CLOSING LEMMA ERGODICO

RAFAEL POTRIE

Resumen. La idea es presentar una prueba del Ergodic Closing Lemma debida a Sylvain Crovisier ([C]). Es una prueba mucho más simple que la original y tiene como único prerequisito el Lema de Pugh de conexión (que es prerequisito de todo lema de conexión). La diferencia con [C] es el idioma.

1. Introducción

Vamos a probar el siguiente Teorema (Lema) debido a Mañe que tiene diversas aplicaciones a la dinámica genérica.

Teorema 1.1. *Existe un conjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ de forma tal que si $f \in \mathcal{R}$ y μ es una medida ergódica para f, entonces μ es limite débil de medidas soportadas en orbitas periódicas.*

Solo para dar un sabor de las aplicaciones de este Teorema, voy a dar un breve esbozo del siguiente Teorema debido a Mañe que contiene, en grandes razgos, las ideas más importantes del estudio actual de la dinámica genérica.

Teorema 1.2. *Existe un conjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ donde M es una superficie tal que si $f \in \mathcal{R}$ entonces ocurre una de las siguientes dos posibilidades:*
- (i) *f es Axioma A.*
- (ii) *f posee infinitos pozos y/o fuentes.*

Como consecuencias, este Teorema implica que si se toma un difeomorfismo genérico de una superficie que es transitivo, entonces, es un difeomorfismo de Anosov en $\mathbb{T}^2$. También, muestra que para un difeomorfismo genérico de superficies hay o bien atractores o bien repulsores hiperbólicos.

Esbozo La función $\Psi : \mathrm{Diff}^1(M) \to \mathbb{N} \cup \infty$ que asocia a cada $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ la cantidad de pozos más la cantidad de fuentes de f es semicontinua inferiormente (los pozos y las fuentes son hiperbólicos, entonces, si se tiene k pozos, un perturbado pequeño también lo tendrá). Entonces, existe un conjunto residual $\mathcal{R}_1$ donde la función es localmente constante. Consideramos $\mathcal{T}$ el conjunto de difeomorfismos en $\mathcal{R}_1$ donde $\Psi(f) < \infty$.

Basta probar que en $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cap \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_{Pugh}$ los difeomorfismos son Axioma A donde $\mathcal{R}$ es el residual dado por el Teorema 1.1 y $\mathcal{R}_{Pugh}$ es el conjunto residual donde los puntos periódicos son densos en el conjunto no errante (esto es residual y se deduce del Closing Lemma que probaremos en el Apéndice 2).

Tenemos entonces que si $f \in \tilde{\mathcal{T}}$ entonces $\Omega(f) = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \overline{Per_1(f)}$ donde $\mathcal{P}$ son los finitos pozos de f, $\mathcal{F}$ las finitas fuentes, y $Per_1(f)$ el conjunto de puntos periódicos que no son pozos ni fuentes (como la cantidad de pozos y fuentes es constante en un entorno de f, podemos suponer que los puntos en $Per_1(f)$ son sillas hiperbólicas).

La prueba ahora tiene dos etapas.

La primera es ver que la descomposición en estable-inestable de $Per_1(f)$ se extiende a su clausura. Para ello, hay que ver que si no fuese así, mediante una pequeña perturbación en la derivada de los puntos periódicos (que se puede hacer dinámicamente y será pequeña por

Notas informales. 1ero de Diciembre de 2009. Faltan Referencias abundantes.

un célebre Lemma de Franks que es muy sencillo) permite generar pequeños ángulos entre el espacio estable e inestable de los puntos periódicos. Al ser los ángulos pequeños, otra pequeña perturbación de la derivada permite crear un pozo o una fuente, lo cual es una contradicción.

La segunda etapa es utilizar el Teorema 1.1. Llamemos $E \oplus F$ a la descomposición en $\overline{Per_1(f)}$. Supongamos que E no es uniformemente contraido. Esto implica que para todo $N > 1$ se cumple que existe $x_N \in \overline{Per_1(f)}$ tal que

$$\|D_{x_N} f^j_{/E}\| \geq \frac{1}{2} \qquad \forall 0 \leq j \leq N$$

Tomando un punto límite y, obtenemos un punto tal que $\|D_y f^n_{/E}\| \geq \frac{1}{2}$. Sea $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(y)}$ y sea μ un límite débil de dichas medidas. Claramente μ es una medida invariante.

Sabemos que $\int \log |Df_{/E}| d\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |D_{f^i(y)} f_{/E}| \to c \geq 0$, con lo cual $\int \log |Df_{/E}| d\mu \geq 0$. Usando el Teorema de Krein Milman, o el de descomposición ergódica, podemos asumir que μ es ergódica.

