0 intersecta alguna clase homoclínica de índice menor estricto que $dim E$.*
2. *K_0 intersecta alguna clase homoclínica de índice $dim E$ que contiene órbitas periódicas débiles ($\forall \delta > 0$ existe $\mathcal{O}_n$ órbitas periódicas homoclínicamente relacionadas que convergen Haussdorff a un subconjunto $K \subset K_0$ de índice $dim E$ y cuyo mayor exponente de Lyapunov sobre E esta en $(-\delta, 0)$). Además, estas clases homoclínicas cumplen que en ellas hay una descomposición dominada de la forma $T_H M = E' \oplus E^c \oplus F$ que extiende la descomposición de K_0 y $dim E^c = 1$.*
3. *$\exists K \subset K_0$ compacto invariante parcialmente hiperbólico $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ con dimensión central uno, $dim E^s < dim E$ y toda medida ergódica soportada en K tiene exponente nulo sobre E^c.*

Las clases homoclínicas a las que se refiere no tiene porque ser no triviales. También es importante remarcar que a nuestros efectos, lo único que utilizaremos es que si E no es uniformemente contraido, entonces, o bien K_0 intersecta una clase homoclínica, o bien existe el compacto K dado por la parte 3). La prueba no es muy diferente si quisieramos probar únicamente esa versión mas débil asi que no la cambiamos, pero tampoco nos esforzamos en exponer super claramente las cosas que no son tan relevantes a nuestros propositos.

Demostracion . Si E no es uniformemente contraido en K_0, entonces existe una medida ergódica con soporte en K_0 cuyo mayor exponente de Lyapunov sobre E es ≥ 0 (esto es pues tiene que haber un vector en E tal que $\|Df^n v\| \geq \|v\| \; \forall n \geq 0$ y tomando puntos de acumulación débil de las medidas soportadas ahí se obtiene lo deseado).

Sea $K = sop\mu$. Sea $T_K M = E_0 \oplus F_0$ dado por el Corolario 3.1 donde el máximo exponente sobre E_0 es negativo y el minimo exponente sobre F_0 es ≥ 0. Claramente $dim E_0 < dim E$. Al mismo tiempo, podemos suponer que elegimos μ de forma tal que la dimensión de E_0 es mínima (esto implica que E_0 tiene que ser uniformemente contraido, pues sino habría una medida ergódica con algún exponente ≥ 0 allí).

Ahora, si F_0 tiene todos sus exponentes estrictamente positivos, tendremos por el Corolario 3.1 que estamos en el caso 1) del Teorema.

Si F_0 tiene un exponente cero, tenemos $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus F'$ donde $dim E^c = 1$ y se cumple que existe un vector $v \in E^c_K$ tal que $\|Df^n v\| \geq \|v\|$ pues E^c no es uniformemente contraido.

Ademas, podemos suponer que toda medida ergódica soportada en K verifica que su exponente es ≤ 0 sobre E^c sino sería medida hiperbólica (de índice estrictamente menor que $dim E$) y estariamos en el caso 1).

De igual forma, si toda medida ergódica soportada en K tiene exponente cero sobre E^c entonces estamos en el caso 3) del Teorema y liquidamos también.

En resumen, llegamos a que falta estudiar el caso en que $dim E_0 = dim E - 1$ (sino directamente por lo de arriba estas en el caso 1) o 3)) y además se cumple que existen medidas ergódicas soportadas en K con exponente < 0 en E^c.

Además, podemos suponer que K es minimal en el sentido de que si $K' \subset K$ invariante y tiene un vector v tal que $\|Df^n v\| \geq \|v\|$ entonces $K' = K$ (usando lema de Zorn).

Vamos a probar que en estas condiciones estamos en el caso 2.

Sea L el supremo de los exponentes de Lyapunov de medidas ergódicas soportadas en K con exponente negativo sobre E^c. $L \geq 0$.

Si $L = 0$ estamos en el caso 2) pues para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeño tenemos una medida ergódica con exponente en $(-\delta, 0)$, esta por la dominación del Corolario 3.1 va a tener que ser hiperbólica y por lo tanto va a haber puntos periódicos acumulando en la topología Haussdorf a un subconjunto de K (esto por el Anosov Closing Lemma). La ultima afirmación se deduce de argumentos de [BDP] que permiten llevar esta estructura a toda la clase homoclínica.

Si $L < 0$ la cosa es un poco más complicada y la voy a esbozar simplemente pues hace uso del Lema de Liao (ver [W3]).

Definamos $E' \oplus F' = (E^s \oplus E^c) \oplus F'$ sobre K. Como existe v tal que $\|Df^n v\| \geq \|v\|$ $\forall n \geq 0$ tenemos que existe un punto $b \in K$ tal que para cualquier m se cumple[3]

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^m_{/E'(f^{im}(b))}\| \geq \|Df^{km}_{/E^c(y)}\| \geq 1 \qquad \forall k \geq 1$$

Al mismo tiempo, tenemos que si K' esta estrictamente contenido en K y es invariante, por la minimalidad de K (respecto a su no hiperbolicidad en E^c) se cumple que tiene que haber un punto en $x \in K'$ suficientemente hiperbólico en E^c (con exponente menor que L por definición de L). Además, por la dominación tenemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe m tal que $\|Df^m_{/E'}\| \leq e^{\varepsilon}\|Df^m_{/E^c}\|$. Tomando $\varepsilon < -L$ obtenemos que para dicho x se tiene:

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^m_{/E'(f^{im}(x))}\| \leq e^{k\varepsilon}\|Df^{km}_{/E^c(x)}\| \leq e^{km(L+\varepsilon)} \quad \forall k \geq 1$$

En definitiva tenemos lo siguiente, un punto donde E' no es hiperbólico y además, siempre que tengamos un punto donde E' no sea hiperbólico tendremos un punto en su omega límite que si va a ser bastante hiperbólico en E' (si el omega límite esta estrictamente contenido usamos lo del parrafo anterior, sino, simplemente te paras en un punto del soporte de una medida con exponente menor que L y haces el mismo argumento). Esto permite (utilizando el Lema de Liao) encontrar puntos periódicos homoclínicamente relacionados con exponentes arbitrariamente débiles pero de índice $dimE'$ que acumulan Hausdorff en un subconjunto de K. Vale de nuevo el argumento de [BDP].

