FLUJO GEODÉSICO DE ANOSOV Y EN VARIEDADES SIN PUNTOS CONJUGADOS

DONNIE DARKO

ABSTRACT. La idea es estudiar algunos resultados de los flujos geodesicos de Anosov pensando en entender el resultado principal de [MP] y ver que puede valer en dimensiones mayores. En particular, ver que en variedades de curvatura negativa el flujo geodesico es de Anosov y ver que una metrica para la cual el flujo geodesico es de Anosov no tiene puntos conjugados. Todo esto, sin usar tildes!!

1. Curvatura y campos de Jacobi.

Empezamos con repaso de esto por las deudas.
El tensor de curvatura $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dado por:

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

Lo bueno que tiene este tensor es que es lineal al multiplicar por funciones en cada una de sus variables si fijamos el resto (je, esto es que sea un tensor en realidad). Es decir:

$$R(fX_1 + gX_2, Y)Z = fR(X_1,Y)Z + gR(X_2,Y)Z$$

y lo mismo vale en las otras dos variables. Esto, entre otras cosas implica que el valor de $R(X,Y)Z$ en p depende unicamente de $X(p), Y(p), Z(p)$.

Remark 1. Esto tb implica que si tenemos una funcion del tipo $J(t) \mapsto R(V(t), J(t))V(t)$ (donde J, V son campos sobre una curva γ) se cumple que el mapa es lo mismo que poner $J(t) \mapsto K(t)J(t)$ donde $K(t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(t)}M$ es una transformacion lineal.

Podemos entonces definir la curvatura seccional que va a depender entonces unicamente del plano que generan los vectores donde esta definida. Sea $\sigma \subset T_pM$, definimos

---

rpotrie@cmat.edu.uy; Version un poco retocada, en particular agregada una prueba en la ultima seccion para superficies. 21/11/2008.

$$K_p(\sigma) = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}$$

Las curvaturas seccionales en cada punto determinan unicamente al tensor de curvatura[1]. Otra cosa importante, vinculada con la observacion de arriba es que si consideras a la transformacion lineal $K(t) : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(t)}M$ con una base ortonormal que contenga a $V(t)$ ($\{V(t), e_2, \dots e_n\}$, estamos suponiendo que $V(t)$ tiene norma 1) entonces, la matriz $K(t) = (k_{ij})_{ij}$ cumplira que $k_{11} = 0$ y que $k_{ii} = K_p(e_i, V)$. En principio no conocemos los valores de k_{ij} con $i \neq j$.

Una curiosidad (ejercicio 8 del cap 4 de [dC]) es que si $K_p(\sigma)$ no depende del subespacio $\sigma \subset T_pM$ (con $dim(M) \geq 3$) en ninguno de los puntos de M entonces se ha de cumplir que tampoco depende del punto p! es decir, la variedad es de curvatura seccional constante. Es facil construir contraejemplos en superficies, de todas maneras, toda superficie admite una metrica de curvatura constante.

Lo primero que vamos a probar es el siguiente Lema:

Lema 1. *Una variedad tiene curvatura seccional constante igual a K_0 si y solo si $\langle R(X,Y)W,Z\rangle = K_0(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle)$.*

Demostracion . El reciproco sale facil (observar que esa cuenta da que $\langle R(X,Y)X,Y\rangle = K_0(|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2)$).

El directo tb es sencillo porque basta ver que las curvaturas seccionales cumplen la relacion (ya comentamos que todas las curvaturas seccionales determinan el tensor de curvatura). Entonces, como la curvatura seccional es constante, queda:

$$\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = K_0$$

con eso se prueba que las curvaturas seccionales son iguales, basta ver se verifican las propiedades que hacen que lo que definimos sea una curvatura.

□

Corolario 1. *Si M tiene curvaturas seccionales constantes iguales a K, $|V| = 1$ y $J \perp V$ entonces se cumple que el mapa $J \mapsto R(V,J)V$ es el mismo que $J \mapsto KJ$.*

[1]Precisamente, si un operador $A = \{A_p : T_pM^4 \to \mathbb{R}\}_{p\in M}$ verifica las propiedades (a) $A_p(X,Y,Z,T) + A_p(Y,Z,X,T) + A_p(Z,X,Y,T) = 0$, (b) $A_p(X,Y,Z,T) = -A_p(Y,X,Z,T)$ (c) $A_p(X,Y,Z,T) = A_p(Z,T,X,Y)$ y se cumple que $A_p(X,Y,X,Y) = K_p(X,Y)(|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2)$ para todo p, X, Y entonces, $A(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z,W\rangle$.

DEMOSTRACION . Sea W un campo, entonces, $\langle R(V,J)V,W\rangle = K(\langle V,V\rangle\langle J,T\rangle - \langle V,T\rangle\langle J,V\rangle) = K\langle J,K\rangle$.

