COCICLOS Y EL TEOREMA DE OSELEDET EN DIMENSIÓN DOS

RAFAEL POTRIE

Resumen. La idea es dar una prueba del Teorema de Oseledets. La prueba se basa en unas notas de Avila y Bochi ([AB]), la diferencia principal es el idioma. No puse muchas referencias por pereza, en caso de necesidad ir a las pocas que hay para ver el resto.

1. Definiciones, notaciones y enunciado del resultado principal

Sea $T : X \to X$ un mapa medible en $(X, \mathcal{A}, \mu)$ que además, preserva μ. Consideramos también $A : X \to SL(2, \mathbb{R})$ medible y verificando la siguiente hipotesis de integrabilidad

$$\int \log^+ \|A\| d\mu < +\infty$$

donde si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función medible, f^+ denota la parte positiva. Es decir, $f^+ = f \vee 0$. Recordar que si $g = h \vee k$ entonces $g(x) = \max\{h(x), k(x)\}$.

Esto nos permite definir el sistema dinámico $F : X \times \mathbb{R}^2 \to X \times \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x, v) = (Tx, A(x)v)$$

A veces es conveniente pensar F como un sistema dinámico de $X \times \mathbb{P}^1$ en si mismo (considerando la acción de la matriz A en el proyectivo en vez de en $\mathbb{R}^2$). Le llamaremos cociclo al par (T, A).

Se puede pensar a F como una transformación aleatoria en $\mathbb{R}^2$ que elije al "azar" matrices de $SL(2, \mathbb{R})$ (con la regla dada por T y A) y las multiplica. Nuestro objetivo es conocer el comportamiento asintótico de un vector al aplicar muchas veces este procedimiento. Será comodo entonces considerar también la siguiente notación para $n > 0$:

$$A^n(x) = A(T^{n-1}(x)) \dots A(x)$$

donde la juxtaposición indica el producto de matrices. Si T fuese invertible, tiene sentido considerar $A^{-n}(x) = (A^n(T^{-n}(x)))^{-1}$ y por supuesto $A^0(x) = Id$.

Por más motivaciones (y las hay, particularmente en el estudio de la derivada de difeomorfismos o mapas diferenciables) ver [AB] o [BDV] capítulo 12.

Supongamos primero que μ es una delta de dirac soportada en un punto x (necesariamente fijo para T pues supusimos que μ es T-invariante). Entonces, nuestro objetivo se reduce a hallar la forma de Jordan de la matriz $A(x)$ y a partir de ello, tendremos un conocimiento preciso, para casi todo punto según μ (en este ejemplo esto es muy boludo) del comportamiento asintótico de un vector cualquiera al aplicar $A^n(x)$.

(Caso 1) $A(x)$ es diagonalizable con valores propios $\lambda > 1$ y λ^{-1}. Entonces, hay direcciones E^u y E^s asociadas a dichos valores propios tal que si un vector no nulo comienza en E^s, entonces iterando al futuro los vectores tenderán a cero con una tasa exponencial λ^{-1} y si un vector pertenece a $E^u \setminus \{0\}$, al iterarlo al pasado, convergerá a cero con la misma tasa. Además, los vectores que no pertenecen a estos subespacios divergen en iteraciones tanto positivas como negativas con velocidad exponencial de tasa λ.

31 de Marzo de 2010.

(Caso 2) $A(x)$ tiene ambos valores propios de modulo 1. Entonces, todo vector crecerá a lo sumo linealmente al aplicar $A^n(x)$ (observar que si se tiene valor propio doble 1 con forma de Jordan, hay un vector cuya norma puede ir a infinito, pero subexponencialmente).

Un estudio muy similar se puede hacer en el caso que μ este soportada en una órbita periódica, diagonalizando $A^n(x)$ donde n es el período de x.

En el caso general, la respuesta es que se consiguen probar cosas no muy diferentes, y eso es lo que se conoce como el Teorema de Oseledets.