□

Por completitud nomas, voy a enunciar el Lema de Liao para que se entienda porque no lo introduje e hice la demostración formal, pero además, si se mira con mas atención se ve que realmente nos pusimos en las hipótesis y lo que da el teorema permite concluir.

Lema 3.1 (Liao, ver [W3])**.** *Sea Λ compacto invariante con descomposición dominada $T_\Lambda M = E \oplus F$ (que verifica $\|Df^n_{/E}\|\|Df^{-n}_{/F}\| < C\lambda^n$. Supongamos que se verifica que*

(a) $\exists b \in \Lambda$ *tal que* $\prod_{i=0}^{k} \|Df^m_{/E(f^{mi}(b))}\| \geq 1$ $\forall k \geq 0$.

(b) *Existen* $0 < \lambda < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ *de forma tal que siempre que* $y \in \Lambda$ *verifique que*

[3] Notar que siempre se cumple que $\|Df^m_{/E'}\| \geq \|Df^m_{/E^c}\|$ por ser un subespacio. Al mismo tiempo, siendo E^c unidimensional, vale que $\prod_{i=0}^{n-1} \|Df_{/E^c}\| = \|Df^n_{/E^c}\|$.

$$\prod_{i=0}^{k} \|Df^m_{/E(f^{im}(y))}\| \geq \lambda_2^k \quad \forall k \geq 0$$

se cumple que existe $x \in \omega(y)$ tal que $\prod_{i=0}^{k} \|Df^m_{/E(f^{im}(y))}\| \leq \lambda_1^k \ \forall k \geq 0$.

Entonces, para todos $\lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < 1$ y para todo U entorno de Λ existe un punto periódico p cuya órbita esta contenida en U de índice $dimE$ y que verifica

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|Df^m_{/E(f^{im}(p))}\| \leq \lambda_4^k \qquad 1 \leq k \leq \frac{\pi(p)}{m} - 1$$

$$\prod_{i=k-1}^{\frac{\pi(p)}{m}-1} \|Df^m_{/E(f^{im}(p))}\| \geq \lambda_3^{\frac{\pi(p)}{m}-1+k} \qquad 1 \leq k \leq \frac{\pi(p)}{m} - 1$$

Alguna aclaración para que no parezca tan terrible. Lo que dice es lo que mencionamos al final de la prueba del Teorema 3.2. La última condición esta escrita así pues es mas fácil de utilizar (permite manejar mejor la descomposición dominada), pero en definitiva lo que te da es si se cumplen las hipótesis puntos periódicos acumulando Λ (toda la órbita acumula, no solo los puntos) que además si bien tienen índice $dimE$ y cierta hiperbolicidad en esa dirección (eso es λ_4 y te permite por ejemplo tener variedades estables de tamaño uniforme para ver que los puntos que aproximan estan homoclínicamente relacionados) la hiperbolicidad en el fibrado E es “arbitrariamente mala” es decir, peor que λ_3 que se puede elegir.

La prueba de esto tampoco es terrible (se puede encontrar en [W3]), simplemente hay que ver que las hipótesis te garantizan de alguna manera que en Λ hay una zona hiperbólica y una zona que no lo es. Entonces hay que de alguna manera pasear un rato por una zona y otro rato por la otra de forma de tener hiperbolicidad pero no tanta.

3.3. Remate de la prueba. A partir del Teorema 3.2 se puede probar el resultado principal de Wen en [W2] que dijimos implicaba el Teorema 1.1. Sin embargo, se puede proceder a probar el Teorema 1.1 directamente y se ahorra algún que otro argumento.

Sea $f \in Diff^1 \backslash \overline{\mathcal{MS} \cup \mathcal{I}}$ y ademas vamos a asumir que f es genérico, en particular pertenece a $\mathcal{KS} \cap \mathcal{G}_{rec}$.

Como es Kupka-Smale y no es Morse-Smale sabemos que el conjunto recurrente por cadenas es infinito. Además, podemos asumir que $\mathcal{R}(f)$ no es hiperbólico pues si fuese hiperbólico tendríamos infinitos puntos periódicos del mismo índice que necesariamente van a acumular en algun lado y de esa manera (utilizando el teorema de la variedad estable que da tamaño uniforme de las variedades invariantes y el λlemma) se consigue una intersección homoclínica transversal.

Si $\mathcal{R}(f)$ no es hiperbólico podemos considerar $\mathcal{H} = \{K \subset \mathcal{R}(f) \ \textit{compacto invariante} \ : \ K \ \textit{no es hiperbolico}\}$ y ordenando $\mathcal{H}$ por inclusión obtenemos un conjunto minimal no hiperbólico (la intersección decreciente de compactos invariantes es un compacto invariante no vacío y si todos son no hiperbólicos la intersección tampoco lo sera[4]).

Sea entonces K un conjunto minimal no hiperbólico. Podemos suponer que este es transitivo por cadenas pues en caso contrario lo podemos separar en dos compactos invariantes con la función de Conley y alguno de ellos no va a ser hiperbólico. La minimalidad concluye.

[4]Una posible prueba es así, podemos suponer que estamos en $\Lambda_i = \overline{Per_i(f)}$ pues si todos ellos son hiperbólicos entonces el difeomorfismo también lo es. Allí tenemos una descomposición dominada dada por el Teorema de Wen que extiende la de los periódicos y cualquier conjunto contenido en Λ_i es hiperbólico si y solo si lo es con esa descomposición. Entonces, si K_α es una cadena maximal decreciente de compactos invariantes no hiperbólicos existe $x_\alpha \in K_\alpha$ tal que por ejemplo $\|Df^n_{/E(x_\alpha)}\| \geq 1$ tomando límite de los puntos x_α se obtiene un punto en $\tilde{K} = \bigcap_\alpha K_\alpha$ que impide la hiperbolicidad de $\tilde{K}$.

