CONOS Y DOMINACIÓN

RAFAEL POTRIE

Abstract. La idea es probar un par de lemas similares a los de [N] pero adaptados a lo que se necesita en [P]. Son super creibles, pero para tener la prueba "completa" escribo esta nota. Ver la prueba del Lemma 5.1 de [P]. Esta versión es muy preliminar, en particular, me gustaría mejorar bastante las pruebas. De hecho, una vez que se consiguen los subfibrados invariantes, la prueba de que la descomposición es dominada me parece que esta bastante linda, pero al final no está muy trabajada. 21 de Noviembre de 2009

1. Definiciones y enunciado del Teorema

Voy a un par de resultados de los cual no encontre una referencia por más que evidentemente hay alguna por ahi. Los resultados son similares a los de Newhouse en [N]. La prueba, si bien no creo sea la mejor, es bastante simple y a mi gusto elegante.

Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de una variedad riemanniana M de dimensión d y sea Λ un conjunto f-invariante (no necesariamente compacto).

Denotamos $T_\Lambda M = \bigcup_{x\in\Lambda} T_x M \subset TM$ a quien dotamos de la topología relativa. Sea $G_k(V)$ la grassmaniana de dimension k del espacio vectorial V (es decir, el conjunto de subespacios de dimensión k de V) y consideramos $G_k(T_\Lambda M) = \bigcup_{x\in\Lambda} G_k(T_x M)$([1]).

Llamamos *subfibrado* de $T_\Lambda M$ de dimensión k a una función $F : \Lambda \to G_k(TM)$ donde $F(x) \in G_k(T_x M)$. Como nos encontramos en una variedad riemanniana (tenemos producto interno) podemos, dado un subfibrado F, definir su *ortogonal*, $F^\perp$ como un fibrado de dimensión $d-k$ que a cada punto le asigna el subespacio ortogonal a $F(x)$.

Dado un espacio vectorial con producto interno V y un subespacio $F \subset V$ podemos definir para cualquier vector $v \in V$ sus coordenadas en relación a F como $(v_F, v_F^\perp)$ como las proyecciones en el subespacio F y $F^\perp$ respectivamente. Un *cono* en V alrededor de F de ángulo[2] γ esta dado por:

$$C_{F,\gamma} = \{v \in V : \|v_F^\perp\| \leq \gamma \|v_F\|\}$$

Llamaremos a *F centro del cono* y a *γ ángulo del cono*. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$\alpha C_{F,\gamma} = C_{F,\alpha\gamma}$$

También definimos el cono $C^\perp$ como el cono que verifica $(C_{F,\gamma})^\perp = C_{F^\perp,1/\gamma}$.

Una *familia de conos* sobre Λ será una función que a cada punto de Λ le asocia un cono en $T_x M$. Claramente, podemos, fijado el producto interno en TM pensarlo como un subfibrado, junto con una función $\gamma : \Lambda \to \mathbb{R}^+$ (que nos da el centro del cono y el ángulo).

[1] No nos va a interesar la topologia porque no vamos a pedir que sean continuos los fibrados. En realidad van a terminar siendolos, pero es clasico que si tenes una descomposición dominada entonces los fibrados de esta varian continuamente, entonces ni vamos a meternos en eso.

[2] En realidad este no es el ángulo sino más bien su tangente. En [P] usamos una noción diferente de ángulo pero no afecta en nada.

La notación que utilizaremos es de $C : \Lambda \to Conos$ (es decir, C_x denotará el cono en T_xM). También puede que utilicemos, dado un fibrado F la notación C_{F_x,γ_x} si quisieramos ser más explicitos.

Decimos que una familia de conos $C_{F,\gamma}$ es (k,α)-*invariante* (con $k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in (0,1)$ si se verifica que $Df^k(C_x) \subset \alpha C_{f^k(x)}$. Notar que si C es una familia de conos (k,α)-invariante, entonces la familia

Hallar β!!! $C^{\perp}$ es $(-k,\beta)-$invariante.