Primero, vamos a ver que tiene sentido definir una tasa de crecimiento exponencial para los vectores de $\mathbb{R}^2$. Observamos que todos los resultados que vamos a tratar valen en dimensiones mayores, pero las pruebas tienen ciertas complicaciones técnicas extra.

Lo primero que utilizaremos es el siguiente Teorema que permite definir las tasas de exponenciales de divergencia a infinito de los vectores para los puntos genéricos de μ. Observar que como $A(x) \in SL(2,\mathbb{R})$ se cumple que $\|A(x)\| \geq 1$.

Teorema 1.1 (Furstenberg-Kesten)**.** *Sea (T, A) un cociclo como arriba. Entonces, para casi todo punto x segun μ se cumple que existe el límite*

$$\lambda(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)\|$$

y se verifica que $\Lambda = \int \lambda d\mu = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int \log \|A^n\| d\mu$.

El número $\lambda(x)$ se llama *exponente de Lyapunov*.

Notar que si A fuese una función a los reales (de modulo mayor que uno) y le aplicamos el teorema de Birkhoff a la función $\log|A|$ obtenemos exactamente este enunciado (observar que $\frac{1}{n}\int \log|A^n| d\mu = \int \log|A| d\mu$ en ese caso). La dificultad adicional en este teorema es que la norma del producto de matrices no es igual al producto de las normas.

Observar que en los puntos donde $\lambda(x) = 0$, ya obtuvimos un comportamiento similar al del (Caso 2) para los puntos fijos. Solamente que sabemos que su crecimiento es subexponencial (no sabemos a priori si tiene que ser lineal como en el caso mencionado anteriormente), esto nos conformara en ese caso. Ahora, el Teorema de Oseledets nos permite tratar el caso donde $\lambda(x) > 0$ y nos da una información practicamente igual de satisfactoria. Llamaremos $P = \{x \in X \ : \ \lambda(x) > 0\}$.

Teorema 1.2 (Oseldets)**.** *Sea (T, A) un cociclo como antes. Entonces, para casi todo x donde $\lambda(x) > 0$ existe un espacio E^s_x invariante (es decir $A(x)E^s_x = E^s_{Tx}$) que varia de forma medible en P y que verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| = -\lambda(x) \qquad si \qquad v \in E^s_x \backslash \{0\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| = \lambda(x) \qquad si \qquad v \in \mathbb{R}^2 \backslash E^s_x$$

Además, si T es invertible, y E^u_x es el subespacio definido para el cociclo (T^{-1}, A^{-1}) se cumple que $\mathbb{R}^2 = E^s_x \oplus E^u_x$ para casi todo punto de P y además

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \sin\measuredangle(E^s_{T^n x}, E^u_{T^n x}) = 0$$

2. Demostración del Teorema de Furstenberg-Kesten

Observar que se verifica lo siguiente

$$\log \|A^{n+m}(x)\| \leq \log \|A^n(T^m x)\| + \log \|A^m(x)\|$$

Esta propiedad llamada subaditividad, nos permite aplicar un teorema mucho más general que implica entre otras cosas este Teorema y el de Birkhoff[1]. Eso concluye la prueba. Observar que en esta sección, dado que lo redujimos al caso subaditivo, no utilizaremos el hecho de que son matrices dos por dos, asi que estamos probando el resultado para todas las posibles dimensiónes.

Teorema 2.1 (Teorema Ergodico Subaditivo de Kingman)**.** *Sea $T : X \to X$ una transformación medible que preserva μ y $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciónes medibles tales que f_1^+ es $\mu-$integrable y tal que*

$$f_{n+m} \leq f_n \circ T^m + f_m \qquad \forall n, m \geq 1$$

Entonces, se cumple que $\frac{1}{n} f_n \to f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ casi todo punto y además se cumple que f^+ es integrable y

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int f_n d\mu = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int f_n d\mu := L \in [-\infty, \infty)$$

Notar que la hipotesis de subaditividad y la invariancia por T de μ nos da que $\int f_{n+m} d\mu \leq \int f_n d\mu + \int f_m d\mu$ con lo cual sabemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int f_n d\mu = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int f_n d\mu$. La prueba que daremos esta basada en [AB2].