Como $f \in \mathcal{KS}$ sabemos que K no puede ser una órbita periódica. Por lo tanto, la observación 2.1 nos dice que o bien K esta contenido en una clase homoclínica no trivial (pues si su clase de recurrencia tiene un punto periódico también tiene puntos que no lo son) o bien no intersecta ninguna clase homoclínica.

Ahora, aplicando el Teorema 3.2 a la descomposición $T_K M \oplus \{0\}$ (que no puede contraer uniformemente $T_K M$ pues K es minimal no hiperbólico) obtenemos que la única opción posible del teorema es la 3) y esto implica el Teorema 1.1.

□

4. Modelos centrales

4.1. Variedades invariantes. Tenemos entonces un minimal no periódico con dinámica parcialmente hiperbólica. En esta sección vamos a ver las herramientas que utilizaremos para probar el Teorema 1.2.

Primero vamos a recordar un teorema clásico sobre como se traduce en la dinámica la existencia de fibrados invariantes, y después uno no tan clásico, pero si muy utilizado en estos contextos. Ambos se pueden encontrar en [HPS]. Dado un fibrado invariante E, definimos $E(r)$ como la unión de las bolas de radio r en cada E_x (es decir la unión de los $E_x(r)$).

Teorema 4.1 (Teorema de la Variedad Estable Fuerte)**.** *Sea $f \in Diff^1$ y Λ un conjunto $f-$invariante parcialmente hiperbólico con descomposición $T_\Lambda M = E^s \oplus F$. Entonces, existe un mapa continuo $\varphi^{ss} : E^s(1) \to M$ tal que:*

1. *$\forall x \in \Lambda$, $\varphi^{ss}_x : E^s_x(1) \to M$ es un encaje C^1 con $\varphi^{ss}_x(0) = x$ y tangente a $E^s(x)$ en x.*
2. *$(\varphi^{ss}_x)_{x\in\Lambda}$ es una familia continua de encajes C^1 de los discos $E^s_x(1)$.*
3. *Los conjuntos $W^{ss}_{loc}(x) = \varphi^{ss}_x(E^s_x(1))$ son $f-$invariantes ($f(W^{ss}_{loc}(x)) \subset W^{ss}_{loc}(f(x))$) verifican que $y \in W^{ss}_{loc}(x)$ implica que $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ con $n \to +\infty$ (exponencialmente con tasa mejor que cualquier contracción en F) ademas de tener propiedades estables (estar en la estable fuerte local implica mantenerse cerca en el futuro). Esta propiedad hace que las variedades W^{ss}_{loc} sean únicas[5].*

Se tiene un teorema análogo para los fibrados inestables (por ejemplo aplicando este teorema a f^{-1}.

Lo interesante es que para fibrados centrales, si bien no se tiene un teorema tan completo como el anterior, se tiene algo similar, que verifica completamente los dos primeros puntos del teorema anterior y una versión mas débil de la invariancia citada en el punto 3).

Teorema 4.2 (Teorema 5.5 de [HPS])**.** *Sea Λ compacto invariante con descomposición dominada $T_\Lambda M = E \oplus F$. Entonces , existe un mapa continuo $\mathcal{D} : E(1) \to M$ tal que:*

1. *$\forall x \in \Lambda$, $\mathcal{D} : E_x(1) \to M$ es un encaje C^1 con $\mathcal{D}_x(0) = x$ y tangente a $E(x)$ en x.*
2. *$(\mathcal{D}_x)_{x\in\Lambda}$ es una familia continua de encajes C^1 de los discos $E_x(1)$.*
3. *Los conjuntos $W^E_r(x) = \mathcal{D}_x(E_x(r))$ son localmente $f-$invariantes es decir, $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(W^E_\delta(x)) \subset W^E_\varepsilon(f(x))$ y $f^{-1}(W^E_\delta(x)) \subset W^E_\varepsilon(f^{-1}(x))$*

Observacion 4.1. Si se tiene una descomposición dominada en 3 subfibrados $T_\Lambda M = E \oplus F \oplus G$ se obtiene también una de estas familias tangente a F intersectando las dadas por el Teorema 4.2 aplicado al fibrado $(E \oplus F)$ y $(F \oplus G)$. En particular, si F tiene dimensión uno, tenemos una familia continua de curvas C^1-encajadas en M que son localmente invariantes y tangentes a F.

♢

[5]Definir precisamente esto es un poco mas complicado, pero se entiende. Hay que decir que si la órbita de un punto tiende exponencialmente (con la misma tasa que contrae E^s) a la de x y ademas se mantiene suficientemente cerca siempre, entonces esta en $W^{ss}_{loc}(x)$.

4.2. Existencia de modelos centrales en conjuntos parcialmente hiperbólicos. Sea K un conjunto parcialmente hiperbólico con central de dimensión uno ($T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ con $dim E^c = 1$).

A priori hay dos posibilidades, el fibrado E^c puede tener una orientación preservada por Df o no tenerla (en esto no importa si E^c es o no orientable). En que influye esto?, básicamente en que en el caso que se preserve una orientación, las curvas centrales tienen dinámicas “disjuntas” de alguna manera pues podemos hablar de las curvas de arriba y de abajo que seran invariantes por f. En el caso que no se preserve la orientación, no podremos tener esa descomposición dinámica.

Entonces, llamamos $\hat{K} = K$ si Df preserva una orientación en E^c y $\hat{K} = K \times -1, 1$ en caso contrario.

Podemos fijar una familia de curvas como la dada por la observación 4.1 que nos permite definir un mapa $\pi : \hat{K} \times [0, +\infty) \to M$ y un mapa continuo $\hat{f} : \hat{K} \times [0, 1] \to \hat{K} \times [0, +\infty)$ con las siguientes propiedades:

- $f \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$ en $\hat{K} \times [0, 1]$.
- $\pi(\hat{K} \times \{0\}) = K$ y es el mapa obvio (es decir, si $\hat{K} = K$ es la identidad y si no la proyección).
- $t \to \pi(\hat{x}, t)$ es una familia C^1 de encajes de $[0, +\infty)$ en M parametrizados por $\hat{x} \in \hat{K}$.
- $\forall \hat{x} \in \hat{K}$ la curva $\pi(\hat{x}, [0, +\infty))$ es tangente a E^c en el punto $x = \pi(\hat{x}, 0)$.