□

Los campos de Jacobi, que es lo otro que vamos a definir en esta seccion, son campos definidos en una geodesica $\gamma(t)$ a partir de la siguiente ecuacion diferencial:

$$J''(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t)$$

que por la observacion que hicimos se puede escribir tb como $J''(t)+K(t)J(t) = 0$ que lo muestra mejor como ecuacion diferencial lineal de segundo orden. Una manera igualmente relevante (y equivalente) de ver los campos de Jacobi es la siguiente: sea $f : [0,1] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ dada por $f(t,s) = exp_p(tv(s))$ donde $v : (-\varepsilon,\varepsilon) \to T_pM$ y cumple $v(0) = \gamma'(0)$, $v'(0) = W$ entonces se cumple que $J(t) = \frac{\partial}{\partial s} f(t,0)$ es un campo de Jacobi. De hecho, todo campo de Jacobi con $J(0) = 0$ y $J'(0) = W$ se escribe como

$$J(t) = (dexp_p)_{t\gamma'(0)}(tW)$$

Para hacer el caso general, hay que tomar $f(s,t) = exp_{\alpha(s)}(tv(s))$ donde $\alpha'(0) = J(0)$ y $v'(0) = J'(0)$ entonces $J(t) = \frac{\partial}{\partial s} f(t,0)$ es el que se busca.

Si γ es una geodesica, podemos encontrar vectores $\{e_2(t),\dots,e_n(t)\}$ paralelos que hagan una b.o.n. con $\gamma'(t)$ y escribir el campo $J(t) = \sum_i f_i(t)e_i(t)$ (no nos interesan los campos con componentes en $\gamma'(t)$, ademas, los otros si arrancan normales a $\gamma'(0)$ se mantienen asi) entonces tenemos que la ecuacion es equivalente a

$$f_j''(t) + \sum_i a_{ij}(t)f_i(t) = 0 \qquad j = 2,\dots n$$

donde $a_{ij} = \langle R(\gamma'(0), e_i)\gamma'(0), e_j\rangle$.

En curvatura constante es facil hallar los campos de Jacobi ya que la ecuacion queda $J'' + KJ = 0$. Sea $\gamma(t)$ una geodesica y $w(t)$ un campo paralelo de norma 1 y perpendicular a $\gamma'(t)$, entonces, el campo de Jacobi con condiciones iniciales $J(0) = 0$ y $J'(0) = w(0)$ sale de resolver la ecuacion de orden 2 real $f'' + kf = 0$ con condiciones iniciales $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ que esta dado por

$$\begin{cases} f' &= g \\ g' &= -kf \end{cases}$$

los valores propios son $\pm\sqrt{K}$ con lo cual tenemos que la solucion es

$$J(t)=\begin{cases}\frac{\sin(t\sqrt{K})w(t)}{\sqrt{K}} & si \quad K>0\\ tw(t) & si \quad K=0\\ \frac{e^{t\sqrt{|K|}}-e^{-t\sqrt{|K|}}}{2\sqrt{|K|}} & si \quad K<0\end{cases}$$

Esto no da todos los campos de Jacobi (de hecho, los campos de Jacobi ortonormales a $\gamma'(t)$ son un espacio vectorial de dimension $2n-2$ y esta construccion nos da solo $n-1$) pero nos da para lo que vamos a necesitar que son campos que arranquen en un vector de norma 1 y se anulen en tiempo T en variedades de curvatura negativa. Esto es porque en la tercera formula (en la segunda tb) se ve que los campos se anulan solo en un punto. Esto motiva la definicion de puntos conjugados.

2. Puntos Conjugados

Dada una geodesica $\gamma : [0,a] \to M$ decimos que $\gamma(t_0)$ es conjugado a $\gamma(0)$ a lo largo de γ ($t_0 \in (0,a]$) si existe un campo de Jacobi J no identicamente nulo tal que $J(0)=J(t_0)=0$. El numero maximo de dichos campos linealmente independientes (que no pueden ser mas que $n-1$) se llama la multiplicidad de $\gamma(t_0)$ como punto conjugado a $\gamma(0)$.

Cuando hay puntos conjugados se tiene que ahi el mapa exponencial deja de ser un difeo local. Cuando no hay puntos conjugados, se cumple entonces que el cubrimiento universal tiene que ser $\mathbb{R}^n$ pues queda que la exponencial es un cubrimiento. En particular, esto muestra que en S^n toda metrica ha de tener puntos conjugados.

En general, nos va a interesar estudiar si una variedad tiene o no puntos conjugados. Por lo tanto, nos van a interesar condiciones que aseguren que una variedad no tiene puntos conjugados. Una condicion es por ejemplo que haiga una unica geodesica cerrada por clase de homotopia no trivial.

Otra manera de estudiar la existencia o no de puntos conjugados es mediante teoremas de comparacion. De hecho, como la ecuacion de Jacobi es una ecuacion diferencial lineal de orden dos, si podemos compararla con otra ecuacion de solucion mas simple y tal que sepamos (por ejemplo) que las soluciones son menores y nunca se anula, tendremos una manera de probar que nuestra variedad no posee puntos conjugados.

Primero enunciamos un Teorema de comparacion, llamado de Sturm-Liouville que permite comparar ecuaciones diferenciales de orden 2, pero reales.

Teorema 1. *Sean $K_1 : [0,a] \to \mathbb{R}$ y $K_2 : [0,a] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $K_1(t) \leq K_2(t)$ $\forall t \in (0,a)$. Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ soluciones de las ecuaciones*

$f''(t) + K_1(t)f(t) = 0$ *y* $f''(t) + K_1(t)f(t) = 0$ *respectivamente tales que* $f_1(0) = f_2(0) = 0$ *y* $f_1'(0) = f_2'(0)$*. Entonces,* $f_1(t) \geq f_2(t)$ *para todo* $t \in (0, a)$*.*

Este teorema no es nada dificil de probar, y es bien util para estudiar campos de Jacobi en superficies, ya que la dimension de los campos de Jacobi en superficies normales a γ' y que arrancan en 0 tienen dimension 1. En particular, sin problema se prueba que en una superficie con curvatura no positiva no puede haber puntos conjugados (esto sale de comparar con la ecuacion de Jacobi en curvatura constante igual a 0 que no los tiene).

