PRUEBA ELEMENTAL DEL TEOREMA DE INVARIANCIA DE LA DIMENSION

RAFAEL POTRIE

RESUMEN. La idea es dar una prueba "elemental"del Teorema de invariancia de la dimension que afirma que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto homeomorfo a un abierto $V \subset \mathbb{R}^m$ entonces $n = m$. Por elemental nos referimos a que se puede entender sabiendo Cálculo Diferencial en varias variables (preferiblemente también topología, aunque creo que se puede sin ella y en lo posible también cálculo en superficies o variedades, alcanza la esfera)[1]. Obvio que cuanto mas se sepa mejor, y la idea es dar una prueba medianamente directa y incluir en los apéndices pruebas a los resultados utilizados.

Índice

1. Introducción

Usualmente en los cursos básicos, generalmente luego de definir el diferencial de una función diferenciable, se ve como corolario que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son difeomorfos si $n \neq m$. Lo mismo se puede ver para abiertos de estos espacios. Esto se debe a que si se tiene un difeomorfismo entre estos espacios, entonces el diferencial tiene que ser un isomorfismo y por lo tanto basta probar el resultado para transformaciones lineales lo cual es bastante trivial.

También usualmente, se nos dice que demostrar el teorema análogo para homeomorfismos es "mucho" más difícil. Sin duda la frase tiene algo de razón, ya que no contamos para mostrar este teorema con el apoyo de el álgebra lineal, pero creo que muchas veces se exagera en ello, espero con esta nota eliminar en otros el posible "miedo" a este teorema (miedo que me aquejó durante mucho tiempo a mi!).

El enunciado del teorema es entonces el siguiente:

Teorema 1.1. *Sea U abierto de $\mathbb{R}^n$ y V abierto de $\mathbb{R}^m$ tal que U y V son homeomorfos*[2]*. Entonces, $n = m$.*

---

[2]Solo por maniatico que soy, dudo que alguien que no entienda esta palabra lea la nota, pero va, dos espacios son *homeomorfos* si existe una función continua, biyectiva y con inversa continua de uno al otro, a dichas funciones les llamamos *homeomorfismos*.

Vamos a probar el teorema a fondo en el caso que U y V son $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Daremos despues unas indicaciones de como se prueba el caso general, pero las ideas estan en el caso que veremos.

Por lo pronto, yo conozco dos ataques escencialmente diferentes a la prueba de este teorema. Ambos tienen un factor comun, su prueba consiste en encontrar un invariante topologico (algo que se preserva por homeomorfismos) que sea diferente para abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ si $n \neq m$. Uno de estos invariantes es la dimensión topológica el otro, tiene que ver con propiedades algebraicas que se preservan por homotopias (cosa que definiremos más adelante). La prueba que elegí escribir tiene que ver con el segundo enfoque, pero no es la que yo más conozco (que utiliza un invariante llamado *homología*), esta se basará en lo que se llama *tipo de homotopía*.

Me parece interesante mencionar una prueba de un resultado intermedio entre el diferenciable y el meramente continuo que es el caso Lipchitz (si el lector no sabe que es, siga a la siguiente sección, lo que sigue no será utilizado) en el cual la dimensión de Hausdorff es un invariante que permite distinguir $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^m$ en esta categoría. Agradezco a Pablito Lessa por esta observación que considero muy interesante.

2. La demostración módulo algunos resultados

2.1. Estrategia de la prueba. Primero pensemos en un caso más fácil: Supongamos que hay un homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Sea $\hat{h} = h|_{\mathbb{R}-\{0\}} : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}^n - \{h(0)\}$, que también será un homeomorfismo evidentemente. El problema aquí es que si tenemos un homeomorfismo entre dos espacios y uno de ellos no es conexo, el otro tampoco puede serlo, y no es dificil de ver que si $n > 1$ al quitarle un punto a $\mathbb{R}^n$ no rompemos su conexidad. Esto prueba que $n = 1$.

La estrategia no va a ser diferente a esto. Vamos a considerar un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y considerar el homeomorfismo $\hat{h} = h|_{\mathbb{R}^n-\{0\}} : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^m - \{h(0)\}$. En este caso la conexión no nos dirá nada, pero vamos a buscar otro invariante que nos permita ver que $n = m$.