También podemos suponer que el mapa $\hat{f}$ verifica las siguientes propiedades que le dan el nombre a $(\hat{K}, \hat{f})$ de *modelo central abstracto* para (K, f).

- $\hat{f}(\hat{K} \times \{0\}) = \hat{K} \times \{0\}$ (esto en realidad se deduce de lo de arriba).
- $\hat{f}$ es un homeomorfismo local en un entorno de $\hat{K} \times \{0\}$, es decir, existe $\hat{g} : \hat{K} \times [0, 1] \to [0, +\infty)$ tal que $\hat{f} \circ \hat{g}$ y $\hat{g} \circ \hat{f}$ son la identidad donde estan definidas.
- $\hat{f}$ tiene una dinámica fibrada (de producto cruzado), es decir, existe $\hat{f}_1 : \hat{K} \to \hat{K}$ y $\hat{f}_2 : \hat{K} \times [0, 1] \to [0, +\infty)$ cumple $\hat{f}(x, t) = (\hat{f}_1(x), \hat{f}_2(x, t))$.

Se dice que el modelo es transitivo por cadenas o minimal si lo es el mapa $\hat{f}_1$. Vamos a estudiar la dinámica del modelo para sacar conclusiones acerca de la dinámica del difeomorfismo en general.

4.3. Dinámica en los modelos centrales. Vamos a estudiar la dinámica de estos modelos centrales con el objetivo de obtener a partir de esta ciertos tamaños uniformes que nos permitan emular la prueba del caso hiperbólico.

Consideremos entonces un modelo central abstracto, es decir, un par $(\hat{K}, \hat{f})$ y un mapa fibrado $\hat{f} : \hat{K} \times [0, 1] \to \hat{K} \times [0, +\infty)$ que manda la sección nula en si misma y es un homeomorfismo local donde esta bien definido. Estudiaremos la dinámica en el conjunto $\tilde{K} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}^n(\hat{K} \times [0, 1])$. [6]

La dinámica en la base la notamos como $\hat{f}_1 : \hat{K} \to \hat{K}$. Y decimos que el modelo es transitivo por cadenas si lo es $\hat{f}_1$.

Diremos que el modelo tiene un *segmento recurrente por cadenas* si existe $x \in \hat{K}$ y $1 > a > 0$ de forma tal que todo el segmento $\{x\} \times [0, a]$ pertenece a la misma clase de recurrencia por cadenas de $\hat{f}_{/\tilde{K}}$.

Probaremos que en el caso en el cual el modelo no tiene un segmento recurrente por cadenas el modelo tendra alguna propiedad de hiperbolicidad.

Llamamos *banda* a un conjunto S que verifique que para todo $x \in \hat{K}$ existe $1 \geq a_x > 0$ de forma tal que $\{x\} \times [0, a_x) = S \cap \{x\} \times [0, 1]$ o $\{x\} \times [0, a_x] = S \cap \{x\} \times [0, 1]$. Decimos que una banda es *atractora* (resp. *repulsora*) si se verifica que $\hat{f}(\overline{S}) \subset S$ (resp. $\hat{f}^{-1}(\overline{S}) \subset S$). Se puede ver que la continuidad de $\hat{f}$ implica una cierta continuidad en S, es decir, S es como la “parte de abajo” de un gráfico de una función continua de $\hat{K}$ en $[0, 1]$ (es decir, si $x_n \to x$ entonces $a_{x_n} \to a_x$).

[6]En realidad no tiene sentido hablar de $\hat{f}^{-1}$, se entiende que esto refiere a donde tiene sentido. Se verifica que en $\tilde{K}$, $\hat{f}$ es un homeomorfismo.

Teorema 4.3. *Sea $(\hat{K}, \hat{f})$ un modelo central abstracto con base transitiva por cadenas. Entonces, o bien hay un segmento recurrente por cadenas, o bien hay bandas atractoras en entornos arbitrariamente pequeños de $\hat{K} \times \{0\}$ o bandas repulsoras en entornos arbitrariamente pequeños de $\hat{K} \times \{0\}$.*

Vale la pena aclarar que las últimas dos opciones no son excluyentes (puede haber una dinámica tipo "$\dot{x} = x^2 \sin(\frac{1}{x})$", vale la pena ver ejemplos de que puede pasar en un dibujito que hay en la introducción de [C3]).

Observacion 4.2. Si un modelo tiene un segmento recurrente por cadenas, entonces todo modelo que lo contenga también lo tendrá. Analogamente, la restricción de un modelo con bandas atractoras (o respulsoras) a un subconjunto también las tendrá.

Demostracion . Consideremos el conjunto $S^u_\varepsilon = pW^u_\varepsilon(\hat{K} \times \{0\}) = \{x \in \tilde{K} \ : \ \exists z \in \hat{K} \times \{0\} \ ; \ z \dashv_\varepsilon x\}$ y el conjunto $S^s_\varepsilon = pW^s_\varepsilon(\hat{K} \times \{0\}) = \{x \in \tilde{K} \ : \ \exists z \in \hat{K} \times \{0\} \ ; \ x \dashv_\varepsilon z\}$.

Primero que nada, vamos a probar que el conjunto S^u_ε es una banda atractora. Una vez que hayamos probado eso, estudiaremos los conjuntos $pW^u = \bigcap_{\varepsilon > 0} S^u_\varepsilon$ y pW^s analogamente. Si alguno de estos verifica que es exactamente la sección nula entonces tendremos bandas atractoras o repulsoras que son entornos arbitrariamente pequeños de la sección nula, en caso contrario, basta encontrar algún punto $x \in \hat{K}$ tal que tenga un intervalo en $pW^s \cap pW^u$ lo que implicará que es un segmento recurrente por cadenas.