El teorema de Sturm Liouville se generaliza al siguiente teorema que permite obtener las mismas conclusiones en variedades de dimension arbitraria.

Teorema 2 (Rauch [dC])**.** *Sean* $\gamma : [0, a] \to M^n$ *y* $\tilde{\gamma} : [0, a] \to N^{n+k}$ *con* $k \geq 0$*, geodesicas de velocidad unitaria. Sean* J *y* $\tilde{J}$ *campos de Jacobi a lo largo de ellas normales a la velocidad de la geodesica y verificando* $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$ *y* $|J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|$*. Supongamos que* $\tilde{\gamma}$ *no posee puntos conjugados en* $(0, a]$ *y que para todo* $t \in (0, a]$ *y todo* $v \in T_{\gamma(t)}M$*,* $\tilde{v} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}N$ *se cumple* $\tilde{K}(\tilde{v}, \tilde{\gamma}'(t)) \geq K(v, \gamma'(t))$ *entonces* $|\tilde{J}(t)| \leq |J(t)|$*.*

3. Campos de Jacobi Asintoticos

La idea es la siguiente, queremos estudiar el flujo geodesico de Anosov, entonces debemos buscar subespacios tangentes que por el flujo geodesico decrezcan exponencialmente o crezcan de esta manera. Para eso, si asumimos que la variedad en la que estamos trabajando no tiene puntos conjugados, vamos a poder tomar "limites" de campos de Jacobi que arranquen de norma uno y se hagan cero en tiempo T. Al hacer tender T a mas o menos infinito conseguiremos campos que no se anulen nunca. A estos les llamaremos campos de Jacobi asintoticos, para no hacerse ideas equivocadas, vale la pena tener en cuenta el caso del espacio euclideo donde los campos de Jacobi asintoticos son campos constantes (paralelos de norma constante). Igual nosotros estaremos "buscando" cosas mas similares al caso del disco hiperbolico donde estos campos seran de la forma $e^{at}w(t)$ donde w es un campo paralelo.

Primero, nos sera util el siguiente lema que nos permite encontrar esos campos que arranquen en cierto lugar y se hagan 0 en tiempo T.

Lema 2. *Sea (M,g) una variedad riemanniana completa y $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una geodesica. Entonces, si $\gamma(0)$ no es conjugado a $\gamma(a)$ con $a > 0$ existe un isomorfismo entre los campos de Jacobi sobre γ definidos en $[0,a]$ y el espacio vectorial $T_{\gamma(0)}M \times T_{\gamma(a)}M$ dado por la correspondencia $J \to (J(0), J(a))$.*

Demostracion . La prueba es muy facil pues el conjunto de campos de Jacobi en $\gamma([0,a])$ es un espacio vectorial (es una ecuacion diferencial lineal) y dado que $\gamma(0)$ y $\gamma(a)$ no son conjugados es una transformacion lineal inyectiva. Ahora, por dimensiones, es un isomorfismo.

□

Definimos ahora los campos J_T^V como campos tal que $J_T^V(0) = V$ y $J_T^V(T) = 0$. Claramente, si se encuentran sobre una geodesica sin puntos conjugados estos campos tienen total sentido (sino igual tienen sentido cuando $\gamma(T)$ no es conjugado a $\gamma(0)$ pero no nos complicamos y suponemos que no hay puntos conjugados).

Teorema 3. *$J_T^V(t)$ converge con $T \to +\infty$ a un campo $J_V^+(t)$ que no se anula nunca.*

Demostracion . Creo que basta con ver que si $0 < t < T < T'$ entonces se cumple que $|J_T^V(t)| \leq |J_{T'}^V(t)|$. Esto seguro implica que si el limite existe no se anula en tiempos positivos. Para tiempos negativos tampoco se va a anular pues habria puntos conjugados [2]. Lo que hay que ver entonces es que la cosa converge. Esto se va a cumplir si las $J_T^V(t)$ estan uniformemente acotadas entre 0 y T porque va a permitir tomar limite dado que es sucesion creciente de funciones (ademas va a ser solucion porque se puede utilizar tb Arzela-Ascoli).

La acotacion uniforme tiene que ver con la llamada ecuacion de Riccati asociada a la ecuacion de Jacobi, esta es $u'(t)+u^2(t)+K(t) = 0$ (esta forma es para superficies, en dimensiones mayores toma forma matricial). Esta ecuacion se cumple siempre para $u(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ donde $J(t) = f(t)w(t)$ es un campo de Jacobi y $w(t)$ un campo paralelo perpendicular a $\gamma'(t)$ (aca esta el tema que si no es superficies no vale, si bien vas a poder escribir el campo de Jacobi de esa manera con un campo $w(t)$ siempre perpendicular a $\gamma'(t)$, este no necesariamente va a ser paralelo). Claramente,

[2] En el caso de superficies estas cosas son bien triviales, porque te tomas la resta, que tb es un campo de Jacobi y sabes que no se vuelve a anular entonces, tenes que uno es mayor que otro a partir de 0 y el otro mayor antes. En el pasado no se va a anular porque si se anulara, lo tendria que hacer con derivada no nula, entonces, para algun J_T se anularia violando la no existencia de puntos conjugados. En dimensiones mayores se complica porque las normas se pueden “cruzar” sin que los campos coincidan.

cuando $f(t) = 0$, u no esta definida, pero si no hay puntos conjugados eso pasa a lo sumo una vez. Si J' no es demasiado grande claramente la u rapidamente va a estabilizarse luego de que que pase un tiempito razonable. De hecho, lo que vale es que en una variedad compacta (en realidad, si $|K(t)| < K_0$) existe un valor L de forma tal que si u tiene asintota en t_0 entonces $|u(t)| < L$ cuando $|t - t_0| > 1$.