2.1. Demostración del Teorema de Kingman en el caso acotado. Vamos a asumir como hipotesis que para todo $n \geq 1$ se cumple que $|f_n|$ está acotada por Cn, con lo cual $L \geq C > -\infty$([2]).

Definimos las funciones $f_I, f_S : X \to [-\infty, \infty)$ dadas por

$$f_I = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n$$

$$f_S = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n$$

Obviamente tenemos que $f_I \leq f_S$ y ambas funciones son medibles. Como $L > -\infty$ nos alcanza probar que

$$\int f_I d\mu \geq L \geq \int f_S d\mu$$

para concluir el Teorema. Notar que ambas desigualdades no son simétricas ya que tenemos subaditividad en un solo sentido.

Se cumple que $f_I(x) = \liminf \frac{1}{n} f_n(x) \leq \liminf \frac{1}{n}(f_1(x) + f_{n-1}(Tx)) = f_I(Tx)$ con lo cual

$$T^{-1}(\{f_I \geq a\}) \subset \{f_I \geq a\} \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

de lo que deducimos, gracias a que T preserva μ que $T^{-1}(\{f_I \geq a\}) = \{f_I \geq a\}(mod 0), \forall a \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $f_I(x) = f_I(Tx)$ para μ casi todo punto. Un argumento análogo nos da que $f_S(Tx) = f_S(x)$ para μ casi todo punto.

Lema 2.1. $\int f_I d\mu = L$

Demostración.Por el Lema de Fatou tenemos inmediatamente que $\int f_I d\mu = \int \liminf \frac{1}{n} f_n d\mu \leq \liminf \frac{1}{n} \int f_n d\mu = L$ (el Lema de Fatou lo podemos utilizar ya que $f_n/n \geq -C$ para todo n).

Fijamos $\varepsilon > 0$ y consideramos los conjuntos

[1]Evidentemente Furstenberg y Kesten lo probaron sin utilizar este Teorema que es posterior, pero ahora parece más razonable probarlo así.

[2]Este es el caso que más nos interesa, pues en general se trabaja con X compacto y A continua.

$$E_k = \{x \ : \ \exists j \in \{1, \ldots, k\} \ tq \ \frac{1}{j} f_j(x) < f_I(x) + \varepsilon\}$$

Por definición de f_i obtenemos que $X = \bigcup_k E_k$.

Definimos ahora las funciones $\psi_k : X \to [-\infty, \infty)$ como $f_I + \varepsilon$ en E_k y $f_1 \vee (f_I + \varepsilon)$ en E_k^c.

Afirmación. *$f_n(x) \leq \sum_{i=0}^{n-k-1} \psi_k(T^i x) + \sum_{i=n-k}^{n-1} (\psi_k \vee f_1)(T^i x)$ para $n \geq k$ y $\mu-$ casi todo x.*

De esto obtenemos que

$$\int f_n d\mu \leq (n-k) \int \psi_k d\mu + k \int (\psi_k \vee f_1) d\mu$$

Dividiendo entre n y haciendo n tender a infinito, obtenemos que

$$L \leq \int \psi_k d\mu$$

Como ψ_k decrece a $f_I + \varepsilon$, por el teorema de convergencia monótona, obtenemos que

$$L \leq \int f_i d\mu + \varepsilon$$

Y como ε era arbitrario, se concluye.

Demostración de la Afirmación. Sea x tal que $f_I(x) = f_I(T^n(x))$ para todo $n > 0$. Definimos inductivamente los enteros $0 = m_0 \leq n_1 < m_1 \leq n_2 < m_2 \leq \ldots$ de la manera siguiente:

- n_j es el menor entero positivo mayor o igual a m_{j-1} tal que $T^{n_j}(x) \in E_k$.
- m_j es el mayor entero positivo tal que $1 \leq m_j - n_j \leq k$ y tal que $f_{m_j - n_j}(T^{n_j}(x)) < (m_j - n_j)(f_I(T^{n_j}(x)) + \varepsilon) = (m_j - n_j)(f_I(x) + \varepsilon)$. Este entero existe por definición de E_k y pues $T^{n_j}(x) \in E_k$.