Es fácil ver que si $x \in S^u_\varepsilon$ entonces $\hat{f}(x)$ también pues agregamos $\hat{f}(x)$ a la $\varepsilon-$pseudo órbita que une un punto $z \in \hat{K} \times \{0\}$ con x y obtenemos también una $\varepsilon-$pseudo órbita. Al mismo tiempo, si $x \in \overline{S^u_\varepsilon}$ tomamos un punto $y \in S^u_\varepsilon$ tal que $d(x, y) < \delta$ con δ elegido de forma tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Esto implica que $\hat{f}(x) \in S^u_\varepsilon$ y obtuvimos $\hat{f}(\overline{S^u_\varepsilon}) \subset S^u_\varepsilon$.

Falta entonces ver que S^u_ε es efectivamente una banda (ya probamos que es atractora). Primero, es trivial ver que S^u_ε contiene el ε entorno de $\hat{K} \times \{0\}$.

Ahora, veamos que si un punto de la forma $(x, \alpha) \in S^u_\varepsilon$ entonces se tiene que $\{x\} \times [0, \alpha] \subset S^u_\varepsilon$. Esto lo probaremos por inducción. Sea $(z, t) \in S^u_\varepsilon$ y sea $((z_0, t_0), \dots, (z_k, t_k))$ una $\varepsilon-$pseudo órbita que une $(z_0, t_0) \in \hat{K} \times \{0\}$ con $(z, t) = (z_k, t_k)$. Sea $I_j = \{z_j\} \times [0, t_j]$. Claramente $I_0 \subset S^u_\varepsilon$ y es claro que si $I_j \subset S^u_\varepsilon$ entonces I_{j+1} esta contenida en un $\varepsilon-$entorno de $\hat{f}(I_j)$ (pues (z_{j+1}, t_{j+1}) esta a menos de ε de $\hat{f}((z_j, t_j)))$ y por lo tanto, como $\hat{f}(I_j)$ es un intervalo que contiene al cero de $\{\hat{f}_1(z_j)\} \times [0, 1]$, su ε-entorno también lo será. Esto concluye la prueba de que necesariamente es un intervalo.

Esto se puede hacer analogamente para S^s_ε.

Consideramos $pW^u = \bigcap_{\varepsilon > 0} S^u_\varepsilon$ y $pW^s = \bigcap_{\varepsilon > 0} S^s_\varepsilon$. Tenemos las siguientes propiedades: Si $pW^u = \hat{K} \times \{0\}$ entonces hay bandas arbitrariamente pequeñas que son atractoras pues dado un entorno de $\hat{K}\ times\{0\}$ tendremos ε suficientemente chico de forma tal que S^u_ε esta contenido en ese entorno y es una banda atractora por lo antes probado. Analogamente, si $pW^s = \hat{K} \times \{0\}$ hay bandas repulsoras arbitrariamente pequeñas.

Hay que ver entonces que si $pW^u \neq \hat{K} \times \{0\}$ y $pW^s \neq \hat{K} \times \{0\}$ entonces hay un segmento recurrente por cadenas.

Por ser intersecciones de bandas, los conjuntos pW^u y pW^s intersectan los conjuntos de la forma $\{x\} \times [0, 1]$ en intervalos (posiblemente triviales) que contienen al 0. Basta ver ahora que si ninguno de los dos conjuntos se reduce a la sección nula, entonces hay un segmento recurrente por cadenas. Para eso utilizaremos la recurrencia por cadenas de la base.

Si se cumple que pW^u y pW^s contienen el conjunto $\hat{K} \times [0, \eta]$ con $\eta > 0$ tenemos que todos los puntos tienen segmentos recurrentes por cadenas.

Podemos suponer entonces que existe un punto para el cual $\{x\} \times [0, \eta] \subset pW^u$ (con $\eta > 0$) y un punto para el cual $pW^u \cap \{y\} \times [0, 1] = \{y\} \times \{0\}$. Intuitivamente esto tiene que implicar que hay algun segmento recurrente por cadenas ya que por un lado a ese segmento se llega por cadenas desde $\hat{K} \times \{0\}$ y por otro lado cuando se va por cadenas hasta la fibra de y se tiene que poder llegar por cadenas hasta ahi pues ahi se achica mucho.

Fijamos $\varepsilon_0 > 0$. Sea $\varepsilon < 0$ de forma tal que S^u_ε no contiene a $\{y\} \times [0, \varepsilon_0]$, la idea es que desde $\{x\} \times [0, \eta]$ llegamos a $\{y\} \times [0, \varepsilon_0]$ por ε-pseudo órbitas, pero entonces estamos llegando a $(y, 0)$ por ε_0-pseudo órbitas.

Sea $(x_0, \ldots, x_n)$ una ε-pseudo órbita con $x_0 = x$ y $x_n = y$. Definimos inductivamente los intervalos $I_k = \{x_k\} \times [0, t_k]$ donde $t_k = \min\{t'_{k-1}, 1\}$ donde $(x'_{k-1}, t'_{k-1}) = \hat{f}((x_{k-1}, t_{k-1}))$ y $t_0 = \eta$.

Esta claro que I_k esta contenido en un $\varepsilon-$entorno de $\hat{f}(I_{k-1})$ y se verifica necesariamente, dado que S^u_ε es una banda atractora que $I_n \subset \{y\} \times [0, \varepsilon_0]$. Por lo tanto, si fijamos k_0 como el primer valor $k \in \{0, 1, \ldots n-1\}$ tal que $t_j < 1\ \forall j > k$, se cumple que se puede ir desde I_{k_0} a y por ε_0-pseudo órbitas. Con lo cual encontramos un intervalo $I_{k_0} \subset S^s_{\varepsilon_0} \cap pW^u$, lo llamaremos $I_{k_0}(\varepsilon_0)$ y se verifica que tiene longitud mayor o igual a η (si $k_0 = 0$ es η y si $k_0 > 0$ es 1). Tomando un arco límite cuando hacemos $\varepsilon_0 \to 0$ tenemos un arco de longitud mayor o igual a η que es recurrente por cadenas (pertenece a $pW^s \cap pW^u$).