Entonces, dado a, para cualquier $T > a + 2$ se cumple que $J_T'(t) \leq LJ_T(t)$ para todo $t \in [0, a]$, usando la desigualdad de gronwall tenemos que $J_T(t) \leq J_T(0)e^{Lt}$ con lo cual tenemos la acotacion uniforme y vamos a tener la convergencia buscada.

□

4. Propiedades del flujo geodesico

En esta seccion vamos a trabajar dos propiedades del flujo geodesico para probar los dos teoremas que motivan escribir esto.

Lo primero, es ver como actua el diferencial del flujo geodesico en el tangente al tangente unitario de la variedad, para eso, vamos a identificar en este un subespacio horizontal y uno vertical que identificaremos con el tangente a la variedad (o pedazo en el caso del vertical) e veremos como es posible relacionar esta identificacion con los campos de Jacobi y encontrar una propiedad interesante que vincula el diferencial del flujo geodesico con los campos de Jacobi. Tambien, vamos a estudiar un poco como el flujo geodesico preserva una forma de volumen, con lo cual deduciremos rapidamente que el conjunto limite del flujo geodesico ha de ser todo el fibrado unitario (en particular, si es anosov, es transitivo[3].

Dps, vamos a “probar” que un flujo geodesico no admite una seccion transversal global. Esto aparece en general probado utilizando tecnicas “feas”, pero voy a tratar de emular una prueba que me conto Matilde que es (para mi) mucho mas ilustrativa y bonita (claro que me siento mas que capaz de hacerla parecer mas fea que las otras dps de escribirla).

4.1. **Campos de Jacobi y el Flujo Geodesico.** Sea entonces (M, g) una variedad Riemanniana compacta de dimension n. Sea T_1M su fibrado tangente unitario, que sera una variedad tambien compacta de dimension $2n - 1$. Como fibrado que es, posee una proyeccion natural a su base, M, dada por $\pi(p, v) = p$. Esta proyeccion da una idea de cuando algo se encuentra moviendose por la fibra, y cuando por la base. Es claro que $KerD_{(p,v)}\pi$ es el conjunto de vectores de $T_{(p,v)}T_1M$ tangentes a

[3]Por ejemplo, el flujo geodesico en la esfera es nada transitivo, pero todas sus orbitas son periodicas.

curvas que se mueven tangente a las fibras (es facil ver que ese nucleo es igual a T_pM en el caso que tomemos π en todo el fibrado tangente, sino ya no es tan inmediato de identificar, pero tampoco tan dificil, es simplemente el subespacio ortogonal a v en T_pM). Haciendonos una imagen de que el fibrado tangente es una especie de producto, llamaremos a las curvas que se mueven en las fibras verticales (curvas de la forma $(p, v(t))$). Claro esta, que si bien tenemos bien definida una proyeccion siempre, no siempre tenemos una manera "canonica" de decir que una curva se mueve horizontalmente, pues dependera de la carta trivializadora del fibrado. Es por eso, que para definir curvas horizontales es necesario que utilicemos la coneccion de Levi-Civita [4].

Definimos entonces, el operador conexion, $\mathcal{K} : TTM \to TM$ dado por $\mathcal{K}(Z) = \nabla_{\alpha'(0)}V(0)$ donde $Z = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\alpha(t), V(t))$ que es facil ver no depende de la curva tangente a Z que consideremos. $\mathcal{K}_{(p,v)}$ es el operador restricto a $T_{(p,v)}TM$. La idea es que los vectores tales que $\mathcal{K}$ da 0 cumplen que son tangentes a curvas con vectores arriba transladandose paralelamente (esto permite identificar $Ker\mathcal{K}_{(p,v)}$ con T_pM.

Entonces, ahora es facil ver que $T_{(p,v)}TM = KerD_{(p,v)}\pi \oplus Ker\mathcal{K}_{(p,v)}$ y de igual manera se cumple para $T_{(p,v)}T_1M$ solo que $KerD_{(p,v)}\pi$ tendra una dimension menos. Notaremos, si $\theta = (p, v)$ estos subespacios como V_θ y H_θ respectivamente.