Por último, vamos a definir *descomposición dominada* y luego podremos enunciar el Teorema que probaremos. Sea Λ un conjunto invariante y sean E, F dos subfibrados de $T_\Lambda M$ de dimensiones k y $d-k$ respectivamente que verifican que $E_x \oplus F_x = T_xM$ para todo $x \in \Lambda$. Decimos que la descomposición $T_\Lambda M$ es (N,λ)-*dominada* (con $N \in \mathbb{N}^*$ y $\lambda \in (0,1)$) si se verifica que dados $u \in E_x \backslash \{0\}$ y $v \in F_x \backslash \{0\}$ se cumple que

$$\frac{\|Df^N u\|}{\|u\|} < \lambda \frac{\|Df^N v\|}{\|v\|}$$

Teorema. *Sea $f : M \to M$ un difemorfismo de una variedad d-dimensional M. Sea Λ un conjunto invariante. Entonces, Λ admite una descomposición $(N,\lambda)-$dominada $E \oplus F$ con* $\dim F = f$ si y

Hallar relacion solamente si *existe una familia de conos C de dimensión f y ángulos acotados que es (k,α)-invariante.*

entre (N,λ) y (k,α)

De hecho, se puede decir un poco más y esto se desprende de la prueba:

Agregado al Teorema. *Dado (N,λ) existe α de forma tal que si $E \oplus F$ es $(N,\lambda)-$dominada entonces existe una familia de conos (N,α)-invariante. Analogamente, dado (k,α) existe (N,λ) de forma tal que si se tiene una familia de conos de ángulos en $[a,b] \subset (0,\infty)$ que es (k,α)-invariante, entonces existe una descomposición $(N,\lambda)-$dominada.*

Por último un par de aclaraciones. Para empezar, si Λ es compacto y la familia de conos varía continuamente no es necesario pedir ni que los conos varien continuamente ni que se encajen con un ángulo uniforme al enviarse por Df^k, basta que la la imagen del cono quede contenida en el interior del cono siguiente. También vale la pena recordar que recientemente se resolvió un viejo problema que afirma que si una descomposición es (N,λ)-dominada, entonces, existe $\tilde{\lambda}$ y una métrica para la cual la descomposición es $(1,\tilde{\lambda})$-dominada (ver [G]). Para ver algunas propiedades de la descomposición dominada, ver [BDV].

2. Prueba del Teorema

Demostración del Directo. Vamos a asumir que la descomposición $E \oplus F$ sobre Λ es $(1,\lambda)-$dominada[3]. Dado $v \in T_xM = E_x \oplus F_x$, existen vectores $v_F \in F_x$ y $v_E \in E_x$ únicos de forma tal que $v = v_F + v_E$ (utilizaremos esta notación en adelante).

Consideramos la familia de conos C dada por

$$C_x = \{v \in T_xM \ : \ \|v_E\| < \|v_F\|\}$$

Notar que como E y F no son necesariamente ortogonales, estos conos no necesariamente tienen a F como centro, pero si tenemos que el ángulo será 1 (el borde del cono es la "bisectriz" entre E y F).

AVERIGUAR Vamos a ver que esta familia de conos es $(1,\alpha)$-invariante para cierto α .

[3]Si fuese $(N,\tilde{\lambda})$-dominada, podriamos argumentar tomando f^N y usando $\lambda = \tilde{\lambda}^N$.

Sea $v \in C_x$ que escribimos como $v = v_E + v_F$. Sabemos que $\|v_E\| < \|v_F\|$, en particular, $v_F \neq 0$. Como la descomposición $E \oplus F$ es Df-invariante, tenemos que $(Dfv)_E = Dfv_E$ y $(Dfv)_F = Dfv_F$.

Por tanto, la dominación nos dice que:

$$\frac{\|(Dfv)_E\|}{\|(Dfv)_F\|} = \frac{\|Dfv_E\|}{\|Dfv_F\|} < \lambda \frac{\|v_E\|}{\|v_F\|} < \lambda$$

Esto concluye la prueba del directo. Se podría encontrar el valor exacto de α sin mucho problema, notar que NO es igual a λ ya que en principio E y F no tiene porque ser ortogonales.