$\square$

5. Demostración del Teorema 1.2

Ya tenemos las herramientas para concluir el teorema. En principio, hay 2 posibilidades, una es que haya un segmento recurrente por cadenas y otra es que haya un bandas atractoras arbitrariamente pequeñas (o repulsoras, esto va a ser análogo argumentando para f^{-1}). Resulta que hay otro problema, en el caso que el mapa Df preserve una orientación en E^c tendremos 2 modelos centrales para el difeomorfismo con lo cual, si bien puede haber una banda atractora para uno, puede que haya una banda repulsora para el otro y ahi si el caso no es simetrico a tener atractoras de ambos lados. Con lo cual tenemos 3 casos diferenciados, los estudiaremos por separado, solo que los últimos dos tiene argumentos similares que sacaremos de factor común.

Vamos a trabajar en $\mathcal{G}_B = \mathcal{G}_{shadow} \cap \mathcal{G}_{rec} \cap \mathcal{KS}$.

5.1. Segmento recurrente por cadenas. Este caso es el más simple de todos. Se basa fuertemente en la observación 2.1 que dice que si encontramos una clase de recurrencia para un difeomorfismo genérico que tiene un punto periódico y un punto no periódico entonces tenemos un corte homoclínico transversal.

Sea entonces $f \in \mathcal{G}_B$ que tiene un conjunto minimal no periódico K parcialmente hiperbólico con central de dimensión uno y que además tiene un segmento central recurrente por cadenas γ.

Como γ esta en el conjunto maximal invariante del modelo central, podemos asumir que la órbita de γ esta contenida en un entorno adaptado de K y por lo tanto que admite la misma descomposición parcialmente hiperbólica.

Consideremos el conjunto $K_0 = K \cup \bigcup_{n \in Z} f^n(\gamma)$ que es transitivo por cadenas y por lo dicho parcialmente hiperbólico fuerte.

Consideremos el conjunto $W^s_{loc}(\gamma) = \bigcup_{x \in \gamma} W^{ss}_{loc}(x)$ y análogamente el conjunto $W^u_{loc}(\gamma)$. Estos conjuntos seran variedades de dimensión $dim E^s + 1$ y $dim E^u + 1$ respectivamente[7].

Aprovechando que $f \in \mathcal{G}_{shadow}$ sabemos que el conjunto K_0 es acumulado en la topología de Haussdorff por órbitas periódicas (que sea en la topología de Haussdorff implica que estas órbitas se encuentran en un entorno adaptado de K_0 y por lo tanto son parcialmente hiperbólicos). Esto implica que existe algun punto

[7]Podemos asumir que tanto E^s como E^u son no triviales pues sino tenemos un segmento recurrente por cadenas atractor o repulsor y por lo tanto, o bien tiene puntos periódicos (y es clase homoclínica no trivial) o no es acumulado por estos (que viola la genericidad).

periódico p tal que $W^{ss}_{loc}(p) \cap W^u_{loc}(\gamma) \neq \emptyset$ y $W^{uu}_{loc}(p) \cap W^s_{loc}(\gamma) \neq \emptyset$ con lo cual p esta en la misma clase de recurrencia que γ y obtuvimos una clase homoclínica no trivial, por lo tanto, probando que $f \in \mathcal{I}$.

5.2. Bandas atractoras o repulsoras, argumentos generales. Vamos a asumir que el conjunto K tiene una banda atractora y por lo tanto los fibrados E^s y E^u van a jugar roles diferentes. Lo primero que vamos a probar es que si se tiene una banda atractora, los puntos periódicos que acumulan a K van a tener asociados otros puntos periódicos con variedades estables de dimension $dim E^s + 1$ y que tienen un tamaño uniforme al menos en un semiespacio del punto dentro de W^{cs}_{loc}.

Sea entonces K el minimal parcialmente hiperbólico con central de dimensión uno. Como estamos en $\mathcal{G}_B$ podemos considerar $K_0 = K \cup \bigcup_n \mathcal{O}_n$ donde $\mathcal{O}_n$ son orbitas periódicas que acumulan Haussdorff sobre K y posiblemente eliminando algunas podemos suponer que estan todas en un entorno adaptado y por lo tanto K_0 es parcialmente hiperbólico con central de dimensión uno.

Si K tiene bandas atractoras arbitrariamente pequeñas entonces podemos por continuidad asumir que K_0 tiene al menos una banda atractora.

Sea S una banda atractora del modelo central $(\hat{K}_0, \hat{f})$ de K_0, entonces podemos considerar para todo $x \in K_0$ la curva $\sigma_{\hat{x}} = \pi(S \cap \{\hat{x}\} \times [0,1])$ (donde $\pi(\hat{x}) = x$, la dependencia de $\hat{x}$ es para hacer referencia a la dependencia del modelo central) que va a verificar $f(\sigma_{\hat{x}}) \subset \sigma_{\hat{f}(\hat{x})}$. Si $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} \hat{f}(S)$ llamamos $\gamma_{\hat{x}} = \pi(\Lambda \cap \{\hat{x}\} \times [0,1])$ que va a verificar que $f(\gamma_{\hat{x}}) = \gamma_{\hat{f}(\hat{x})}$. Observar que $\pi(\Lambda)$ se puede considerar parcialmente hiperbólico pues tomando S pequeña tenemos que esta contenida en un entorno adaptado de $\hat{K}_0$.

Observar que si $p \in Per(f_{/K_0})$ se cumple que un extremo de $\gamma_{\hat{p}}$ (con $\pi(\hat{p}) = p$) se tiene a p y en el otro se tiene otro punto periódico $P_{\hat{p}}$ que puede eventualmente coincidir con p. Si el modelo central preserva orientación entonces el período de $P_{\hat{p}}$ coincide con el de p y si no lo preserva, eventualmente puede ser el doble[8]. Lo mismo pasa con cualquier otro punto periódico en $\gamma_{\hat{p}}$, en conclusión, dado que f es Kupka-Smale y estos difeomorfismos tienen finitos puntos periódicos de cada período, a lo sumo hay finitos puntos periódicos en $\gamma_{\hat{p}}$.

Podemos asumir que el conjunto $W^{cs}_{loc}(p)$ esta partido en dos componentes conexas por $W^{ss}_{loc}(p)$ ya que construimos las curvas centrales cortando las centro estables y centro inestables. Le llamaremos $\hat{W}^{cs}_{\hat{p}}$ a la componente conexa de $W^{cs}_l oc(p)$ que contiene a $\sigma_{\hat{p}}$.