Definiremos tambien una metrica conveniente en estos subespacios aprovechando su identificacion canonica con T_pM (o un subespacio de T_pM) llamada la metrica de Sasaki que hace perpendiculares a estos subespacios y tiene propiedades interesante que estudiaremos a continuacion. La metrica esta dada por:

$$\langle X, Y\rangle_\theta = \langle D_\theta\pi(X), D_\theta\pi(Y)\rangle_p + \langle \mathcal{K}(X), \mathcal{K}(Y)\rangle_p$$

Lo bueno de la metrica como deciamos es que hace H_θ y V_θ perpendiculares y por lo tanto queda que $D_\theta\pi$ es una isometria entre H_θ y T_pM. En particular, en coordenadas en $H_\theta \oplus V_\theta$ es sencillo observar que el flujo geodesico (que denotaremos ϕ_t) queda dado por el campo siguiente

$$X : T_1M \to TT_1M \cong H_\theta \oplus V_\theta \qquad X(p, v) = (v, 0)$$

Ahora, vamos a ver que relacion hay entre esta forma de pensar el tangente al tangente unitario y los campos de Jacobi, eso es porque todo parece indicar que los

[4]Cpaz ya se uso, pero lo recuerdo igual, la coneccion de Levi-Civita es la que es compatible con la metrica, i.e. cumple $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ y es simetrica, i.e. cumple $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

campos de Jacobi asintoticos son los indicados como espacios estables e inestables del flujo geodesico (pero el tema es que no estan en TT_1M).

Tenemos entonces el siguiente Lema que nos muestra como esta manera de descomponer TT_1M es adecuada para estudiar la accion del flujo geodesico en los campos de Jacobi:

Lema 3. *Sea $\gamma(t)$ una geodesica de (M, g) tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. Dado $Z \in T_{(p,v)}T_1M$ existe un unico campo de Jacobi J_Z definido en γ tal que $J_Z(0) = D\pi(Z)$ y $J_Z'(0) = \mathcal{K}(Z)$. Ademas, la aplicacion $Z \mapsto J_Z$ es un isomorfismo entre $T_{(p,v)}T_1M$ y los campos de Jacobi en γ y cumple que $D\pi(D\phi_t(Z)) = J_Z(t)$ y $\mathcal{K}(D\phi_t(Z)) = J_Z'(t)$. Es decir, $D\phi_t(J(0), J'(0)) = (J(t), J'(t))$ en las coordenadas $H_\theta \oplus V_\theta$.*

Demostracion . Sea $Z \in T_{(p,v)}T_1M$ y construimos una curva $\alpha(s) = (\beta(s), V(s))$ en T_1M que pase por (p, v) en 0 con velocidad Z.

Para probar el lema vamos a utilizar el hecho de que los campos de Jacobi son los campos tangentes a variaciones por geodesicas.

Es muy facil observar que $D\phi_t(Z) = \frac{\partial}{\partial s}\phi_t \circ \alpha(s)|_{s=0}$, de la misma manera, se ve que $D\pi D\phi_t(Z) = \frac{\partial}{\partial s}\pi \circ \phi_t \circ \alpha(s)|_{s=0}$. Lo interesante es que $f(t, s) = \pi \circ \phi_t \circ \alpha(s)$ es justamente una variacion por geodesicas (fijando el s tenemos exactamente una geodesica) con lo cual el campo $\frac{\partial}{\partial s}f(t, s)|_{s=0} = J(t)$ cumple la ecuacion de Jacobi y tenemos que $D\pi D\phi_t(Z) = J(t)$.

Para ver lo otro, tenemos que $J'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}f(t, s)|_{s=0}$ entonces, intercambiando las derivadas obtenemos $J'(t) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\pi \circ \phi_t(\alpha(s))|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}D\pi(X(\alpha(s))|_{s=0}$ donde X denotaba el campo tangente al flujo geodesico, que se expresaba como $X(p, v) = (v, 0)$ en las coordenadas $H_\theta \oplus V_\theta$ con lo cual, $X(\alpha(s)) = (V(s), 0)$ y por lo tanto, $D\pi(X(\alpha(s))) = V(s)$ entonces $J'(t) = \frac{\partial}{\partial s}V(s)|_{s=0} = \nabla_{\beta'(0)}V(0) = \mathcal{K}(Z)$ como queriamos.

□

4.2. **Forma simplectica y de Liouville.** Estamos trabajando en una variedad de dimension n. Su tangente unitario es de dimension $2n-1$, pero al estar estudiando un flujo, podemos pensar que estamos estudiando transformaciones de espacios de dimension $2n-2$ tomando secciones transversales. Lo primero que vamos a observar es que la seccion transversal mas natural en el tangente es simplemente el complemento ortogonal al campo X que genera el flujo geodesico. A ese subespacio le vamos a llamar N_θ y verifica que $N_\theta = N_\theta \cap H_\theta \oplus V_\theta$ (esto es trivial ya que X es horizontal y V perpendicular a X). Al mismo tiempo, como sabemos que los campos de Jacobi perpendiculares a la velocidad de la geodesica donde se encuentran son siempre perpendiculares a esta, tenemos que el espacio N_θ es $D\phi_t$ invariante (de hecho, ya trabajamos con esto, con otra notacion, y las dimensiones coinciden). Ademas, lo bueno de esta representacion, es que es facil ver que se pueden identificar facilmente $H_\theta \cap N_\theta$ con V_θ ya que, al igual que $N_\theta \cap H_\theta$, V_θ son los vectores perpendiculares a la dirección del flujo, pues vendria a ser el tangente a la "esfera" de vectores unitarios en el punto v ($\theta = (p, v)$) que es justamente la direccion del flujo.

Definiremos entonces la siguiente 2-forma simplectica (i.e. cerrada, antisimetrica y no degenerada) en $N_\theta \times N_\theta$ dada por $\Omega_\theta(Z, Y) = \langle Z_H, Y_V\rangle - \langle Z_V, Y_H\rangle$ (donde Z_H, Z_V, Y_H, Y_V son las proyecciones a los horizontal y vertical). Es muy facil ver que es antisimetrica y no degenerada, para ver que es cerrada basta hacer la cuenta[5].

