Lema de Pliss

Rafael Potrie

15 de enero de 2007

Se presentará la prueba de un resultado con diversas aplicaciones. Forma parte de las cosas que escribí para mi monografía pero quedaron de clavo.

La primera aplicación que se le dió fue para probar que los difeomorfismos de $\mathcal{F}(M)$ no pueden tener infinitos pozos o sillas y fue presentada por Pliss (en [Pl]).

Es un resultado puramente aritmético que muestra como si en un período grande se da una contracción exponencial medianamente fuerte entonces se puede asegurar que habrán "tiras" hiperbólicas (se le llaman tiempos hiperbólicos) para las cuales la contracción exponencial se da en todos los pasos.

La utilidad de esto es muy grande pues son muchas las circunstancias donde se conoce la contracción únicamente en tiempos grandes. La demostración que se presentará se basa en [M]. Una versión más simple y muy interesante ya que puede resultar muy útil (se demuestra el mismo resultado, pero para puntos periódicos) con una demostración también más simple se puede encontrar en [Less] (capítulo 5).

Para encontrar más aplicaciones de este resultado ver [Wen] o [BDV].

Una explicación de lo que es un tiempo hiperbólico puede ser mejor entendida en vistas de una figura (Figura 1).

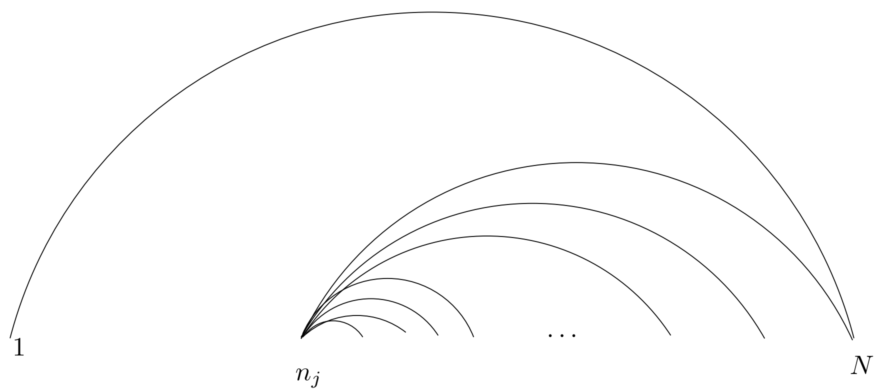

Figura 1: Tiempo Hiperbólico

Supongamos que se tiene un producto $\prod_{n=1}^{N} a_n < \lambda^N$ donde $0 < \lambda < 1$. Lo que interesa en general es tener una propiedad del tipo $\prod_{i=1}^{n} a_i < \lambda^n \ \forall n$. Esto en general no será posible, pero el Lema de Pliss da algo que en muchos casos logra suplir esa exigente condición.

La idea es que si se tiene contracción exponencial en una tira suficientemente larga (de N pasos) van a haber valores n_j para los cuales haya contracción exponencial en todos los pasos (para un valor λ_1 tal que $0 < \lambda < \lambda_1 < 1$). Visto en la figura 1, si los arcos indican contracción exponencial el Lema de Pliss asegura que la existencia de el arco grande implica la existencia de valores n_j (además nos da una cota inferior que tiende a infinito con N para la cantidad de valores!!!) para los cuales exista contracción hiperbólica en todos los pasos (como se ve en la figura).

El enunciado más utilizado (sacado de [PS]) parece tener que ver con la dinámica tangente pero es puramente aritmético como se hará evidente al realizar la prueba.

Teorema 0.1 (Lema de Pliss). *Dado* $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ *y* $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$*, existen, un entero positivo* $N = N(\gamma_1, \gamma_2, f)$ *y* $c = c(\gamma_1, \gamma_2, f) > 0$ *con la siguiente propiedad: Si* $x \in M$*,* $S \subset T_xM$ *cumple que existe* $n > N$ *donde vale (si* $S_i = Df^i(S)$*),*

$$\prod_{i=0}^{n} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_1^n$$

Entonces, existen $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_l \leq n$ *tal que*

$$\prod_{i=n_r}^{n_r+j} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_2^j \ ; \ r = 1, \ldots, l \ \ ; \ 1 \leq j \leq n - n_r$$

Además, $l \geq cn$*.*

El enunciado puede parecer sumamente recargado. Mucha de la recarga (tanto en la notación como en el enunciado) se apoya en que el teorema asegura también la existencia de una cantidad grande de "tiempos hiperbólicos" cosa que resulta sumamente importante en algunas circunstancias.