□

Demostración del Recíproco. Vamos a asumir que la familia de conos es $(1, \alpha)$ invariante por simplicidad (sino, basta considerar f^k).

Consideramos las siguientes familias de conos (que serán invariantes por Df y Df^{-1}):

$$C_x^+ = \bigcap_{n>0} Df^n(C_{f^{-n}(x)}) \qquad C_x^- = \bigcap_{n>0} Df^{-n}(C^{\perp}_{f^n(x)})$$

Fácilmente se puede ver que se cumple que $C_x^+ \cap C_x^- = \{0\}$ y que $C_x^+ + C_x^- = T_xM$ con lo cual nos gustaría probar que son subespacios (conos de ángulo 0).

Afirmación 2.1. *C_x^+ y C_x^- son subespacios.*[4]

Demostración.Para probar esta Afirmación, haremos uso de la bien conocida razón doble.

Dado un espacio vectorial V de dimensión dos, con una base $\{e_1, e_2\}$, tenemos un mapa $\Gamma_{e_1,e_2} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dado por

$$\Gamma_{e_1,e_2}(\mathbb{P}(ae_1 + be_2)) = \frac{b}{a}$$

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$[a, b, c, d] = \frac{c-a}{b-a}\frac{d-b}{d-c}$$

Sea A una transformación lineal $A : V \to W$ con V y W espacios vectoriales con bases $\{b_1, b_2\}$ y $\{b_1', b_2'\}$ respectivamente, notamos como A a la acción en el proyectivo también ($A : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$). Definimos el mapa $\tilde{A} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como

$$\tilde{A}(x) = \Gamma_{b_1',b_2'} A \Gamma^{-1}_{b_1,b_2}(x) = \frac{\alpha_{22}x + \alpha_{21}}{\alpha_{12}x + \alpha_{11}}$$

Donde α_{ij} son los coeficientes de la matriz dada por A en las bases mencionadas. Una función de ese tipo es fácil corroborar que preserva las razones dobles[5].

Supongamos entonces que C_x^+ no es un subespacio. Entonces, existen dos vectores $v, w \in C_x^+$ que generan un plano $V \subset T_xM$ que corta ∂C_x^+ y ∂C_x.

Por definición de C_x^+ esto implica que hay vectores $v_n \to v$ y $w_n \to w$ tales que $v_n \in Df^n(\partial C_{f^{-n}(x)})$ y $w_n \in Df^n(\partial C_{f^{-n}(x)})$.

[4] Al parecer, segun [BG] esta prueba surge de una idea de Bonatti

[5] Bueno, en realidad no se si fácil, es clásico al menos. Basta ver que las funciones de ese tipo se generan componiendo funciones de la forma $x \mapsto \alpha x$, $x \mapsto x + \alpha$ y $x \mapsto 1/x$. Un calculo muestra que las tres preservan las razones dobles y pronto.

A partir de esto tenemos que $[v_n, v_{n+1}, w_n, w_{n+1}] \to \infty$.

Esto implica, que $[Df^{-n}v_n, Df^{-n}v_{n+1}, Df^{-n}w_n, Df^{-n}w_{n+1}] \to \infty$. Vamos a ver que esto contradice que $Df(C_{f^{-(n+1)}(x)}) \subset \alpha C_{f^{-n}(x)}$.

De hecho, consideremos en $\mathbb{R}^d$ un cono de C de centro $\mathbb{R}^k$ y ángulo γ. Tomando $\alpha \in (0,1)$ consideramos el cono $\alpha C \subset C$. Sea $V \subset \mathbb{R}^d$ un subespacio de dimensión dos que corta los bordes de los conos, y consideramos los conos $C_V = C \cap V$ y $(\alpha C)_V = \alpha C \cap V$ en V. Sea $\{e_1, e_2\}$ una base de V y sea $v_1, v_2 \in \mathbb{P}(V)$ los bordes del intervalo $\mathbb{P}(C_V)$ y $w_1, w_2 \in \mathbb{P}(V)$ puntos de $\mathbb{P}(\alpha C)_V)$.

