Universidad de la República
Facultad de Ingenieria
IMERL

Curso Cálculo 1 anual

Numerabilidad

Vamos a explicar el concepto de cardinalidad de un conjunto, y en particular de numerabilidad. Es muy fácil “contar”los elementos de un conjunto que contiene una cantidad finita de elementos, pero no ocurre lo mismo cuando un conjunto pasa a tener una cantidad infinita de estos.
Podemos pensar que contar los elementos de un conjunto equivale a definir una función inyectiva entre los elementos del conjunto y los números naturales; ¿esto que significa? , que vamos enumerando los elementos del conjunto de forma que a cada elemento le toque un número diferente. Como ejemplo vamos a tratar de “contar” los elementos del siguiente conjunto:

$$A = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$$

Para eso usaremos una función que a cada elemento del conjunto A le corresponda uno y uno solo del siguiente conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$; esta función se puede dar de diversas formas, por ejemplo:

$$f(\clubsuit) = 1 \; f(\diamondsuit) = 2 \; f(\heartsuit) = 3 \; f(\spadesuit) = 4$$

y de esta forma vemos que el conjunto A tiene 4 elementos. Es fácil ver que lo que acabamos de hacer es la forma habitual en la que contamos. ¿Cuándo decimos que dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos?, cuando contamos los dos y llegamos a que la cantidad de elementos de cada uno coincide. Esto puede parecer muy obvio para conjuntos finitos pero cuando los conjuntos pasan a ser infinitos pueden pasar cosas que no resulten tan evidentes.
Siguiendo con el razonamiento, dijimos que para comparar la cantidad de elementos de 2 conjuntos A y B creabamos una función biyectiva de A a algún subconjunto de naturales de la forma $\{1, 2, \ldots, n\}$ y otra de B a otro subconjunto de la forma $\{1, 2, \ldots, m\}$ y si se cumplia que $n = m$ teniamos que la cantidad de elementos de A era igual a la de B (eso lo vamos a expresar de la siguiente forma: $\sharp A = \sharp B$). O sea que tenemos que si $\sharp A = \sharp B$ se tiene:

$$A \xleftrightarrow{f} \{1, \ldots, n\} \xleftrightarrow{g} B$$

Donde f y g son funciones biyectivas por lo tanto podriamos prescindir del conjunto intermedio $\{1, \ldots, n\}$ y escribir directamente

$$A \xleftrightarrow{g \circ f} B$$

donde $g \circ f$ (la composición de ambas funciones) es también biyectiva. Esto va a motivar a la definición conjuntos de igual cardinal.

Definiciones

Primero recordaremos los conceptos de función inyectiva, biyectiva y sobreyectiva.

Definición 1. Dada una función $f : A \to B$ decimos que es

- *inyectiva* si cada elemento de A tiene un correspondiente distinto (es decir que $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$).
- *sobreyectiva* si todos los elementos de B tienen una preimagen (es decir $\forall b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$).
- *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva (es decir cada elemento de el codominio tiene una única preimagen).

Como vimos en la introducción, estamos preparados para decir cuando dos conjuntos cualquiera tienen la misma “cantidad de elementos”, o formalmente diremos que tienen igual cardinal o que son equipotentes.

Definición 2.
- Diremos que $\sharp A \preceq \sharp B$ si y sólo si existe una función inyectiva $f : A \to B$.
- Diremos que $\sharp A = \sharp B$ si y sólo si $\sharp A \preceq \sharp B$ y $\sharp B \preceq \sharp A$.

Ejercicio 1. Probar que $\sharp A \preceq \sharp B$ si y sólo si existe una función sobreyectiva $f : B \to A$.

Vamos a enunciar un teorema que no vamos a demostrar:

Teorema 1. $\sharp A = \sharp B$ *si y sólo si existe* $f : A \to B$ *biyectiva.*

Ahora tenemos a lo que llegamos en la introducción; que dos conjuntos tienen igual “cantidad de elementos”siempre que haya una función biyectiva entre ellos.

Tipos de infinito

A la hora de trabajar con conjuntos infinitos (que por definición son los conjuntos que no son finitos), surge una pregunta inmediatamente, ¿hay infinitos que no tengan “la misma cantidad de elementos”?. La respuesta a esta pregunta es, que con la definición que dimos, si hay.

Definición 3. Dado un conjunto X definimos el conjunto de potencia de X (o conjunto de partes) como el conjunto de todos sus subconjuntos.

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$$

Ejemplo 1. El subconjunto de partes del conjunto $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ es

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}\}$$

Probaremos ahora que el cardinal del conjunto de partes de un conjunto es mayor que su propio cardinal.