A mi gusto, conviene primero entender la parte del enunciado que asegura la existencia y luego ver el hecho de que estos momentos son muchos. En definitiva, lo que dice es que si hay buena contracción exponencial de valor γ_1 en un tiempo suficientemente grande (mayor a N)

$$\prod_{i=0}^{n} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_1^n$$

entonces existirá un punto $1 < n_r < n$ en el cual se cumpla que

$$\prod_{i=n_r}^{n_r+j} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_2^j \ \ 1 \leq j \leq n - n_r$$

que es contracción exponencial en todos los pasos. El tiempo grande (n) que se pide para poder asegurar la existencia de n_r va a estar dado naturalmente por la contracción γ_1 la contracción que se pretende asegurar γ_2 y naturalmente también por una cota del valor de $\|Df\|$ (que siendo la variedad compacta existe) y por eso la dependencia con f. Ahora, se ve también que si no sabemos de la existencia de muchos valores n_r con esa propiedad no sabremos si esas tiras son aceptablemente largas (pues n_r perfectamente podría ser $n-1$). Para eso, el teorema también proporciona una constante $c > 0$ que dependerá de los mismos factores que asegura la existencia de por lo menos $l \geq cn$ valores distintos, y por lo tanto una tira de largo al menos cn.

Ahora, siguiendo a [M] se probará el siguiente Lema que implica el Teorema 0.1.

Lema 0.2. *Dados* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $\varepsilon > 0$ *y* $H > 0$*, existen* $N = N(\lambda, \varepsilon, H) \in \mathbb{Z}^+$ *y* $c = c(\lambda, \varepsilon, H)$ *de forma tal que si* $a_1, \ldots, a_n$ *(*$n > N$*) cumplen que* $|a_j| \leq H \ \forall j = 1 \ldots n$ *y se cumple*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n\lambda$$

Entonces existen $1 \leq n_1 < \ldots < n_l \leq n$ *tal que*

$$\sum_{i=n_j}^{n_j+r} a_i \leq (n - n_j)(\lambda + \varepsilon) \ j = 1 \ldots l \ ; \ 0 < r \leq n - n_j$$

Además, $l \geq cn$*.*

Primero se verá como de este lema se deduce el Teorema 0.1. La idea es transformar los productos en sumas mediante logaritmos y utilizar que la función f está definida en M compacta y por lo tanto su diferencial acotado.

Sea $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ y $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$, y a partir de ellos se define $H = \log(K)$ (donde $K = \max_{x\in M}\{\|Df_x\|\}$), $\lambda = \log(\gamma_1)$ y $\varepsilon = \log(\gamma_2) - \log(\gamma_1)$. Entonces, el Lema 0.2 da constantes N y c de forma tal que se cumple que si $n > N$, $|a_i| < H$ y

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n\lambda$$

entonces existen $1 \leq n_1 < \ldots < n_l \leq n$ tal que

$$\sum_{i=n_j}^{n_j+r} a_i \leq (n-n_j)(\lambda+\varepsilon)\ j = 1\ldots l\ ;\ 0 < r \leq n - n_j$$

y además $l \geq cn$.

Traduciendo esto, se ve que si se considera un subespacio $S \subset T_xM$ y se cumple que para $n > N$

$$\prod_{i=0}^{n} \|Df|_{S_i}\| \leq \gamma_1^n$$

entonces tomando logaritmos se llega a que:

$$\sum_{i=1}^{n} \log\left(\|Df|_{S_i}\|\right) < n\lambda$$

Entonces, tomando $a_i = \log\left(\|Df|_{S_i}\|\right)$ se ve que se cumple que $|a_i| < H$ y por lo tanto se tienen los valores n_j deseados los cuales deshaciendo los logaritmos nos dan la tesis del teorema.