Para algún lector es posible que en el caso $n = 2$ la conexión simple le permita hacer la misma prueba que hicimos en este caso. Al sacar un punto a $\mathbb{R}^2$ este deja de ser simplemente conexo pero esto no pasa si $n > 2$. Pero dudo que alguien que no sepa la prueba del teorema que vamos a demostrar pueda llenar todos los detalles necesarios en la demostración de este caso (que escencialmente incluye todas las ideas). Nosotros lo haremos en estas notas.

La idea es la siguiente, si le sacamos el 0 a $\mathbb{R}^n$, y ponemos una esfera de dimensión $n-1$ alrededor de este punto (por ejemplo, la esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}$) entonces no la vamos a poder deformar[3] a un punto en este espacio. Cosa que si podremos hacer si consideramos una esfera de dimensión menor. En el caso $n = 1$ esto se ve claro, una esfera de dimensión 0 es tomar dos puntos, uno de cada lado del cero, en $\mathbb{R} - \{0\}$ no podemos mover los puntos a un mismo punto (pues estan en componentes conexas diferentes) pero en dimensión mayor basta tomar una curva que los una y mover uno hacia al otro hasta colapsarlos.

Ya hablamos de la estrategia y de la idea. Ahora voy a comentar brevemente las técnicas que vamos a utilizar. Primero vamos a tener que presentar la homotopía, que es la manera de formalizar las "deformaciones". Después veremos que podemos demostrar sin mucha dificultad los teoremas para mapas diferenciables y por último veremos como aproximar mapas continuos por mapas diferenciables.

Vale la pena observar que el hecho de que los mapas diferenciables aproximan a los continuos no alcanza para probar el teorema con un argumento del estilo: "Si tengo un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, lo aproximo por un difeomorfismo y aplico el teorema en este caso y por lo tanto $n = m$" lo cual resulta muy tentador. El problema es que aproximar funciones continuas por diferenciables no es muy dificil, pero no es para nada claro que una funcion diferenciable que aproxime un homeomorfismo tenga que ser un difeomorfismo!!.

[3]Estas cosas las vamos a presentar formalmente.

Me interesa hacer una aclaración. Por un lado, estamos intentando probar un teorema que resulta muy intuitivo, ya sea por la imagen mental que tenemos de los espacios $\mathbb{R}^n$ asi por el resultado análogo para difeomorfismos. Esto a mi gusto amerita ser muy cuidadoso en las cosas que uno se "cree" y es por eso que quiero dar una prueba completa.

2.2. Homotopía. Dadas dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ (si se desea se puede suponer que X e Y son subespacios de algun $\mathbb{R}^k$), decimos que son *homotópicas* (y lo denotamos como $f \sim g$) si existe una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ de forma tal que $H(x,0) = f(x)\ \forall x \in X$ y $H(x,1) = g(x)\ \forall x \in X$.

Esta relación formaliza lo que pensamos por "deformar continuamente" una función en la otra.

No es difícil ver que es una relación de equivalencia:

- Para ver que $f \sim f$ consideramos $H(x,t) = f(x)\ \forall x, t$.
- Para ver que $f \sim g$ si y solo si $g \sim f$ consideramos $H(x,t)$ dada por $f \sim g$ y construimos $\hat{H}(x,t) = H(x, 1-t)$ que nos da $g \sim f$. El reciproco es simetrico.
- Para ver que $f \sim g$ y $g \sim h$ implica $f \sim h$ utilizamos $H(x,t)$ dada por $f \sim g$ y $G(x,t)$ dada por $g \sim h$ para definir $K(x,t) = H(x,2t)$ si $t \in [0,1/2]$ y $K(x,t) = G(x, 2t-1)$ si $t \in [1/2, 1]$. Es un ejercicio ver que K es continua y nos da $f \sim h$.

Decimos que una función continua $f : X \to Y$ es *homotopica a una constante* si existe una función constante g (es decir $g(x) = y_0$ para todo $x \in X$) tal que $f \sim g$.