Dado $n \geq k$ definimos l como el mayor entero tal que $m_l \leq n$. La subaditividad nos da que

$$f_n(x) \leq \sum_{i \in H} f_1(T^i x) + \sum_{j=1}^{l} f_{m_j - n_j}(T^{n_j} x)$$

con $H = \bigcup_{j=0}^{l-1} [m_j, n_{j+1}) \cup [m_l, n)$.

Sabemos que si $i \in \bigcup_{j=0}^{l-1} [m_j, n_{j+1})$ entonces $f_1(T^i x) \leq \psi_k(T^i x)$ pues $T^i(x) \notin E_k$ y además tenemos que

$$f_{m_j - n_j}(T^{n_j} x) \leq (m_j - n_j)(f_I(x) + \varepsilon) \leq \sum_{i=n_j}^{m_j - 1} \psi_k(T^i x)$$

Esto concluye la prueba de la afirmación.

□

□

Para concluir la prueba, queremos mostrar que $\int f_S d\mu \leq L$ usando que el Lema que acabamos de probar vale para toda sucesion de funciones en nuestras hipotesis.

Fijemos $k > 0$ y definimos

$$F_n = -\sum_{j=0}^{n-1} f_k \circ T^{jk}$$

Tenemos entonces que F_n verifica la subaditividad para la transformación T^k, de hecho, la aditividad pues $F_{n+m} = F_n \circ T^{km} + F_m$, además, como f_k esta acotada, F_n también, para todo n. Además, tenemos que para todo n, por la invariancia de μ para T^k

$$\frac{1}{n}\int F_n d\mu = -\int f_k d\mu$$

Aplicando el Lema, definimos la función $F_I = \liminf \frac{1}{n}F_n$ y tenemos que verifica que $\int F_I d\mu = -\int f_k$.

Entonces, se verifica que por la subaditividad

$$-F_I = \limsup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_k \circ T^{jk} \geq \limsup \frac{1}{n} f_{kn}$$

Vamos a probar que $\limsup \frac{1}{n}f_{kn} \geq k \limsup \frac{1}{n}f_n = kf_S$ y eso concluye[3] ya que esto nos da que $\int f_S d\mu \leq \frac{1}{k}\int f_k d\mu$ para todo k y por ende $\int f_S d\mu \leq L$ como queríamos.

Para probar que $\limsup \frac{1}{n}f_{kn} \geq k \limsup \frac{1}{n}f_n = kf_S$, escribimos $n = km_n + r_n$ con $1 \leq r_n \leq k$ y tenemos que por la subaditividad se cumple que

$$f_n \leq f_{km_n} + g \circ T^{km_n}$$

donde $g = f_1 \vee \ldots \vee f_k$ (que es una función acotada). Entonces, dividiendo entre n y tomando limite superior (y usando que $\frac{m_n}{n} \to \frac{1}{k}$) obtenemos que

$$\limsup \frac{1}{n}f_n \leq \frac{1}{k}\limsup \frac{1}{km_n}f_{km_n} + \limsup \frac{1}{n} g \circ T^{km_n}$$

Como g está acotada, tenemos que $\limsup \frac{1}{n} g \circ T^{km_n} = 0$ y concluimos la prueba en el caso acotado.