Se observa que el Lema 0.2 es más general que el Teorema 0.1,ya que en ningún momento se usa que γ_1 y γ_2 sean menores que 1 de hecho se puede utilizar la siguiente versión inversa. El enunciado es el siguiente

Teorema 0.3 (Lema de Pliss inverso). *Dado $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$ y $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$, existen, un entero positivo $N = N(\gamma_1, \gamma_2, f)$ y $c = c(\gamma_1, \gamma_2, f) > 0$ con la siguiente propiedad: Si $x \in M$, $S \subset T_xM$ cumple que existe $n > N$ donde vale (si $S_i = Df^i(S)$),*

$$\prod_{i=0}^{n} \|Df|_{S_i}\| \geq \gamma_2^n$$

Entonces, existen $0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_l \leq n$ tal que

$$\prod_{i=n_r}^{n_r+j} \|Df|_{S_i}\| \geq \gamma_1^j\ ;\ r = 1, \ldots, l\ \ ;\ 1 \leq j \leq n - n_r$$

Además, $l \geq cn$.

La demostración es análoga, pero hay que observar que si

$$\prod a_i \leq \gamma^n \Rightarrow \prod \frac{1}{a_i} \geq \gamma^{-n} = (\gamma^{-1})^n$$

Por último, se pasa a la demostración del Lema 0.2

Demostración del Lema 0.2. La idea consiste en tener en cuenta que como los pasos de la suma están acotados, no puede ser que se mantenga por encima de una curva con pendiente $\lambda + \varepsilon$ por mucho tiempo pues sino no va a tener “tiempo” para bajar (ver figura 2 para ver lo que se quiere obtener). Para que las cuentas sean más sencillas, se restará la pendiente $\lambda + \varepsilon$ de forma tal que lo que se busca es que las sumas en adelante se mantengan por debajo de las sumas parciales hasta un número anterior (ver figura 3).

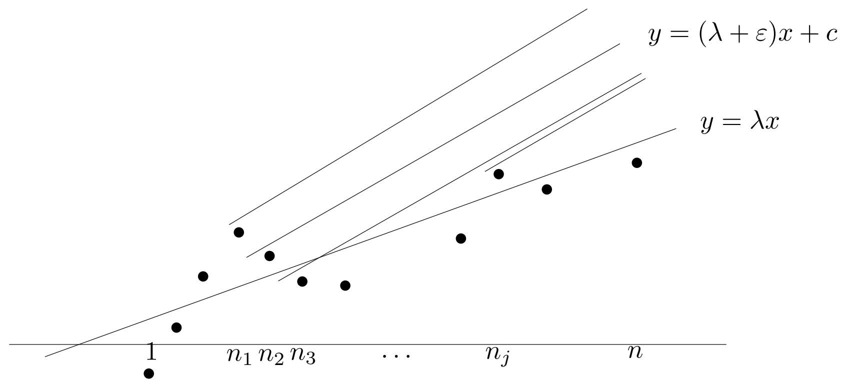

Figura 2: Buscando los n_j

Por eso, se considera $b_i = a_i - (\lambda + \varepsilon)$ y $S_i = \sum_{j=1}^{i} b_j$ que por hipótesis va a cumplir $S_n \leq -n\varepsilon$.

Si se considera ahora, a los enteros $n_1 < \ldots < n_l$ entre 1 y n que cumplan que $S_{n_j} \geq S_k$ $\forall n \geq k \geq n_j$. Estos van a ser los valores buscados pues para estos se cumple que

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n_j} b_j - \sum_{j=1}^{k} b_j = - \sum_{j=n_j+1}^{k} b_j = - \sum_{j=n_j+1}^{k} a_j + (k - n_j)(\lambda + \varepsilon) \Rightarrow \sum_{j=n_j+1}^{k} a_j \leq (k - n_j)(\lambda + \varepsilon)$$