Vamos entonces a ver que esta forma es invariante por el flujo geodesico (i.e. $\phi_t^*\Omega = \Omega$).

Proposicion 1. *Ω es preservada por el flujo geodesico, es decir, se cumple que $\Omega_\theta(V, W) = \Omega_{\phi_t(\theta)}(D\phi_t V, D\phi_t W)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo par de vectores $V, W \in N_\theta$.*

DEMOSTRACION . La idea es usar el Lema que relaciona campos de Jacobi con la accion de $D\phi_t$ en TT_1M con lo cual podemos escribir (en coordenadas $N_\theta \cap H_\theta \oplus V_\theta$)

$$D\phi_t(V) = (J_V(t), J_V'(t)) \qquad D\phi_t(W) = (J_W(t), J_W'(t))$$

con lo cual $\Omega_{\phi_t(\theta)}(D\phi_t V, D\phi_t W) = \langle J_V(t), J_W'(t)\rangle - \langle J_V'(t), J_W(t)\rangle$ lo cual veremos es constante.

Sean $J(t)$ y $L(t)$ dos campos de Jacobi sobre $\gamma(t)$ y sea $W(t) = \langle J(t), L'(t)\rangle - \langle J'(t), L(t)\rangle$.

Entonces[6],

$$\begin{aligned} W'(t) &= \langle J'(t), L'(t)\rangle + \langle J(t), L''(t)\rangle - \langle J'(t), L'(t)\rangle - \langle J''(t), L(t)\rangle = \\ &= \langle J(t), -R(\gamma'(t), L(t))\gamma'(t)\rangle - \langle L(t), -R(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t)\rangle = 0 \end{aligned}$$

Con lo cual probamos la proposicion.

[5]Se puede pensar como que si $x_1, \ldots, x_{n-1}$ es base de $N_\theta \cap H_\theta$ y $y_1, \ldots, y_{n-1}$ es base de V_θ entonces Ω_θ es $dx_1 \wedge dy_1 + \ldots + dx_{n-1} \wedge dy_{n-1}$.

[6]Recordar que por ser campos de Jacobi $J'' = -R(\gamma', J)\gamma'$ y que $\langle R(A, B)C, D\rangle = \langle R(C, D)A, B\rangle$.

□

Es facil ver tb que si tenes una 2-forma simplectica en un espacio vectorial de dimension par (en realidad siempre tiene que ser de dimension par para que pueda ser no degenerada) se cumple que el producto exterior con si misma una cantidad igual a la mitad de veces la dimension del espacio da una forma de volumen. Es claro tb que el producto exterior de Ω consigo mismo va a ser preservado por el flujo geodesico. Entonces, podemos construir facilmente una forma de volumen invariante bajo la accion del flujo geodesico de la siguiente forma.

Sea $\alpha_\theta : T_\theta T_1 M \to \mathbb{R}$ la 1-forma dada por $\alpha_\theta(V) = \langle V, X(\theta)\rangle$ que es facil ver que es invariante por el flujo geodesico y definimos (extendiendo Ω a $T_\theta T_1 M$ de forma que sea nula en la direccion del flujo) la forma de volumen $v_\theta = \Omega_\theta^{(n-1)} \wedge \alpha_\theta$ que sera preservada por el flujo geodesico. La forma v_θ se llama forma de Liouville.

Teniendo este volumen invariante, sabemos entonces que casi todo (Lebesgue) punto de T_1M es recurrente por el flujo geodesico lo cual resulta bastante interesante. Sin embargo, vale la pena notar que todavia no se sabe si toda metrica se puede perturbar para tener geodesicas cerradas!.

4.3. **El flujo geodesico no es una suspension.** Vamos a tratar de dar la prueba de que el flujo geodesico no puede ser una suspension, o lo que es lo mismo, que no existe una transversal global al flujo geodesico (son equivalentes, una se construye facil a partir de la otra). Haremos la prueba en superficies unicamente, se puede adaptar (no trivialmente) a dimensiones mayores. Una prueba diferente se puede encontrar en [GP].

Entonces, supongamos que el flujo es una suspension, con lo cual existiria una variedad compacta $K \subset T_1M$ transversal al flujo. Es facil entonces ver que tenemos un mapa $\pi : K \times \mathbb{R} \to T_1M$ dado por $\pi(k,t) = \phi_t(k)$.

La idea es la siguiente, se ve facilmente que si "levantamos" el flujo geodesico a $K \times \mathbb{R}$ todas las orbitas "viajan" de izquierda a derecha. La idea es construir una isotopia que conjugue una orbita con su opuesta de forma tal que arranque en la identidad. Esto va a ser un absurdo, pues podemos extender el flujo en $K \times \mathbb{R}$ a $K \times \mathbb{R} \cup I, D$ (la compactificacion con dos puntos) y todo mapa isotopico a la identidad tiene que llevar I en I y D en D.

Sea entonces $\tilde{K} = K \times \mathbb{R} \cup I, D$ la compactificacion con dos puntos de $K \times \mathbb{R}$ de forma que I representa a $K \times \{-\infty\}$ y D a $K \times \{+\infty\}$. Entonces, tenemos que todo punto cumple que por el flujo $F_t(k,s) = (k, t+s)$ (que es el levantado del flujo geodesico, pues conmuta con aplicar π) tiende en el pasado a I y en el futuro a D (menos estos dos puntos que quedan quietos).

