Herradura de Smale

Rafael Potrie

15 de enero de 2007

Se mostrará un ejemplo de un difeomorfismo con un conjunto hiperbólico para nada trivial introducido por Smale en [Sm1]. Este ejemplo cuenta con muchas características que lo hacen interesante, y una de ellas es que es muy común (en algún sentido) dentro de los conjuntos hiperbólicos, pues de alguna manera, es una descripción geométrica de un fenómeno que ocurre naturalmente en muchos casos (en particular cuando ocurren puntos homoclínicos transversales). La exposición que se va a realizar está basada principalmente en [S].

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ el rectángulo $R = I^n$ donde I es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ (los argumentos se harán para $n = 2$ por comodidad, y supondremos $I = [0, 5]$).

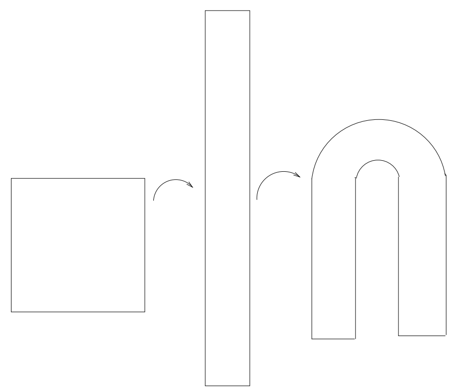

Figura 1: Construcción de una Herradura

Si $H_0 = I \times [1, 2]$ y $H_1 = I \times [3, 4]$ podemos encontrar fácilmente un difeomorfismo f del plano de forma que $f(H_0) = I_0 = [1, 2] \times I$ y $f(H_1) = I_1 = [3, 4] \times I$ y que la imagen del resto del cuadrado quede fuera del mismo (ver figura 2). Más aún, podemos suponer que f en esas franjas horizontales (H_0, H_1) es afín, es decir, una transformación lineal compuesta con una traslación. Podemos suponer que aplicamos la transformación lineal $A(x, y) = (x/5, 5y)$ al cuadrado, y lo obtenido lo "torcemos" obteniendo lo que se muestra en la figura 2.

En $\mathbb{R}^n$ podríamos hacer una construcción análoga eligiendo algunas direcciones para contraer y otras para expandir y luego "torciendo" y obteniendo que $f(R) \cap R$ tenga al menos 2 componentes conexas.

Hasta ahora, obtuvimos lo siguiente

$$R \cap f(R) = I_0 \cup I_1 = f(R \cap H_0) \cup f(R \cap H_1)$$

Que son 2 franjas verticales. Al intersectarlas con H_0 y H_1 obtendremos 4 rectángulos que al iterar al futuro se transformaran en 4 franjas verticales de ancho 1/5

$$R \cap f(R) \cap f^2(R) = f\left(f(R) \cap H_0\right) \cup f\left(f(R) \cap H_1\right)$$

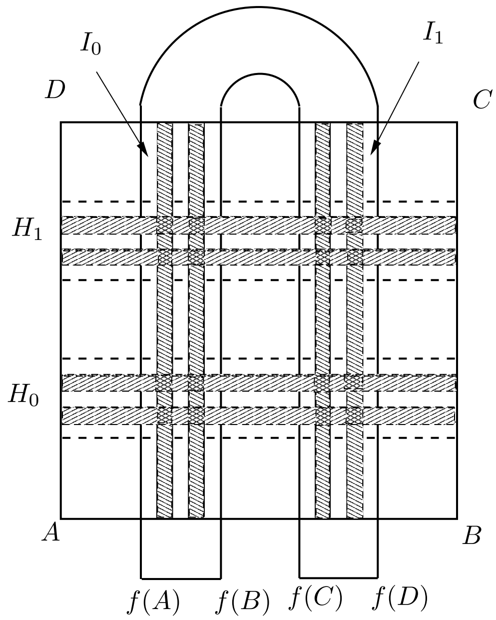

Figura 2: Herradura

En general tendremos que $\bigcap_{j=0}^{n} f^j(R)$ serán 2^n franjas verticales de ancho $(1/5)^{n-1}$. Análogamente, $\bigcap_{j=-n}^{0} f^j(R)$ serán 2^n franjas horizontales de ancho $(1/5)^{n-1}$ y $\bigcap_{j=-n}^{n} f^j(R)$, 4^n cuadrados de lado $(1/5)^{n-1}$. Es fácil ver entonces que la intersección de todos los iterados de R (tanto al futuro como al pasado) sera el producto cartesiano de dos conjuntos de Cantor iguales.