Teorema 2 (Cantor). $\sharp X \preceq \sharp \mathcal{P}(X)$ *y no existe ninguna función biyectiva entre ellos.*

Demostración. Es fácil ver la primera afirmación, basta considerar la función

$$f : X \to \mathcal{P}(X) \;\;/\;\; f(x) = \{x\} \; \forall x \in X$$

que claramente es inyectiva (es claro que si $f(x) = f(y)$ o sea que $\{x\} = \{y\}$ implica que $x = y$). Falta ver que no hay una biyección entre estos conjuntos. Vamos a suponer por absurdo que si existe una biyección $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ y vamos a considerar el siguiente conjunto:

$$\mathcal{U} = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$$

que esta bien definido por que $\varphi(x)$ es un subconjunto de X para todo $x \in X$. Como φ es una biyección y $\mathcal{U}$ un subconjunto de X (o sea que pertenece a $\mathcal{P}(X)$) tenemos que existe un único elemento $y \in X$ tal que $\varphi(y) = \mathcal{U}$. ¿Que pasa si $y \in \mathcal{U}$? eso significaria que $y \notin \varphi(y) = \mathcal{U}$ (por la definición de $\mathcal{U}$), pero si $y \notin \mathcal{U} = \varphi(y)$ entonces $y \in \mathcal{U}$. Esto nos lleva a un absurdo; por lo tanto estuvo mal suponer que existia tal biyección, lo que demuestra el teorema.

$\square$

Conjuntos Numerables

En esta sección vamos a ver algo acerca de los conjuntos numerables, que son de alguna forma los conjuntos infinitos más fáciles de estudiar.

Definición 4. Un conjunto A es *numerable* si y sólo si se tiene $\sharp A = \sharp \mathbb{N}$ (Recordar que $\mathbb{N} = \{1, 2 \ldots, n, \ldots\}$.

Estos conjuntos son más sencillos de estudiar porque el hecho de que exista una biyección con los naturales implica que se puede generar una lista de estos elementos (aunque esta lista no termine debido a que los naturales son infinitos). Contar estos elementos equivale a ordenarlos de forma que atrás de uno cualquiera haya una cantidad finita de la misma forma que hacíamos cuando contábamos un conjunto finito, asociándole números distintos a cada elemento, pero ahora pasan cosas más extrañas, ya que dependiendo como ordene a los elementos podré cumplir este requisito o no. Un ejemplo claro en donde se ve esto es que si quiero ordenar a todos los naturales y lo hago de forma que cualquier impar sea mayor que cualquier par, manteniendo entre ellos el orden usual:

$$2 < 4 < 6 < \ldots < 2n < \ldots\ldots < 1 < 3 < \ldots < 2k + 1 < \ldots\ldots$$

en este caso atras del 1 hay infinitos elementos (i.e. todos los pares). Sin embargo si los ordenamos de la forma usual

$$1 < 2 < 3 < \ldots < n < \ldots\ldots$$

tenemos que atrás de un elemento cualquiera, digamos m hay una cantidad finita de elementos (i.e. $m - 1$ elementos). Con este ejemplo canónico vemos que esta forma de ordenar no implica que el conjunto sea finito (a pesar que atras de cada elemento haya una cantidad finita).

En esta sección solo vamos a ver dos propiedades importantes de los conjuntos numerables, y mostrar que el intervalo $[0, 1)$ de reales no los es; en el práctico 2 se pueden encontrar más propiedades, también importantes acerca de estos conjuntos (claramente en el práctico se encuentran sin demostrar).

Proposición 3. *Si A y B son numerables entonces $A \times B$ también lo es.*

Demostración. Es fácil ver que equivale a probar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable (queda como ejercicio encontrar una biyección entre $A \times B$ con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Para ver que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable vamos a encontrar dos funciones inyectivas, una de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y otra de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. La primera es bastante sencilla de encontrar, se puede tomar la siguiente función que lleva $n \mapsto (n, 1)$ que es claramente inyectiva. La otra no es tan fácil de encontrar, pero es fácil ver que la siguiente función es inyectiva (queda como ejercicio):

$$(n, m) \mapsto 2^n 3^m$$

Puede resultar útil recordar que la descomposición de un número en factores primos es única. $\square$

Proposición 4. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable*

Demostración. La omitiremos. En caso que les interese pensarlo, sugiero que usen la proposición anterior y se definan una función de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en la unión que sea inyectiva. $\square$

Para terminar este repartido veremos que los numeros reales en el intervalo $[0, 1)$ no son numerables. Es fácil ver que todos los numeros en ese intervalo los podemos escribir de la siguiente forma:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \dots$$

Si los pudiésemos contar (o sea si fuesen numerables) tendríamos una lista de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots a_{1n} \dots \dots \\ 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots a_{2n} \dots \dots \\ 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots a_{3n} \dots \dots \\ 0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \dots a_{4n} \dots \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Pero es fácil ver que tal lista no puede existir porque sea cual sea la lista va a existir un elemento del conjunto que no va a pertenecer a la lista (o sea que no va a haber sido contado). Por ejemplo el número $x = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots \dots$ donde $b_j \neq a_{jj}$ no pertenece a la lista.

Notas realizadas por Rafael Potrie para la modalidad anual del curso de Cálculo Diferencial e Integral 1 del año 2005. Revisadas en setiembre de 2006.