Ahora, sea una geodesica dada de la forma $\gamma(t) = \pi(k_0, t)$. Sea $(p, v) = \pi(k_0, 0)$ y sea $H_s : T_1M \to T_1M$ una isotopia diferenciable dada por $H_t(p, v) = (p, e^{i\pi t}v)$ que esta bien definida en superficies pues no depende de las cartas (pues cuanto se esta girando no depende de la base en T_pM sino unicamente del producto interno alli que no depende de las cartas). Es claro que $H_1(p, v) = (p, -v)$ con lo cual $H_1^{-1} = H_1$

Consideremos $\varphi_t^s(p, v) = H_s^{-1} \circ \phi_t \circ H_s(p, v)$ que es un flujo para todo s y que dado que por ser conjugado a ϕ_t se preservan las orbitas y como H_s es una isotopia a la identidad se tiene que el αlimite de toda orbita es I y el ωlimite es D. Esto es absurdo pues $\varphi_t^1(p, v) = \phi_{-t}(p, v)$ ya que $\varphi_t^1(p, v) = H_1(\phi_t(p, -v))$ que es ir por el flujo geodesico en direccion contraria y luego dar vuelta el vector, es decir, el el flujo geodesico recorrido en tiempo inverso.

El caso general no es tan trivial de adaptar (salvo en el caso de dimension par que el mismo argumento exacto funciona). Una posible idea es dar vuelta el flujo localmente y ver que el numero de interseccion con la variedad no puede cambiar pues es un invariante homotopioco, pero hay que hacerlo!.

5. Flujo geodesico en curvatura negativa

Vamos a probar en esta seccion que el flujo geodesico en una variedad de curvaturas seccionales negativas es de Anosov. Para eso, vamos a utilizar los campos de Jacobi asintoticos, "levantarlos" al tangente de T_1M y utilizar lo probado en la seccion anterior para ver que estos nos dan los espacios estables e inestables para el flujo (que probando que son linealmente independientes y generan probamos que es Anosov). Hay una prueba diferente en [KH] que se basa en encontrar una familia de conos invariante asegurando la hiperbolicidad, no es mas dificil, pero creo que esta es un poco mas geometrica e intuitiva.

La prueba no es muy compleja. Primero, consideramos los subespacios de $T_\theta T_1 M$ ($\theta = (p, v)$) dados por $E^s(\theta) = \{(V, (J_V^+)'(0)) \ : \ V \in T_pM \ , \ \langle V, v\rangle = 0\}$ y $E^u(\theta) = \{(V, (J_V^-)'(0)) \ : \ V \in T_pM \ , \langle V, v\rangle = 0\}$ (estamos utilizando la notacion horizontal-vertical de la seccion anterior y los campos J_V^+ y J_V^- son los campos de Jacobi asintoticos dados por el Teorema 3). Ahora, basta probar que estos campos son de hecho linealmente independientes (esto ya implica que su suma da el espacio ortogonal al flujo pues por proyectarse en todo el subespacio horizontal se cumple que tienen dimension al menos $n - 1$) y que se van a cero exponencialmente (lo cual deduciremos comparando las soluciones de la ecuacion de Jacobi en la variedad con las de la misma ecuacion en el caso de curvatura constante).

Veamos primero que los subespacios E^s y E^u que consideramos son linealmente indepedientes. Para eso, es suficiente con ver que no hay un vector en ambos subespacios, y para eso, es suficiente ver que dado $V \in T_pM$ ortogonal a v, sus campos de Jacobi asintoticos no son iguales (esto no es inmediato, recordar que en el caso euclideo es exactamente lo que ocurre).

Para eso, vamos a ver que tenemos cierta acotación de estos campos asintoticos, que nos permitirá ver que no puede existir un campo de Jacobi asintotico para "los dos lados". Esto sale del teorema de Rauch, comparando con una variedad de curvatura constante negativa que sea mayor que la de la variedad. La dificultad surge de que el teorema de Rauch pide que los campos arranquen de 0 y los campos asintoticos son campos que nunca se anulan, con lo cual hay que demostrarlo utilizando su construccion (acordarse que se construian como limite de cosos que iban anulandose cada vez mas lejos). Esto no parece dificil, pero tiene pinta de medio embole entonces paso de escribirlo por ahora y lo cuento en la charla. El resultado va a ser algo asi como que $\|J_V^+(t)\| < e^{-at}\|V\|$ y algo analogo para el negativo, con lo cual no pueden definir el mismo campo de Jacobi (basta pararse cerquita al costado y usar esa ecuacion y la invariancia por el flujo geodesico).

Al mismo tiempo, esa acotacion ayuda a ver que los vectores de E^s y E^u cumplen lo que tienen que cumplir para que el flujo sea de Anosov, y para eso, basta acotar la norma de $\|(J_V^+)'(t)\|$ con la de J_V^+. Para hacer eso se vuelve a utilizar la ecuacion de Ricatti teniendo en cuenta que el cociente entre la derivada del campo de Jacobi y este era una solucion. Como las soluciones estan acotadas en curvatura negativa se termina la prueba.