2.2. Demostración de Kingman en el caso general.

La prueba en el caso general no se puede deducir directamente del caso acotado. Pero si se puede adaptar la prueba para concluir. Notar que una vez que se tiene el Lema 2.1 (que no utiliza la acotación) se puede proceder igual para probar que $\int f_S d\mu \leq L$ considerando las funciónes truncadas $f_n^{(C)} = f_n \vee (-Cn)$ (notar que no se puede truncar por arriba pues se pierde la subaditividad) de esa manera se puede continuar la prueba teniendo en cuenta un detalle que es que en un momento utilizamos el hecho que g (definida en la sección anterior) era acotada, ahora hay que usar una consecuencia del Teorema de Birkhoff (que si sale en toda generalidad como consecuencia del Teorema de Kingman en el caso acotado pues se puede truncar en ambos sentidos) que da que si g es integrable entonces $\lim \frac{1}{n} g \circ T^n(x) = 0$ para casi todo punto. Ver [AB] por los detalles (que están mezclados en la prueba).

Lo que si se deduce directamente de este resultado tal cual lo demostramos es el Teorema de Birkhoff tal cual vamos a ver (también, con una técnica similar se deduce el Teorema de Kingman asumiendo que f_1 esta acotada superiormente como única hipotesis)

Teorema 2.2 (Teorema de Birkhoff). *Sea $T : X \to X$ que preserva μ. Sea $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi^+ \in L^1(\mu)$. Consideramos para todo $n > 0$ la suma de Birkhoff de φ*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i$$

Entonces, para μ−casi todo punto $x \in X$ se verifica que existe el $\lim \frac{1}{n}S_n(x) = \tilde{\varphi}(x)$ *y se tiene también que $\int \varphi d\mu = \int \tilde{\varphi} d\mu$.*

[3] Notar que es fácil ver que $\limsup \frac{1}{n}f_{kn} = k \limsup \frac{1}{kn}f_{kn} \leq k \limsup \frac{1}{n}f_n$ pues $\frac{1}{kn}f_{kn}$ es subsucesión de $\frac{1}{n}f_n$.

Demostración.Consideremos, para $C_1, C_2 > 0$ (notamos $C = (C_1, C_2)$, podemos considerar $C_i = \infty$ para alguno de los dos i) la función $\varphi^{(C)} : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi^{(C)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & si \quad -C_1 \leq \varphi(x) \leq C_2 \\ -C_1 & si \quad \varphi(x) < -C_1 \\ C_2 & si \quad \varphi(x) > C_2 \end{cases}$$

Consideramos entonces $S_n^{(C)} = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^{(C)} \circ T^i$ que verifica que

$$S_{n+m}^{(C)} = \sum_{i=0}^{m-1} \varphi^{(C)} \circ T^i + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi^{(C)} \circ T^i \circ T^m = S_m^{(C)} + S_n^{(C)} \circ T^m$$

es decir, es subaditiva (de hecho, aditiva). Al mismo tiempo, sabemos que $|S_n| \leq C^m n$ para todo n (donde $C^m = \max\{C_1, C_2\}$), con lo cual se verifican las hipotesis adicionales que utilizamos para demostrar el Teorema de Kingman si pedimos que $C^m < \infty$. Es decir, sabemos que existe $\tilde{\varphi}^{(C)} : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n^{(C)}(x) = \tilde{\varphi}^{(C)}(x) \qquad \mu - ctp - x$$

Ahora, hacemos C_2 tender a infinito y dado que son funciones crecientes, obtenemos un limite para $\mu-$casi todo punto y las propiedades de las integrales se seguiran verificando por el Teorema de Convergencia Monótona. Ahora, haciendo tender C_1 a infinito concluimos el Teorema.

□

3. Demostración del Teorema de Oseledets de dimensión dos

En esta sección utilizaremos fuertemente que nos encontramos en dimensión dos.

Para toda matriz $A \in SL(2, \mathbb{R})$ (que verifique que $\|A\| > 1$) existen vectores $s(A) \perp u(A)$ unitarios (únicamente definidos módulo signo) que verifican que[4]

$$\|Au(A)\| = \|A\| \qquad \|As(A)\| = \|A\|^{-1}$$

Fijado un x tal que $\lambda(x) > 0$, definimos los vectores $s_n = s(A^n(x))$ y $u_n = u(A^n(x))$ para todo n suficientemente grande (notar que como $\|A^n(x)\| \to \infty$ estan definidos únicamente a partir de algun n_0).