Por tanto, como $f \in \mathcal{R}$, tenemos orbitas periódicas cuyo valor propio estable tiende a 1, componiendo con una pequeña homotecia, es fácil entonces construir nuevas fuentes y llegar a un absurdo. Un argumento análogo nos da que F es uniformemente expandido y prueba que f es Axioma A.

□

2. Lema de Pugh

En la topología C^0, se verifica lo siguiente: Sea f un homeomorfismo y $\mathcal{U}$ un entorno de f en la topología C^0. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ de forma tal que si U es un abierto conexo de diametro $< \varepsilon$ se cumple que para cualquier $x, y \in U$ existe $g \in \mathcal{U}$ tal que $g(x) = f(y)$ y se verifica que $g = f$ en U^c.

En general, para perturbar en la topología C^1, es necesario dar un espacio alrededor de la perturbación. Más precisamente:

Lema 2.1 (Perturbación elemental). *Sea $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ y $\mathcal{U}$ un entorno C^1 de f. Existe entonces $\theta > 0$ tal que si $x, y \in B(z, r)$ con r suficientemente pequeño, entonces existe $g \in \mathcal{U}$ que envia x en $f(y)$ y tal que $f = g$ fuera de $B(z, \theta r)$.*

Además de requerir un espacio, esta perturbación requiere una cierta geometría que no era necesaria en el caso C^0. Esto se debe, obviamente, a que ahora hay que cuidar el tamaño de la derivada al moverse y es necesario para ello dar un "espacio" para perturbar.

La particularidad de la topología C^1 es que θ no depende de r (siendo este pequeño), en regularidad más alta (C^r con $r > 1$) tenemos un resultado análogo pero θ depende de r y verifica que $\theta \to \infty$ cuando $r \to 0$.

Demostración de la Perturbación elemental:. Como r es pequeño, podemos trabajar en $\mathbb{R}^d$. Suponemos también que $x = -(r/2, 0)$ y $y = (r/2, 0)$ en coordenadas $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que f es la identidad (de hecho, en caso contrario, precompondriamos con un mapa C^1 cerca de la identidad que mande x en y).

Consideramos el campo constante X_0 en $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ dado por $X_0(x) = (r, 0)$ y consideramos el mapa $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ y que verifica:

$$\varphi(x) = 1 \ \ \forall x \in B(0, r) \quad ; \quad \varphi(x) = 0 \ \ \forall x \notin B(0, \theta r) \quad ; \quad \|\nabla \varphi\| < \frac{2}{(\theta - 1)r} \ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Sea $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dado por el tiempo 1 de integrar el flujo del campo $X(x) = \varphi(x) X_0$.

Es fácil ver que

$$\|h(x) - x\| \leq r$$

Al mismo tiempo

$$||Dh(x)v - v|| < r||\varphi(x)||||v|| \leq \frac{2||v||}{(\theta - 1)}$$

Por ende, podemos conseguir perturbaciones con soporte como el deseado. Ahora, veremos que no se pueden conseguir perturbaciones (cualitativamente) mejores. Supongamos que $h(x) = y$ y que $h = id$ fuera de $B(0, \theta r)$. Entonces, no es difícil ver que

$$||h - id||_{C^0} \geq r \;\; y \;\; ||Dh - id|| \geq \frac{1}{(\theta - 1)}$$

□

Mismo con la ventaja mencionada en la topología C^1 (θ no depende de r), existe un problema bastante grande que es que se cumple que $\theta \to \infty$ a medida que se achica $\mathcal{U}$, con lo cual se pierde rápidamente el control de la perturbación.

La gran idea de Pugh fue de "desparramar" la perturbación en varios iterados y de esa manera obtener, por decirlo de alguna manera, θ's arbitrariamente cercanos a 1 lo que nos deja "no muy lejos" del caso C^0.

Vamos a definir la "geometría" en que trabajaremos que es dentro de todo la más comoda: Los cubos. Su ventaja: los bordes se "pegan" muy bien.

Definición 1 (Cubos). Sea $\varphi : V \subset M \to \mathbb{R}^d$ una carta de M. Llamamos *cubo* de φ a todo conjunto $C \subset V$ tal que su imagen por φ es una translación del cubo estandar $[-a, a]^d$. La cantidad a es el *radio* del cubo y su *centro* es el vector de la translación efectuada. Dado un cubo $C \subset V$, definimos $(1 + \varepsilon)C$ al cubo con el mismo centro y radio multiplicado por $(1 + \varepsilon)$.