Vamos a probar que dados α y γ, existe $K(\alpha,\gamma)$ tal que $\|[\tilde{v}_1, \tilde{w}_1, \tilde{v}_2, \tilde{w}_2]\| < K(\alpha,\gamma)$ donde $\tilde{v}_i = \Gamma_{e_1,e_2}(v_i)$ y $\tilde{w}_i = \Gamma_{e_1,e_2}(w_i)$. Esto concluye la prueba de la afirmación.

Como el resultado no depende de la base utilizada (por ser la razón doble un invariante por transformaciones lineales), podemos suponer que la base $\{e_1, e_2\}$ verifica que es una base ortonormal con $e_1 = b_1$ y $e_2 = \lambda b_2 + \mu b_d$ (con $\mu > \lambda\gamma > 0$ para que V corte el borde del cono y verificando $\lambda^2 + \mu^2 = 1$) donde $\{b_1, \dots b_d\}$ es la base canonica de $\mathbb{R}^d$ (observar que si $k = 1$ entonces $\lambda = 0$). Como $v_1, v_2 \in \mathbb{P}(V)$ pertenecen al borde de $\mathbb{P}(C)$, tenemos que

$$\Gamma_{e_1,e_2}(v_i) = \pm\frac{\gamma}{\sqrt{\mu^2 - \lambda^2\gamma^2}}$$

Analogamente, como $w_1, w_2 \in \mathbb{P}(\alpha C)$ tenemos

$$\Gamma_{e_1,e_2}(w_i) \in \left[-\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\mu^2 - \lambda^2\alpha^2\gamma^2}}, \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\mu^2 - \lambda^2\alpha^2\gamma^2}}\right]$$

Como $\mu \in (0,1]$ y $\mu > \lambda\gamma$, tenemos que $\sqrt{\mu^2 - \lambda^2\gamma^2} \in (0,1]$, además, como $\alpha \in (0,1)$ tenemos que $\sqrt{\mu^2 - \lambda^2\gamma^2} \leq \sqrt{\mu^2 - \lambda^2\alpha^2\gamma^2}$.
Sea $A = \frac{\gamma}{\sqrt{\mu^2-\lambda^2\gamma^2}}$ y $B = \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\mu^2-\lambda^2\alpha^2\gamma^2}}$ entonces tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|[\tilde{v}_1, \tilde{w}_1, \tilde{v}_2, \tilde{w}_2]\| \leq \frac{4AB}{(A-B)^2}$$

Pero como $A - B > \frac{\gamma(1-\alpha)}{\sqrt{\mu^2-\lambda^2\gamma^2}}$, obtenemos una cota independiente de μ y λ como queríamos[6]

$\diamond$

Cambiaremos entonces la notación por $C_x^+ = F_x$ y $C_x^- = E_x$. Los mapas $x \mapsto E_x, F_x$ son subfibrados y se verifica que $E_x \oplus F_x = T_xM$. Falta solamente verificar la condición de dominación.

Como $E_x \oplus F_x = T_xM$, tenemos que dado $v \in T_xM$ lo podemos escribir de manera única como $v = v_E + v_F$ con $v_E \in E_x$ y $v_F \in F_x$. Utilizaremos esta notación.

Dados $v_E \in E_x \backslash \{0\}$ y $v_F \in F_x \backslash \{0\}$, consideramos el plano V generado por ambos del cual son base (llamamos a la base B_x y llamamos $B_{f(x)}$ a la base $\{Dfv_E, Dfv_F\}$ de $Df(V)$).

Se cumple que $\tilde{D}f : \Gamma_{B_{f(x)}} \circ Df \circ \Gamma_{B_x}^{-1} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ verifica que fija el cero y el infinito, con lo cual es de la forma $t \mapsto at$. Como el cono C_x se mapea por Df en un cono que contiene a F_x, se cumple que $a < 1$. Si probamos que podemos elegir $a < 1$ independiente de x y de el par de vectores que elijamos habremos probado que la descomposición $E \oplus F$ es dominada.