Tenemos entonces una función medible $s_n : X \to \mathbb{P}^1$ que vamos a ver converge a una función $E^s : X \to \mathbb{P}^1$ que verificará las propiedades deseadas.

Definimos el ángulo $\alpha_n = \langle(s_n, s_{n+1})$. Entonces, tenemos que

$$A^{n+1}(x)s_n = A^{n+1}(x)(\pm \sin \alpha_n u_{n+1} \pm \cos \alpha_n s_{n+1})$$

Esto nos da que

$$\|A^{n+1}(x)s_n\| \geq \sin \alpha_n \|A^{n+1}(x)\|$$

Por otro lado, tenemos que $A^{n+1}(x)s_n = A(T^n x)A^n(x)s_n$ entonces

$$\|A^{n+1}(x)s_n\| \leq \frac{\|A(T^n x)\|}{\|A^n(x)\|}$$

[4]También se cumple que $As(A) \perp Au(A)$. Todo esto es clásico de álgebra lineal. Una prueba sencilla (pero no elemental) es la siguiente, A define un homeomorfismo de grado 1 del proyectivo en si mismo, entonces hay dos puntos antipodales que se mapean en puntos antipodales (puntos antipodales del proyectivo son direcciones ortogonales). Es fácil ver que esto implica que $A = R_1 D R_2$ donde R_1 y R_2 son rotaciones y D es una matriz diagonal cuyas entradas son $\|A\|$ y $\|A\|^{-1}$.

Juntando estas fórmulas obtenemos que

$$\sin\alpha_n \leq \frac{\|A(T^n x)\|}{\|A^n(x)\|\|A^{n+1}(x)\|}$$

Esto nos da que $\sin\alpha_n \to 0$, de hecho, tenemos que $\lim \frac{1}{n}\log\sin\alpha_n = -2\lambda(x)$ y por lo tanto nos queda bien definida la dirección E^s_x. Definimos ahora $\beta_n = \langle(s_n, E^s_x)$, y tenemos la siguiente igualdad

$$A^n(x)E^s_x = A^n(x)(\pm\sin\beta_n u_n \pm \cos\beta_n s_n) \Rightarrow \|A^n(x)E^s_x\| \leq \|A^n(x)\|\sin\beta_n + \|A^n(x)\|^{-1}\cos\beta_n$$

Tomando logaritmos y dividiendo entre n obtenemos que

$$\frac{1}{n}\log\|A^n(x)E^s_x\| \leq \frac{1}{n}\log\left(\|A^n(x)\|\sin\beta_n + \|A^n(x)\|^{-1}\cos\beta_n\right)$$

tomando limites superiores (y usando que $\lim\frac{1}{n}\log\cos\beta_n = 0$, $\lim\frac{1}{n}\log\sin\beta_n = -2\lambda(x)$ y $\lim\frac{1}{n}\log(a_n + b_n) \leq \max\{\lim\frac{1}{n}\log a_n, \lim\frac{1}{n}\log b_n\}$) obtenemos que

$$\limsup\frac{1}{n}\log\|A^n(x)E^s_x\| \leq \max\left\{\lim\frac{1}{n}(\log\|A^n(x)\| + \log\operatorname{sen}\beta_n); \lim\frac{1}{n}\log\|A^n(x)\|^{-1}\right\} = -\lambda(x)$$

Por otro lado $\|A^n(x)E^s_x\| \geq \|A^n(x)\|^{-1}$ con lo cual

$$\liminf\frac{1}{n}\log\|A^n(x)E^s_x\| \geq -\lambda(x) \Rightarrow \lim\frac{1}{n}\log\|A^n(x)E^s_x\| = \lambda(x)$$