Lema 2.2 (Lema de Pugh). *Sea $\mathcal{U}$ entorno de f en $\mathrm{Diff}^1(M)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $N \geq 1$ y una familia de cartas $\varphi_i : V_i \to M$ con $\bigcup_i V_i = M$ que verifican lo siguiente:*

Para todo cubo $(1 + \varepsilon)C$ de φ_i disjunto de sus $N - 1$ primeros iterados y para cualquier par de puntos $x, y \in C$ se cumple que existe $g \in \mathcal{U}$ tal que

- *$g^N(x) = f^N(y)$.*
- *$f = g$ en $M \setminus \bigcup_{i=0}^{N-1} f^i((1 + \varepsilon)C)$.*

La dificultad principal que se presenta es que a medida que $\mathcal{U}$ se achica, el valor N tiende a infinito, pero tenemos la ventaja (que no comparten las regularidades mayores) de que fijado $\mathcal{U}$, el valor de N no depende del tamaño de los cubos (en regularidad mayor, a medida que los cubos se achican, el valor de N crece).

El resultado (que probaremos en el apendice) da en realidad un enunciado más fuerte (que se usa por ejemplo para el Connecting Lemma) ya que la prueba consiste en realmente ir perturbando de a "poquito" llevando un punto al otro. Ni vale la pena leer el agregado si interesa solo el ergodic closing lemma.

Agregado 1. *Si ademas de fijar $\mathcal{U}$ y ε se fija $\eta > 0$, se consigue N y las cartas como arriba tal que el difeomorfismo g que se construye verifica también:*

- *El punto $g^k(x) \in f^k((1 + \varepsilon/2)C)$ para todo $0 \leq k < N$.*
- *$f = g$ en $f^k((1 + \varepsilon)C) \setminus B(g^k(x), \rho)$ donde $\rho < \eta d(f^k((1 + \varepsilon/2)C), f^k((1 + \varepsilon)C)^c)$.*

3. Ergodic closing lemma

Vamos a probar el siguiente Teorema del que se deducirá el enunciado de la introducción.

Teorema 3.1 (Ergodic Closing Lemma de Mañe). *Sea $\mathcal{U}$ un entorno de f en $\mathrm{Diff}^1(M)$. Sea μ una medida de probabilidad f−invariante. Entonces, μ-casi todo punto $x \in M$ tiene la siguiente propiedad.*

Para todo $\delta > 0$ existe $g \in \mathcal{U}$ y $\tau \geq 1$ tal que $g^\tau(x) = x$ y se cumple que

$$d(f^k(x), g^k(x)) \leq \delta \qquad 0 \leq k \leq \tau$$

Demostración.Basta mostrar que para $\delta > 0$ fijo, casi todo punto verifica la propiedad de arriba (después, intersectando numerables conjuntos de medida total se concluye).

Fijemos entonces $\mathcal{U}$ un entorno de f y μ una medida de probabilidad invariante. Para cualquier $\varepsilon > 0$, el Lema de Pugh nos da un valor de $N > 0$. Podemos suponer que casi todo punto respecto de μ no es periódico (para los periódicos el Teorema funciona).

Consideremos $L \geq 1$ tal que $(3/2)^L > 2^{d+1}$ donde d es la dimensión de M. Elegimos también $\varepsilon > 0$ de forma tal que $(1+\varepsilon)^L < 3/2$.

Consideremos $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ tal que $\varphi(V) = C_0 = (-1,1)^d$ tal que $\{f^i(V)\}_{|i|\leq N}$ son dos a dos disjuntos y de diametro menor que δ.

En C_0 consideramos el conjunto $X \subset C_0$ tal que $\varphi^{-1}(X) \subset V$ son los puntos que satisfacen el Teorema. Si $\nu = \varphi^*(\mu)$ (es decir, $\nu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$) tenemos que mostrar que $\nu(X) = \nu(C_0)$. Para $x \in X$ se cumple que existe $g \in U$ para el cual $\varphi^{-1}(x)$ es un punto periódico que δ-acompaña a la órbita de $\varphi^{-1}(x)$ por f durante el período.

Si $C \subset C_0$ es un cubo, decimos que es un *buen cubo* si se cumple que $(1+\varepsilon)C \subset C_0$ y se verifica que $\nu(C) > \frac{2}{3}\nu((1+\varepsilon)C)$.