6. Teorema de Eberlein

Lo probado en la seccion anterior se generaliza al siguiente teorema:

Teorema 4. *Si los campos de Jacobi asintoticos son l.i. en una variedad sin puntos conjugados entonces el flujo geodesico es de Anosov.*

Para probar esto, basta ver que siendo l.i. se cumple que por el diferencial del flujo geodesico estos campos tienden a cero, pues utilizando argumentos de compacidad se tiene que tienden a cero exponencialmente (si no hubiese un T tal que todos decrecieron la mitad por $D\phi_T$ entonces un punto limite con $T \to \infty$ cumple que no tiende a cero).

7. Flujo geodesico de Anosov

Vamos a probar en esta seccion que si una superficie riemanniana (M, g) cumple que su flujo geodesico es de Anosov, entonces, la variedad no tiene puntos conjugados. Para esto, veremos que si hubiesen puntos conjugados podriamos construir una subvariedad compacta transversal al flujo lo cual contradice el hecho de que un flujo geodesico no puede ser una suspension.

La prueba tiene dos etapas, la primera, probar que si hay un punto donde el espacio estable es vertical, entonces, hay una superficie compacta transversal al flujo y por lo tanto concluimos (dado que el flujo geodesico no es una suspension) que eso no puede ocurrir. Por ultimo, probaremos que si hay puntos conjugados, en algun punto el espacio estable es vertical.

Consideramos el conjunto $\Lambda = \{\theta \in T_1M \ : \ E^s_\theta \in V_\theta\}$. Y supongamos que es no vacio.

Probaremos que dado $\theta \in \Lambda$, existe un entorno U de θ en T_1M tal que $\Lambda \cap U$ es homeomorfo a un disco de dimension 2, lo cual prueba que Λ es una superficie cerrada en T_1M que por ser compacto implica que Λ es una superficie cerrada. El mismo argumento mostrara que Λ es transversal al flujo geodesico.

Sea $D_\theta \sim \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ una pequeña seccion transversal al flujo geodesico cerca de θ. Consideremos $U = \bigcup_{t\in(-\delta,\delta)} \phi_t(D_\theta)$.

La idea es sencilla, si consideramos la ecuacion del campo de Jacobi tenemos $f'' + Kf = 0$. A las soluciones las notaremos como $f_x(t)$ con $t \in (-\delta, \delta)$ y $x \in D_\theta$.

Sea f^s la solucion que da lugar al espacio estable. Que $\theta \in \Lambda$ implica que $f^s_\theta(0) = 0$ y por lo tanto se tiene que $(f^s_\theta)'(0) \neq 0$ (por ejemplo $(f^s_\theta)'(0) > 0$. Consideramos entonces un pequeño entorno del punto (es decir, achicamos δ y D_θ) donde valga que $(f^s_x)'(t) > a > 0$ y donde $f^s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Se cumple que en general podemos asumir que $f^s_x(-\delta) < 0$ y $f^s_x(\delta) > 0$ pues tomando delta un poquito mas grande se cumple. Entonces, por funcion implicita, o lo que sea, tenemos ahi una pequeña superficie donde se cumple que la f^s se anula y esa es la carta alrededor de θ que buscabamos.

Ahora queremos ver que tener un punto conjugado implica $\Lambda \neq \emptyset$. Esto no es dificil, basta recordar que la forma simplectica $\Omega_\theta(Z, Y) = \langle Z_H, Y_V\rangle - \langle Z_V, Y_H\rangle$ es $D\phi_t$ invariante. En el caso de campos de Jacobi en superficies, esto se traduce en que si f_1 y f_2 son soluciones sobre una geodesica γ de la ecuacion diferencial $f''+Kf = 0$ entonces se cumple que $f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t)$ es constante.

Sea entonces γ una geodesica con un punto conjugado. Es decir que existe una solucion f de la ecuacion de Jacobi tal que $f(0) = 0$ y $f(t_0) = 0$ (suponemos que no hay puntos conjugados en el intervalo $(0, t_0)$. Consideremos entonces la solucion correspondiente al espacio estable f^s.

Se cumple que $f^s(0)f'(0) - f(0)(f^s)'(0) = f^s(t_0)f'(t_0) - f(t_0)(f^s)'(t_0)$ con lo cual tenemos $f^s(0)f'(0) = f^s(t_0)f'(t_0)$. Basta ver que el signo de $f'(0)$ es opuesto al de $f'(t_0)$ para utilizando el Teorema de Bolzano concluir que existe $t \in [0, t_0]$ tal que $f^s(t) =$ (y por lo tanto completar la prueba).

El hecho que ya mencionamos que la derivada de un campo de Jacobi no trivial al hacerse nulo no puede ser cero, junto con que 0 y t_0 son dos puntos consecutivos donde se anula f implican directamente que el signo de $f'(0)$ es opuesto al de $f'(t_0)$.

References

[A] Anosov, Su paper famoso

[dC] Do Carmo, Geometria Riemanniana, Proyecto Euclides

[Eb] Eberlein, P. When is a geodesic flow of Anosov Type I y II.

[FM] Freire, Mañe, On the entropy of geodesic flow of manifolds without conjugate points.

[GP] G.Paternain, Geodesic flows.

[KH] Katok- Hasselblatt

[Kl] Klingemberg

[Kl2] Libro de Klingenberg

[M] Mañe, On a theorem of Klingemberg

[MP] M. Paternain, Expansive geodesic flows on surfaces.

[R1] Ruggiero , Tres teoremas importantes sobre flujos geodesicos en superficies

[R2] Ruggiero, Ensaios Matematicos.