Consideremos un vector $v \in \mathbb{R}^2\backslash E^s_x$ cualesquiera, entonces existe n_0 a partir del cual el ángulo entre v y s_n es mayor que α_0 si $n \geq n_0$, esto nos da con un cálculo similar a los de arriba

$$\|A^n(x)v\| \geq \|A^n(x)\|\sin\alpha_0 \qquad \forall n \geq n_0$$

Con lo cual

$$\liminf\frac{1}{n}\log\|A^n(x)v\| \geq \lambda(x)$$

Como también tenemos que $\limsup\frac{1}{n}\log\|A^n(x)v\| \leq \lambda(x)$. Para concluir la primera parte del Teorema (la parte no necesariamente invertible) falta ver solamente la invariancia de E^s_x, esto queda dado por el hecho de que las estimaciones que hicimos nos dan unicidad y eso implica la invariancia directamente.

Ahora, asumiendo que T es invertible, podemos definir análogamente, para casi todo punto de P la dirección E^u_x.

Afirmación. *$E^s_x \neq E^u_x$ para μ casi todo punto $x \in P$.*

Demostración.Basta probar que $\|A^n(x)E^u_x\| \to \infty$.

Consideramos $g_n(x) = \frac{1}{n}\log\|A^n(x)E^u_x\|$ que sabemos que converge μ-casi todo punto a una función $g(x)$ (que toma de hecho los valores $-\lambda(x)$ y $\lambda(x)$ dependiendo de si E^u_x coincide o no con E^s_x).

Se verifica que por definición de A^{-n} con $n > 0$([5]).

$$A^n(x)|E^u_x = (A^{-n}(T^n x)|E^u_{T^n x})^{-1}$$

Definiendo entonces $f_n(x) = -\frac{1}{n}\log\|A^{-n}(x)E^u_x\|$ obtenemos que $f_n \circ T^n = g_n$. Tenemos que $f_n \to \lambda$ y como λ es $T-$invariante, obtenemos que fijado $\varepsilon > 0$

[5]Estamos considerando la transformación lineal restricta al subespacio.

$$\mu(\{|g_n - \lambda| > \varepsilon\}) = \mu(\{|f_n - \lambda| > \varepsilon\}) \to 0$$

Con lo cual tenemos que g_n tiende en medida a λ y por lo tanto, como tiende casi todo punto a una función g, obtenemos que $g = \lambda$ en μ-casi todo punto. Esto concluye.

□

Ahora, vamos a utilizar la siguiente propiedad para ver que el ángulo entre E^s_x y E^u_x decrece subexponencialmente

Lema 3.1. *Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$ que verifica que $(\phi\circ T-\phi)^+$ es integrable, entonces tenemos que* $\lim \frac{1}{n}\phi(T^n x) = 0$ *para $\mu-$ casi todo punto.*

Demostración.Sea $g = \phi \circ T - \phi$, entonces, una suma telescópica nos da

$$\frac{\phi \circ T^n(x)}{n} - \frac{\phi(x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x)$$

Como $\frac{\phi(x)}{n} \to 0$ y por el Teorema de Birkhoff sabemos que existe una función medible e integrable $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ tal que para $\mu-$casi todo punto x tenemos que

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) = \tilde{g}(x)$$

Sea $A = \{x \ : \ \tilde{g}(x) > 0\}$.

Supongamos que $\mu(A) > 0$.

Sea $A_k = \{x \ : \ |\phi(x)| \le k\}$, sabemos que existe k_0 tal que $\mu(A \cap A_k) > 0$. Ahora, por el Teorema de recurrencia de Poincaré, casi todo punto de $A \cap A_k$ vuelve infinitas veces ahi, por lo tanto $\liminf \frac{1}{n}\phi(T^n x) = 0$ lo que contradice que $\tilde{g} > 0$. Esto prueba el Lema.