2.3. Demostración del Teorema. Vamos a utilizar los siguientes dos Teoremas que demostraremos más adelante:

Teorema 2.1. *Si $n < m$ entonces cualquier función continua $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ es homotópica a una constante.*

Teorema 2.2. *La función $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ dada por $f(x) = x$ no es homotópica a una constante*[4].

Demostracion del Teorema principal aceptando los teoremas de arriba. Ahora suponemos que tenemos un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $h(0) = 0$ (componemos con una translación por ejemplo). Tenemos entonces definido un homeomorfismo $\hat{h} : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$.

Supongamos por absurdo que $n < m$ (esto es suficiente pues h es un homeomorfismo entonces basta tomar el inverso para tener esta situación).

Consideramos el mapa $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ dado por $f(x) = x$ que sabemos no es homotopico a una constante por el Teorema 2.2. Ahora consideramos el mapa $g = \hat{h} \circ f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ que sabemos es homotopico a una constante por el Teorema 2.1.

Sea entonces $H : S^{n-1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ tal que $H(x,0) = g(x)$ y $H(x,1) = x_0$, la homotopia entre g y una constante. Definimos ahora $G : S^{n-1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ como $G(x,t) = \hat{h}^{-1}(H(x,t))$ que es una funcion continua y verifica que $G(x,0) = f(x)$ y $G(x,1) = \hat{h}^{-1}(x_0)$ lo cual es absurdo pues f no era homotopica a una constante. Esto prueba el teorema a menos de los dos teoremas que aceptamos.

□

2.4. Demostración del Teorema 2.1. Sea $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m - \{0\}$ una función continua. A partir de ella podemos construir una función $g : S^{n-1} \to S^{m-1}$ definida como $g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ que está bien definida y es continua gracias a que $f(x) \neq 0$ para cualquier x.

[4]Estamos pensando S^{n-1} como subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con lo cual esta bien definida la función f.

Basta ver que g es homotópica a una constante ya que $f \sim g$ por medio de la homotopía $H(x,t) = \frac{f(x)}{(1-t)\|f(x)\|}$ (es trivial verificar que H es continua y realiza $f \sim g$).

Observamos que si g no es sobreyectiva alcanza para probar el Teorema, para eso utilizaremos el siguiente Lema muy sencillo que nos será útil, en el enunciado agregaremos una observación que recién utilizaremos en la prueba del Teorema 2.2:

Lema 2.1. *Sean $a, b : X \to S^k$ funciones continuas. Si $a(x) \neq -b(x)$ para todo $x \in X$, entonces $a \sim b$. Además, si a, b son diferenciables, la homotopia se puede considerar diferenciable.*

Demostracion . Consideramos la homotopia

$$H(x,t) = \frac{ta(x) - (1-t)b(x)}{\|ta(x) - (1-t)b(x)\|}$$

que es una homotopia que nos lleva de a a b y es tan regular como la menos regular entre a y b (observar que el denominador no se anula por hipotesis).

□

A partir de este lema, observamos que si g no es sobreyectiva, entonces, siendo x_0 un punto que no pertenece a su imágen, tenemos que la función constante $a(x) = -x_0$ verifica el lema y $g \sim a$.

La prueba finaliza observando que podemos conseguir h homotópica a g que no sea sobreyectiva[5]. Esto se puede hacer sin mucha dificultad a mano. Sin embargo vamos a utilizar el siguiente lema de aproximación, también "elemental", que probaremos en la siguiente sección y también nos servirá para probar el Teorema 2.2.

Lema 2.2. *Sea $a : M \to \mathbb{R}^m$ una función continua donde M es una variedad compacta. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe una función de clase C^1, b, tal que $\|b(x) - a(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in U$.*

Utilizando metodos clasicos del tipo particiones de la unidad se puede hacer que este lema valga también para funciones que van a variedades[6], y por lo tanto tenemos que existe $\hat{g} : S^{n-1} \to S^{m-1}$ de clase C^1 tal que $\|g(x) - \hat{g}(x)\| < \varepsilon$. Habiendo elegido ε pequeño, estamos en las hipotesis del lema 2.1 y por lo tanto $g \sim \hat{g}$. Es fácil ver que una función de clase C^1 no puede ser sobreyectiva de S^{n-1} a S^{m-1} siendo $n < m$ con lo cual $\hat{g}$ es homotópica a una constante y terminamos la prueba.