Lema 5.1. *Existe $\eta > 0$ tal que para todo punto $\hat{p} \in \hat{K}_0$ con $p = \pi(\hat{p})$ periódico se cumple:*

1. *La union de las variedades estables locales de los puntos periódicos de $\gamma_{\hat{p}}$ cubren un $\eta-$entorno de $\sigma_{\hat{p}}$ en $\hat{W}^{cs}_p$.*
2. *La variedad estable de $P_{\hat{p}}$ contiene una media bola $D^{cs}_+(P_{\hat{p}})$ en $\hat{W}^{cs}_p$ centrada en $P_{\hat{p}}$ y limitada por $W^{ss}_{loc}(P_{\hat{p}})$. $D^{cs}_+(P_{\hat{p}})$ es disjunta de $\gamma_{\hat{p}}$.*

Demostracion . Tomamos una familia de conos C^s alrededor del fibrado E^s que verifique que existe N tal que para todo $v \in C^s$ se cumple que $2\|Df^N v\| \leq \|v\|$.

Definimos $\tilde{\sigma}_{\hat{p}} = f^{-N}(\sigma_{\hat{f}^N(\hat{p})})$ que por la propiedad atractora de la banda va a cumplir que la clausura de $\sigma_{\hat{p}}$ estara contenida en $\tilde{\sigma}_{\hat{p}}$.

Sea $U(\hat{p}) = B_\delta(\sigma_{\hat{p}})$ en $\hat{W}^{cs}_p$ y se va a cumplir que para todo $z \in U(\hat{p})$ se verifica que z se une con un pequeño entorno de $\sigma_{\hat{p}}$ en $\tilde{\sigma}_{\hat{p}}$ mediante una curva tangente a C^s contenida en $\hat{W}^{cs}_p$.

Ahora tomamos η suficientemente chico[9] para que $\forall z \in B_\eta(\sigma_{\hat{p}})$ se cumpla que $\forall 0 \leq k \leq N$ se cumpla $f^k(z) \in U(\hat{f}^k(\hat{p}))$.

[8]Podria pasar que tenga período par en cuyo caso el período de $P_{\hat{p}}$ igual va a coincidir con el de p pues el retorno preserva orientación. Esto igual no es importante, lo importante es que los puntos periódicos en $\gamma_{\hat{p}}$ son finitos pues f es Kupka-Smale.

[9]Claramente η se puede considerar independiente del punto periódico. Tiene que ver solamente con la continuidad uniforme de f.

Como eso implica que ahora toda la órbita de z esta contenida en los entornos de $\sigma_{\mathcal{O}(\hat{p})}$ tenemos que el omega límite de todo punto en $B_\eta(\sigma_{\hat{p}})$ esta contenido en la órbita de $\gamma_{\hat{p}}$ que como su dinámica es Morse-Smale permite concluir el Lema (la segunda parte basta intersectar $B_\eta(\sigma_{\hat{p}})$ con la componente conexa de $\hat{W}^{cs}_p \backslash W^{ss}_{loc}(P_{\hat{p}})$ que no contiene a $\gamma_{\hat{p}}$).

□

Con esto podemos concluir que E^u necesariamente es no trivial ya que en caso contrario tendriamos infinitos pozos $P_{\hat{p}_n}$ (f es Kupka-Smale) con variedad estable de tamaño uniforme. Probamos entonces:

Corolario 5.1. *El fibrado E^u no es trivial.*

Ahora estamos en condiciones de concluir la prueba del Teorema 1.2, como mencionamos vamos a separarla en dos casos, uno en el cual E^c tiene una orientación preservada por Df y uno en el caso contrario, probando en estos casos que se puede perturbar arbitrariamente poco f para conseguir un corte transversal concluimos el Teorema 1.2.

5.3. El caso no-orientable.

En este caso no va a ser necesario perturbar la f, conseguiremos directamente un corte homoclínico transversal.

Como tenemos para todo punto periódico dos curvitas γ como en la sección anterior, de hecho, sean p_+ y p_- en $\hat{K}_0$ tal que $\pi(p_+) = \pi(p_-) = p$ (vimos que este era el caso cuando el fibrado E^c no era orientable). Definimos $\Gamma_p = \gamma_{p_+} \cup \gamma_{p_-}$.

Lema 5.2. *Sean p, q dos puntos periódicos en K_0 suficientemente cercanos. Entonces, se cumple que $W^{uu}_{loc}(y)$ corta transversalmente la variedad estable local de algun punto periódico de Γ_p para todo $y \in \Gamma_q$.*

Demostracion . Esto es consecuencia directa del Lema 5.1. Por estar cerca, se cumple que $W^{uu}_{loc}(q)$ corta a $W^{cs}_{loc}(p)$. Ademas, se puede ver que eligiendo razonablemente la banda S, los puntos $y \in \Gamma_q$ estan suficientemente cerca de q y por lo tanto tienen la misma propiedad. Como la banda tiene que ser razonablemente prolija se cumple que $\gamma_q \subset B_\eta(\sigma_p)$ si p y q están suficientemente cerca.

Por lo tanto, aplicando el Lema 5.1 concluimos la prueba.

□

Ahora podemos concluir la prueba utilizando este resultado. Primero, como K_0 tiene infinitas órbitas periódicas y f es Kupka-Smale obtenemos que estas órbitas tiene que tener períodos no acotados. Y como la variedad es compacta, van a haber puntos periódicos p tal que para cierto $n \geq 0$ se va a cumplir que $f^n(p) \neq p$ pero esten cerca como para que valga el Lema 5.2.

Consideramos entonces Γ_p y $\Gamma_{f^n(p)}$. Sea $\Upsilon = \{q_i, f^n(q_i)\}_{q_i \in Per(f_{/\Gamma_p})}$ el conjunto de puntos periódicos en $\Gamma_p \cup \Gamma_{f^n(p)}$.

Decimos que si $r, s \in \Upsilon$ se cumple que $r \geq s$ si se cumple que $W^u(r) \pitchfork W^s(s) \neq \emptyset$. Por el $\lambda-$lemma (argumento clásico) la relación esta es un orden parcial, y como Υ es un conjunto finito (f es Kupka-Smale) se cumple que hay un elemento minimal.