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(R) = K \times K$$

El conjunto Λ será, entonces, el conjunto de puntos cuyas orbitas permanecen en R. Así mismo podemos observar que $K \times I$ será el conjunto de puntos cuya orbita pasada se encuentra contenida en R y $I \times K$ el conjunto de puntos que al iterarse por f no saldrán de R nunca.

Es inmediato observar que el conjunto Λ es hiperbólico pues tomando como descomposición de su tangente (identificado con $\mathbb{R}^2$) las direcciónes horizontal y vertical es inmediato observar que estas son invariantes por el diferencial de f (es afín en Λ) y en ellas contrae y expande respectivamente con un factor uniforme de 5.

Vamos a probar una proposición que muestra como la dinámica en este conjunto es sumamente compleja. [R] o [S].

Proposición 0.1. $f|_\Lambda$ *es conjugada al shift de dos símbolos.*

Antes vamos a recordar que el shift es un homeomorfismo $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ (donde $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ con la topología producto) definido de la siguiente manera:

$$(\sigma(\alpha))_n = \alpha_{n-1}$$

Es sencillo corroborar las siguientes propiedades del shift ([R] o [S]):

- $\overline{Per(\sigma)} = \Sigma$.
- Es expansivo, transitivo y topológicamente mixing.

- $W^s(x) \cap \Sigma$ y $W^u(x) \cap \Sigma$ son densos en Σ [1].

Demostraciónde la Proposición 0.1.

Dado que $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(R)$ podemos observar que si $x, y \in \Lambda$ son puntos distintos, entonces existirá $n_0 \in \mathbb{Z}$ de forma que x e y pertenezcan a rectángulos diferentes de $\bigcap_{j=-n_0}^{n_0} f^j(R)$ (vimos que los diámetros de estos tendían a cero). Por lo tanto, podemos afirmar que si $x \neq y$ entonces existe al menos un número $m \in \mathbb{Z}$ para el cual $f^m(x)$ y $f^m(y)$ no se encuentran en el mismo I_i $i = 0, 1$.

Definamos $h : \Lambda \to \Sigma$ de la siguiente manera:

$$(h(x))_n = i \qquad \text{si} \qquad f^n(x) \in I_i \qquad i = 0, 1$$

Las observaciónes iniciales, recordando que $\Lambda \subset I_0 \cup I_1$ es $f-$invariante, nos aseguran que la función h está bien definida y es inyectiva.

Por otro lado, h es sobreyectiva pues dado $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ entonces existe un único $x \in \Lambda$ de forma tal que:

$$\{x\} = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} f^{-j}\left(I_{\alpha_j}\right)$$

Es sencillo ver que h es continua pues dos puntos en Σ están cerca si son sucesiones que coinciden en todos los valores alrededor de cero y si consideramos el rectángulo $R_0 = \bigcap_{-m}^{m} f^j(R)$, su imagen por h serán justamente las sucesiónes que coinciden en todos los valores $-m < i < m$. Dado, que Λ es compacto, tenemos también que h^{-1} es continua y por lo tanto un homeomorfismo.

Para ver que h conjuga f con σ basta observar que

$$\begin{aligned} (\sigma \circ h(x))_n = i \qquad & \text{si} \qquad f^{n+1}(x) \in I_i \\ (h \circ f(x))_n = i \qquad & \text{si} \qquad f^{n+1}(x) \in I_i \end{aligned}$$

y por lo tanto $h \circ f = \sigma \circ h$ como buscábamos.

□

Observamos que esta construcción se puede realizar en S^2 ya que esta construcción que realizamos la podemos pensar en un disco y podemos completar un difeomorfismo de la esfera en si misma tomando un mapa del otro disco de la esfera cuya imagen sea la esfera menos la imagen del disco en el cual está la herradura (ver [Sm2] por detalles). En efecto, si se realiza esta construcción mencionada aparecerá un punto fijo atractor y uno repulsor.

Como comentario final, repetimos que esta construcción puede ser hecha en cualquier dimensión mayor o igual a 2, partiendo de un cubo n dimensional, efectuándole una transformación lineal hiperbólica y luego deformándolo de forma tal de que la intersección con el cubo inicial tenga al menos 2 componentes conexas.

Referencias

[R] C.Robinson, Dynamical Systems, *CRS Press* (1995).

[S] M. Sambarino, Topicos de Sistemas Dinámicos, *Curso EMALCA, Costa Rica* (2005).

[Sm1] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, (1964), 63-80.

[1] $W^{s(u)}(x) = \{y \in \Sigma \ : \ d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \to 0 \ \ n \to +\infty(-\infty)\}$

[Sm2] S.Smale, Differentiable dynamical systems, *Bulletin A.M.S.* **73** (1967), 747-817.