Por las dudas dejamos este lema elemental para la seccion de prerequisitos[7]:

Lema 2.3. *Una función C^1 de S^{n-1} en S^{m-1} con $n < m$ no puede ser sobreyectiva.*

2.5. Demostración del Teorema 2.2. Utilizaremos para probar esto el siguiente resultado clasico de Topología diferencial. Para probarlo (cosa que haremos en la sección siguiente) se utiliza un concepto llamado grado módulo dos de un mapa diferenciable y posiblemente es lo más avanzado en cuanto a teoría que estamos utilizando en esta prueba. El resultado dice que no existe una homotopia entre la identidad y una constante en la esfera, lamentablemente las tecnicas que utiliza son diferenciables y por lo tanto vamos a tener que utilizar el lema 2.2 para poder aplicarlo.

[5]Esto puede parecer evidente a priori, ya que la dimensión de S^{n-1} es menor a la de S^{m-1}. Sin embargo, hay funciones continuas de S^{n-1} en S^{m-1} que son sobreyectivas!. De S^1 a S^2 se puede hacer un ejemplo no muy dificil conociendo la curva de Peano.

[6]Basta que valga para funciones a la esfera para nuestros propositos. En este caso se puede adaptar de la siguiente manera, si tenemos un mapa de M en $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y la aproximamos por una función C^r cercana, podemos luego proyectarla en la esfera sin perder diferenciabilidad y obtener lo deseado.

[7]El lector familiarizado con la dimensión de Hausdorff podrá fácilmente deducir este lema ya que una función C^1 no puede aumentar la dimensión de Hausdorff.

Lema 2.4. *No existe un mapa $H : S^n \times [0,1] \to S^n$ diferenciable verificando $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$.*

Utilizando esto, veremos que si existe una homotopía entre $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $f(x) = x$ y una función constante, esta nos permitirá realizar una homotopía diferenciable que contradiga el lema 2.4.

Sea entonces $F : S^{n-1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = x_0$. Como F nunca se anula, podemos definir la siguiente homotopia, ahora a la esfera mismo, $\hat{F} : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ es tal que $\hat{F}(x,t) = \frac{F(x,t)}{\|F(x,t)\|}$. Claramente, $\hat{F}$ es una homotopia entre f y una constante también, solo que esta tiene como codominio la esfera solamente.

Aplicando el lema 2.2 a $\hat{F}$ podemos aproximar $\hat{F}$ por una funcion diferenciable $G : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ tal que $\|G(x,t) - \hat{F}(x,t)\| < \varepsilon$ para todo (x,t).

Utilizamos ahora el lema 2.1 que nos permite ver tanto que existe una homotopia diferenciable entre $G(\cdot,0)$ y la identidad de la esfera asi como una homotopia diferenciable entre $G(\cdot,1)$ y la función constante. La concatenación de esas tres homotopias será una homotopía entre la identidad y la constante en la esfera que salvo en los puntos donde las "pegamos" será diferenciable[8]. De todas maneras, esto se soluciona con el siguiente sencillo lema (de Topologia diferencial) que dice:

Lema 2.5. *La homotopia diferenciable es una relación de equivalencia entre funciones diferenciables.*

Demostracion .Tenemos $H(x,t)$ y $G(x,t)$ dos homotopias diferenciables de forma tal que $H(x,1) = G(x,0)$ $\forall x$. Basta entonces definir el mapa

$$L(x,t) = \begin{cases} H(x,\alpha(t)) & t \in [0,1/2] \\ G(x,\beta(t)) & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Donde $\alpha(t)$ es una función diferenciable tal que $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1/2) = 1$ y $\alpha'(1/2) = 0$ y $\beta(t)$ es una funcion diferenciable tal que $\beta(0) = 1/2$, $\beta(1) = 1$ y $\beta'(1/2) = 0$. La existencia de estas funciones se puede ver con argumentos similares a los de la sección 3.1. De hecho, se pueden considerar C^∞.

□

Esto concluye el Teorema 2.2.