Se cumple por el Lema 5.2 que todo punto periódico es mayor que alguno, por lo tanto este punto minimal es mayor que alguno y menor o igual al mismo tiempo. Es decir, si $p \in \Upsilon$ es minimal, existe $q \in \Upsilon$ tal que $p \geq q$ y por la minimalidad $q \geq p$ y por lo tanto estan homoclínicamente relacionados y obtuvimos que $f \in I$.

5.4. El caso orientable.

La primera observación tiene que ver con entender porque este caso es diferente al anterior. Lo primero que hay que decir es que ahora hay 2 modelos centrales diferentes (uno de cada lado) y nada nos asegura que tener una banda atractora para uno implique una banda atractora para el otro (de hecho, si ese fuese el caso, la misma prueba que en el caso no orientable camina). El problema que puede aparecer aca es algo que resulta bastante patológico y ya aparecia en el trabajo [BGW] (la solución también).

Como me embola hacer dibujos, va a ser bastante difícil explicar esto!!!. Voy a tratar de motivar cual es la posible patología que podría estar ocurriendo que hace que no necesariamente tengamos que $f \in \mathcal{I}$ y tengamos que probar que $f \in \overline{\mathcal{I}}$.

Uno considera los puntos periódicos $P_{\hat{p}_n}$ que tiene periodos arbitrariamente largos y llega un momento donde los puntos tienen retornos cercanos (i.e. $n > 0$ tal que $f^n(P_{\hat{p}_n}) \neq P_{\hat{p}_n}$ pero estan cerca).

Uno podría pensar entonces que como estos puntos tienen semibolas estables de tamaño uniforme en la variedad centro estable y estando suficientemente cerca las inestables van a cortar la centro estable debería ocurrir que alguno de los dos puntos verifique que la inestable corte a la estable del otro. Como estan en la misma órbita eso da que $f \in \mathcal{I}$.

Esto es bastante razonable, pues por ejemplo si tomamos un pequeño entorno donde los fibrados E^s, E^c y E^u son practicamente triviales. Orientamos E^c y por ejemplo tenemos que las semibolas estables son en la dirección positiva de E^c entonces sería razonable que el punto periódico que este mas "arriba" en la dirección E^c su inestable corte la semibola estable del otro. Sin embargo, es posible que (recordar que en general el fibrado E^s y el E^u no se integran simultaneamente) no exista la nocion de arriba o abajo en relación a E^c, o dicho de otra forma, que exista, pero que ambos puntos esten uno abajo del otro.

Si llega a ocurrir que para todos los puntos periódicos, los retornos tienen esta propiedad "patológica" (no es patologico que pase para 1 pto periódico, pero para todos!) diremos que el conjunto K_0 tiene *retornos torcidos*.

Este es el unico caso que resta estudiar, y lo haremos como fue hecho en [BGW] (seccion 6). De hecho comentaremos la idea nada más (pues es simple, creible y de prueba larga).

La idea es que si eso ocurre se puede crear una intersección homoclínica por una pequeña perturbación. Esto se basa en realizar unos calculos no muy complejos que tienen que ver con la trivialización de los fibrados localmente que permiten probar que la distancia entre las variedades estables fuertes e inestables fuertes de los retornos de esos puntos periódicos es muy pequeña con respecto a la distancia entre los puntos periódicos. Esto permite, mediante una perturbación local (de un solo paso, no es necesario usar ni el Connecting Lemma de Hayashi, ni nada por el estilo, basta hacer una perturbación local) conectar la variedad estable fuerte y la inestable fuerte de ambos puntos periódicos (esto lo voy a hacer con cuidado en el pizarrón).

Esto concluye la prueba del Teorema.

Referencias

[ABC] F. Abdenur, C. Bonatti and S.Crovisier, Nonuniform hyperbolicity for C^1 generic diffeomorphisms *Preprint ArXiv* (2008) DS/ 08093309

[BC] C. Bonatti and S. Crovisier, Recurrence et Generite, *Inventiones Math.* **158** (2004), 33–104.

[BDP] C.Bonatti, L.Diaz and E. Pujals, A C^1 generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources, *Annals of Math* (2003)

[BDV] C. Bonatti, L.J. Diaz and M. Viana, Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, *Springer-Verlag* (2005).

[BGW] C. Bonatti, S. Gan and L.Wen, On the existence of non trivial homoclinic classes, *Ergodic theory and Dyn. Systems* **27** (2007)

[CMP] C. M. Carballo , C. A. Morales and M. J. Pacifico, Homoclinic classes for generic C^1 vector fields, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **23** (2003), 403–415.

[C1] S. Crovisier, Periodic orbits and chain transitive sets of C^1 diffeomorphisms, *Publ. Math. IHES* **104** (2006).

[C2] S. Crovisier, Birth of homoclinic intersections: a model for the central dynamics of partially hyperbolic systems. *Preprint ArXiv* (2006) DS/0605387

[C3] S. Crovisier, Partial hyperbolicity far from homoclinic bifurcations, *Preprint, Arxiv* (2008) DS/08094965

[HPS] M. Hirsch,C. Pugh and M. Shub, Invariant Manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).

[Less] P. Lessa, Dinámica genérica en superficies, *Monografía Licenciatura* (2006) http://imerl.fing.edu.uy/ssd

[PS] E.R. Pujals and M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Annals of Math.* (2000)

[S] A. Sambarino, Piezas elementales de la dinámica genérica, *Monografía Licenciatura* (2007) http://imerl.fing.edu.uy/ssd

[W1] L. Wen, Homoclinic tangencies and dominated splittings, *Nonlinearity* (2002).

[W2] L. Wen, Generic diffeomorphisms far away from homoclinic tangencies and heterodimensional cycles, *Bol. Soc. Bras. Mat.* **35** (2004).

[W3] L. Wen, The selecting lemma of Liao, *Disc.and Cont. Dyn. Sys.* **20** (2008) 159-175.

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay

E-mail address: rpotrie@cmat.edu.uy