Afirmación 1. *Si C es un buen cubo, entonces $\nu(X \cap C) > \frac{1}{2}\nu(C)$.*

Demostración.Sea $\tilde{f} : C \to (1+\varepsilon)C$ dado por $\tilde{f}(x) = f^k(x)$ siempre que $f^k(x) \in (1+\varepsilon)C$ mientras que $f^i(x) \notin (1+\varepsilon)C$ para $1 \leq i < k$.

Es fácil ver que $\tilde{f}$ está bien definida en casi todo punto de C y preserva medida. Por ende, $\nu(\tilde{f}(C)) = \nu(C)$.

Como $\nu((1+\varepsilon)C) < \frac{3}{2}\nu(C)$ y tenemos que $\nu(\tilde{f}(C) \cap C) = \nu(\tilde{f}(C)) - \nu(\tilde{f}(C) \cap ((1+\varepsilon)C \backslash C))$ tenemos que $\nu(\tilde{f}(C) \cap C) > \frac{1}{2}\nu(C)$.

Al mismo tiempo, los puntos en $\tilde{f}(C) \cap C$ son los puntos que se pueden cerrar usando el Lema de Pugh, con lo cual es fácil ver que $\tilde{f}(C) \cap C \subset X$.

$\diamond$

La clave de los buenos cubos, es que "hay muchos"

Afirmación 2. *Para todo cubo C tal que $2C \subset C_0$, existe un cubo C' tal que:*

(a) $(1+\varepsilon)C' \subset 2C$ *(en particular* $(1+\varepsilon)C' \subset C_0$*).*
(b) $\nu(X \cap C') \geq \nu(C')$.
(c) $\nu(C') \geq 2^{-d}\nu(C)$.

Demostración.Primero podemos suponer que $\nu(C) > 0$ sino tomando $C' = C$ estamos. Supongamos que no es el caso, vamos entonces a construir una sucesión de cubos $\{C_n\}_{n\geq 1}$ que verifican que $C_1 = C$, $2C_n \subset 2C_{n-1}$ y $\nu(C_n) \geq \nu(C_{n-1})$ para todo $n \geq 1$. Esto claramente da un absurdo ya que la medida de los cubos C_n crecería exponencialmente al tiempo que esta acotada por $\nu(2C)$ por estar $C_n \subset 2C$ para todo n.

Dado C_n, construimos C_{n+1} de la siguiente manera: Dividimos C_n en 2^d cubos iguales (embaldozamos). Uno de ellos, al cual notamos como C'_n tiene medida mayor o igual a $2^{-d}\nu(C_n) \geq 2^{-d}\nu(C)$. Como este cubo verifica las propiedades (a) y (c) de la afirmación, y estamos argumentando por absurdo, tenemos que no puede ser un buen cubo (sino la Afirmación 1 nos daría que se cumple también (b)). Tomar cubos más grandes seguirá verificando la propiedad (c), con lo cual podemos multiplicar por $(1+\varepsilon)$ el cubo C'_n manteniendo ambas propiedades. De hecho, lo podemos hacer L veces, ya que $2(1+\varepsilon)^L C'_n \subset 4C'_n \subset 2C_n$.

Como C'_n no es un buen cubo, tenemos que $\nu(C'_n \cap X) < 1/2\nu(C'_n)$, eso implica que $\nu((1+\varepsilon)C'_n) \geq 3/2\nu(C'_n)$. Por recurrencia, obtenemos que

$$\nu((1+\varepsilon)^L C'_n \geq (3/2)^L \nu(C'_n) \geq (3/2)^L 2^{-d} \nu(C_n) \geq 2\nu(C_n)$$

Con lo cual, llamando $C_{n+1} = (1+\varepsilon)^L C'_n$ obtenemos lo deseado.

◇

Supongamos ahora que $\nu(C_0 \backslash X) > 0$. Consideremos $\mathcal{P}^l$ la partición de C_0 en 2^{dl} cubos iguales cuyos interiores son disjuntos y que cubren C_0 (el embaldozado usual). Para l grande, consideramos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{P}^l \ : \ 2C \subset C_0 \ y \ C \cap X \neq \emptyset\}$$

Sea $\hat{Y} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} 2C$ y sea $Y = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.

Como ν es una medida regular, tenemos que dado $\gamma > 0$ existe un compacto $K \subset C_0 \backslash X$ asi como un abierto $A \supset C_0 \backslash X$ que verifican que $\nu(A \backslash K) < \delta$. Por lo tanto, tendremos que $\nu(\hat{Y} \cap X) \to 0$ a medida que $l \to \infty$.

Al mismo tiempo, como Y cubre practicamente todo $C_0 \backslash X$ a medida que $l \to \infty$, tenemos que $\nu(Y \backslash X) \to \nu(C_0 \backslash X)$ cuando $l \to \infty$.