En la Afirmación 2.1 probamos algo que formalizaremos en la siguiente Afirmación.

[6]No hago las cuentas con más detalle porque aún tengo esperanza de encontrar una prueba más simple de esto.

Afirmación 2.2. *Sea $A : W_1 \to W_2$ transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión d con producto interno. Supongamos que C es un cono de dimensión k de ángulo γ_1 en W_1 que se envia en un cono de ángulo γ_2 en W_2. Entonces, si $V \subset W_1$ es un subespacio de dimensión dos que corta ∂C, entonces, si restringimos el producto interno de W_1 a V y el de W_2 a $A(V)$, tenemos que si el ángulo de $C \cap V$ es η, el ángulo de $A(C \cap V)$ en $A(V)$ será menor que $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\eta$.*

Demostración.Sea $\{b_1, \dots, b_d\}$ una base ortonormal de W_1 de forma tal que $\{b_1, \dots, b_k\}$ es base del centro de C. Análogamente, consideramos $\{b'_1, \dots, b'_d\}$ una base de W_2.

Esto permite suponer que $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, fija el subespacio $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^d$ (el subespacio generado por los primeros k vectores de la base canonica) y envia el cono de ángulo γ_1 en el de ángulo $\gamma_2 = \alpha\gamma_1$ donde $\alpha = \gamma_2/\gamma_1$.

La cuenta de la Afirmación 2.1 permite probar esta afirmación.

◊

Para aplicar lo de arriba, utilizaremos que los ángulos de los conos originales estan acotados.

Afirmación 2.3. *Podemos suponer que los ángulos de los conos son todos* 1.

Demostración.Sea $x \in \Lambda$. Sean F_k los centros de los conos $C_{f^k(x)}$ y γ_k sus ángulos. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ la métrica en $T_{f^k(x)}M$. Claramente, se puede descomponer como $\langle \cdot, \cdot \rangle_k = \langle \cdot, \cdot \rangle_{F_k} + \langle \cdot, \cdot \rangle_{F_k^\perp}$ donde las últimas son las métricas restringidas a los subespacios marcados.

Consideramos la nueva métrica en los subespacios dada por $\langle \cdot, \cdot \rangle'_k = \langle \cdot, \cdot \rangle_{F_k} + \sqrt{\gamma_k}\langle \cdot, \cdot \rangle_{F_k^\perp}$ que hace que todos los conos tengan ángulo 1 (observar que el cambio de métrica es acotado por la hipotesis en $\gamma_k \in [a, b] \subset (0, +\infty)$). Observar que con esta métrica, no se altera el concepto de multiplicar un cono por un número (i.e. $\alpha C_{f^k(x)}$ está bien definido independientemente de cual de las métricas consideremos).

◊

Esto en particular implica que el angulo entre E_x y F_x es mayor que uno. Ahora, tenemos que los conos se meten para adentro con tasa α. Lo que tenemos que hacer es un "cambio de coordenadas" en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para poner a v_F en el cero y esto nos va a dar una cota uniforme para el a que vendrá del valor de α.

References

[BG] J. Bochi, N. Gourmelon. Some characterizations of domination. Preprint arXiv: 0808.3811.

[BDV] C. Bonatti, L. Diaz and M.Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A global gemoetric and probabilistic perspective*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **102**. Mathematical Physics III. Springer-Verlag (2005).

[G] N. Gourmelon, Addapted metrics for dominated splitting, *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* **27** (2007), 1839-1849.

[N] S. Newhouse; Cone fields, domination and hyperbolicity, *Modern Dynamics and its Applications* M.Brin,B. Hasselblat and Y. Pesin editors. *Cambridge Press* (2003) 419–432

[P] R. Potrie , Generic bi-Lyapunov stable homoclinic classes, *Preprint* Arxiv math (2009)

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay

Current address: LAGA; Institute Galilee, Universite Paris 13, Villetaneuse, France

URL: www.cmat.edu.uy/~rpotrie

E-mail address: rpotrie@cmat.edu.uy