□

3. Demostración de los resultados elementales utilizados

3.1. Aproximacion de funciones continuas por funciones diferenciables. El objetivo de esta sección es probar el Lema 2.2.

Lo primero que hay que ver es que existe una función $\varphi : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to [0,1]$ de clase C^∞ verificando las siguientes propiedades:

- $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in [0,1/2]$.
- $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in [0,1)$.
- $\varphi(x) = 0$ para todo $x \geq 1$.

Esto es sencillo, consideramos primero la función $\psi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ para $x > 0$ y 0 para $x \leq 0$ que es una función de clase C^∞. Ahora, consideramos la función

$$\varphi(x) = \frac{\int_x^1 \psi(t-1/2)\psi(1-t)dt}{\int_{1/2}^1 \psi(t-1/2)\psi(1-t)dt}$$

[8]Es muy facil probar que concatenar las homotopias queda continuo, pero no necesariamente concatenando homotopias diferenciables queda diferenciable

que no es dificil verificar cumple las propiedades deseadas.

Ahora, dada una función $a : M \to \mathbb{R}^n$ continua que queremos ε aproximar por una función diferenciable, con M compacta, consideramos por la continuidad uniforme δ de forma tal que $d(x,y) < 2\delta$ implique $\|a(x) - a(y)\| < \varepsilon/2$.

Consideramos entonces un conjunto finito $x_1, \dots, x_k \in M$ de forma tal que $\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta) = M$. Ahora consideramos las funciones $\tilde{\lambda}_i(y) = \varphi(\delta d(y, x_i))$ que extendemos como 0 fuera de $B(x_i, \delta)$.

Ahora definimos las funcion $\lambda(y) = \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i(y)$ que es una función que no se anula en ningun punto de M. Llamamos $\lambda_i(y) = \tilde{\lambda}_i(y)/\lambda(y)$. Se verifica que $\lambda_i(y) \in [0,1]$ $\forall y \in M$ y que $\sum_{i=1}^k \lambda_i(y) = 1$ para cualquier $y \in M$.

La función $b : M \to \mathbb{R}^n$ definida como $b(y) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(y) a(x_i)$ verifica que es de clase C^∞ y además $\|a(x) - b(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in M$.

3.2. No sobreyectividad de mapas diferenciables a variedades de dimensión mayor. La idea es probar el Lema 2.3. Es claro que alcanza con probarlo localmente es decir, probar que un mapa C^1 de un abierto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ con $n < m$ no puede tener un abierto en su imagen.

Mientras pienso una prueba que me agrade, dirijo al lector al libro de Milnor "Topology, from the differentiable viewpointÇapitulo 3. Alli mismo Milnor menciona que el caso que nos interesa es más sencillo de probar, voy a pensar una prueba, pero de mientras dejo la referencia.

3.3. No existencia de homotopias entre la identidad y una constante. En esta sección buscaremos probar el Lema 2.4. Por ahora, también mientras busco una prueba mejor, me parece que no hay mejor que referenciar al libro de Milnor. Este resultado esta probado en el capítulo 4 de dicho libro. Espero pronto escribir una prueba en esta sección pues si bien no creo poder mejorar la prueba del libro mencionado (muy recomendable!!) este lema es la escencia de la prueba del Teorema que estamos probando. Esto se debe a que es el unico lugar donde se utiliza un invariante topologico, en este caso, topologico diferencial.

4. Extensión a abiertos cualesquiera

Voy a hacer unos breves comentarios de como extender la prueba al caso general. Simplemente hay que tener un par de pequeños cuidados.

Supongamos que tenemos un homeomorfismo h de $U \subset \mathbb{R}^n$ en $V \subset \mathbb{R}^m$ con $n < m$.

Sean ε, δ de forma tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$ y $B(h(x), \delta) \subset V$ y se cumple que $h(B(x, \varepsilon)) \subset B(h(x), \delta)$.

Ahora, aplicamos la misma prueba que arriba cambiando la esfera usual por el borde de la bola $B(x, \varepsilon)$ y asumiendo que $n < m$ llegaremos al mismo absurdo.

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay
E-mail address: rpotrie@cmat.edu.uy