□

Ahora, sabemos que en general, si $L \in SL(2,\mathbb{R})$ tenemos que si $v \neq w$

$$\|L\|^{-2} \le \frac{\sin\langle(Lv, Lw)}{\sin\langle(v,w)} \le \|L\|^2$$

Entonces, si definimos $\phi(x) = \log\sin\langle(E^s_x, E^u_x)$, la estimación de arriba nos da que $|\phi \circ T(x) - \phi(x)| \le 2\log\|A\|$ con lo que esta en las hipotesis del Lema y concluimos la prueba de Oseledets.

4. Teorema de Oseledets caso general

Vamos a dar el enunciado del Teorema de Oseledets en el caso general y hacer algunos comentarios de como se puede probar.

Sea entonces $T : X \to X$ una transformación medible que preserva μ y $A : X \to GL(d,\mathbb{R})$ medible. Definimos nuevamente para $n > 0$

$$A^n(x) = A(T^{n-1}(x))\dots A(x)$$

Y si $n < 0$ lo definimos de la misma manera que antes.

Teorema 4.1 (Teorema de Oseledets General no invertible)**.** *Sea (T, A) un cociclo como arriba que verifica que $\log^+\|A\|$ y $\log^+\|A^{-1}\|$ son integrables. Entonces, existen funciones medibles k_x y $\lambda_1(x) > \dots > \lambda_{k_x}(x)$ y subespacios invariantes por el cociclo (es decir $A(x)F_j(x) = F_j(Tx)$) que varian mediblemente y*

$$\{0\} \subsetneq F_{k_x}(x) \subsetneq \dots \subsetneq F_1(x) = \mathbb{R}^d$$

tal que se verifica que para μ casi todo punto x, si $v \in F_i(x)\backslash F_{i+1}(x)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n(x)v\| = \lambda_i$$

En el caso invertible, se puede decir aún más (como era en el caso de dimensión dos)

Teorema 4.2 (Teorema de Oseldets General caso invertible)**.** *Sea (T, A) es un cociclo como el del Teorema anterior y además con T bimedible. Entonces, existen subespacios $E_1(x), \dots, E_{k_x}(x)$ medibles e invariantes por el cociclo tal que para μ-casi todo punto x se cumple que $\mathbb{R}^d = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_{k_x}(x)$ y que $E_i(x) \subset F_i(x) \backslash F_{i+1}(x)$ donde F_i son los subespacios del Teorema anterior. Además, se verifica que para todo $i \neq j$ se cumple que*

$$\lim \frac{1}{n} \log \sin\langle (E_i(x), E_j(x)) = 0$$

Sobre las pruebas se puede decir que la existencia de los exponentes (los λ_i) queda dada por aplicar el Teorema de Kingman a los productos exteriores (asi como la norma da el mayor exponente, y el determinante, que es el $d-$producto exterior da la suma de todos los exponentes, podemos hallar con este método todos los λ_i tomando $i-$productos exteriores).

Para hallar los subespacios invariantes, por ejemplo, si el espectro es simple (es decir, si $k_x = d$) podemos aplicar la misma técnica para hallar el F_d y luego trabajar en el cociente para seguir hallando los subespacios. En el caso que el espectro no es simple, se complica un poco, pero no es terrible. El caso invertible agrega algunas otras dificultades, pero muchas de las ideas estan presentes en el caso bidimensional.

Una prueba un poco diferente del caso general y que puede ser interesante se puede encontrar en [L].

Referencias

[AB] A. Avila y J. Bochi, TRIESTE LECTURE NOTES ON LYAPUNOV EXPONENTS PART I, (2008) disponibles en http://www.mat.puc-rio.br/ jairo/.

[AB2] A. Avila y J. Bochi, On the subadditive ergodic theorem, Notas disponibles en http://www.mat.puc-rio.br/ jairo/.

[BDV] C. Bonatti, L. Diaz y M. Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **102**. Mathematical Physics III. Springer-Verlag (2005).

[L] P. Lessa, Teoremas Ergódicos en espacios hiperbólicos, *Tesis de Maestría* PEDECIBA (2009).

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay

E-mail address: `rpotrie@cmat.edu.uy`