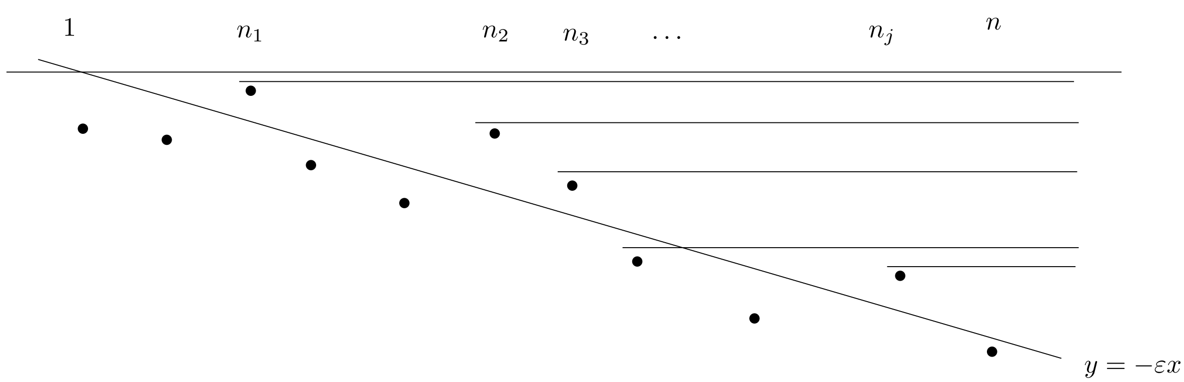

Figura 3: Sumas parciales de b_i

Está claro que $n_l = n$, ahora falta ver que hay alguno (por lo que se comentó antes de que es bueno saber que haya alguno) y luego acotar la cantidad por debajo.

Para que haya más de uno, basta considerar n suficientemente grande (de forma tal que el máximo de S_i no se alcance en S_n, recordar que $|S_1| \leq H + (|\lambda| + \varepsilon)$ y $S_n \leq -n\varepsilon$). Entonces tomando

$$n > \frac{H + |\lambda| + \varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow S_n \leq -n\varepsilon < -(H + |\lambda| + \varepsilon) \leq a_1 - (|\lambda| + \varepsilon) = b_1 = S_1$$

Por lo tanto existe $m = 1 \dots n-1$ tal que S_m es el máximo valor de S_j con $1 \leq j \leq n$ y por lo tanto m es uno de los n_j buscados.

Para estimar el valor de l (recordar que aún se pueden elegir el valor de N cumpliendose que sea mayor que $\frac{H+\lambda+\varepsilon}{\varepsilon}$ y aún no se eligió c).

Se sabe que si $1 \leq j \leq l$ se cumple que $S_{n_{(j+1)}} \geq S_{n_j+1}$ pues si fuese $S_{n_{(j+1)}} < S_{n_j+1}$ se podría considerar $n_{(j+1)} = n_j + 1$.

Entonces se tiene

$$S_{n_{(j+1)}} \geq S_{n_j+1} = S_{n_j} + b_{n_j+1} \geq S_{n_j} - (H + |\lambda| + \varepsilon)$$

Por lo tanto, trabajando por inducción se concluye que

$$S_{n_j} \geq S_{n_1} - (j-1)(H + |\lambda| + \varepsilon)$$

que en particular da (recordando que $n_l = n$)

$$-n\varepsilon \geq S_n = S_{n_l} \geq S_{n_1} - (l-1)(H + |\lambda| + \varepsilon)$$

pero además $S_1 \leq S_{n_1}$ (pues si no fuese así, se podría tomar $n_1 = 1$) entonces se llega a que

$$-n\varepsilon \geq S_1 - (l-1)(H + |\lambda| + \varepsilon) \geq -H - |\lambda| - \varepsilon - (l-1)(H + |\lambda| + \varepsilon) = -l(H + |\lambda| + \varepsilon)$$

pues $S_1 = b_1 = a_1 - (\lambda + \varepsilon)$ y $|a_1| < H$. Resumiendo, se obtuvo que

$$l(H + |\lambda| + \varepsilon) \geq n\varepsilon \Rightarrow l \geq n\frac{\varepsilon}{(H + |\lambda| + \varepsilon)}$$

Por lo tanto finaliza la demostración eligiendo $N > \frac{H+|\lambda|+\varepsilon}{\varepsilon}$ y $c < \varepsilon(H + |\lambda| + \varepsilon)$.

$\square$

Referencias

[BDV] C. Bonatti, L.J. Díaz y M. Viana, Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, *Springer-Verlag* (2005).

[Less] P. Lessa, Dinámica Genérica en Superficies, *Monografía de Licenciatura* CMAT (2006).

[M] R.Mañe, Teoria Ergódica,*Projeto Euclides, CNPq IMPA* (1983).

[Pl] V.A. Pliss, On a conjecture of Smale, *Diff. Uravnenija* **8** (1972), 268-282.

[PS] E.R. Pujals y M.Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Annals of Math.* **151** (2000), 961-1023.

[Wen] L. Wen, Selection of quasi-hyperbolic strings, *Notas de curso* International Conference on Global Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, USA (2006).