De esta manera, obtenemos que con l suficientemente grande, se cumple

$$\nu(\hat{Y} \cap X) < 2^{-(2d+1)} \nu(Y \backslash X)$$

Como cada cubo $C \in \mathcal{C}$ tiene a lo sumo 2^d cubos adyacentes, podemos partir $\mathcal{C}$ en 2^d familias de cubos $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{2^d}$ de forma tal que si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_i$ para algun i, entonces $2C_1$ tiene interior disjunto de $2C_2$. Si definimos $\hat{Y}_i$ y Y_i como arriba con las nuevas familias, tenemos que para alguna de ellas se cumplirá que

$$\nu(\hat{Y}_i \cap X) < 2^{-(d+1)} \nu(Y_i \backslash X)$$

Pero a cada cubo $C \in \mathcal{C}_i$ le podemos aplicar la Afirmación 2 con lo cual obtenemos cubos $C' \subset 2C$ de forma tal que son 2 a 2 disjuntos. En particular, si consideramos Y' su union, tendremos $Y' \subset \hat{Y}_i$. Por las propiedades (b) y (c) de la Afirmación 2 se cumplirá

$$\nu(\hat{Y}_i \cap X) \geq \nu(Y' \cap X) \geq \frac{1}{2}\nu(Y') \geq 2^{-(d+1)} \nu(Y)$$

Lo cual contradice la elección de los cubos y concluye la prueba.

□

Estamos en condiciones de probar el Teorema 1.1.

Demostración del Teorema 1.1. Sea μ una medida de probabilidad en M, Φ un conjunto finito de funciones continuas de M en $\mathbb{R}$ y n, N dos números naturales.

Consideramos el conjunto abierto $\mathcal{U}(\mu, \Phi, N, n) \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ de forma tal que para $f \in \mathcal{U}(\mu, \Phi, N, n)$ se cumple:

- Existe una orbita periódica hiperbólica $\mathcal{O}$ de f de período $\pi(\mathcal{O}) \geq N$.
- Se verifica para $p \in \mathcal{O}$ y $\varphi \in \Phi$ se verifica que

$$\left| \frac{1}{\pi(\mathcal{O})} \sum_{i=0}^{\pi(\mathcal{O})-1} \varphi(f^i(p)) - \int \varphi d\mu \right| < 1/n$$

No es difícil ver que estos conjuntos son abiertos. Como el conjunto de medidas de probabilidad en M con la topología débil y el conjunto de funciones continuas son separables, podemos considerar $\{\mu_k\}$ y $\{\varphi_j\}$ conjuntos densos en dichos espacios. A su vez, definimos $\{\Phi_l\}$ el conjunto de partes finitas de $\{\varphi_j\}$. Definimos los conjuntos

$$\mathcal{R}_{k,l,N,n} = \mathcal{U}(\mu_k, \Phi_l, N, n) \cup \mathrm{Diff}^1 \backslash \overline{\mathcal{U}(\mu_k, \Phi_l, N, n)}$$

Estos conjuntos, por definición, son abiertos y densos. Entonces, el conjunto $\mathcal{R} = \bigcap_{k,l,N,n} \mathcal{R}_{k,l,N,n}$ será un conjunto residual.

Sea $f \in \mathcal{R}$ y sea μ una medida ergódica para f. Por el Teorema de Birkhoff, sabemos que para casi todo punto y respecto a μ, y para cualquier φ función continua se verifica que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi(f^i(y)) \to \int \varphi d\mu$$

Por tanto, fijado $n > 0$, tenemos que con N grande

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi(f^i(y)) - \int \varphi d\mu\right| < \frac{1}{4n}$$

Utilizaremos el Teorema 3.1 para probar la siguiente afirmación.

Afirmación 3. *Para cualquier Φ_l y para μ_k suficientemente cerca de μ, tenemos que $f \in \mathcal{U}(\mu_k, \Phi_l, N, n)$.*

Demostración.Como Φ_l es un conjunto finito, sabemos que hay una constante uniforme de continuidad.

Consideremos $\delta < 1/2n$ y μ_k a distancia menor que $\frac{\delta}{\sup_{\varphi\in\Phi_l}\|\varphi\|}$ de μ.

Como elegimos N suficientemente grande, tenemos

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi(f^i(y)) - \int \varphi d\mu\right| < \frac{1}{4n}$$

Para un y genérico respecto a μ. Al mismo tiempo, el Teorema 3.1 nos permite saber que podemos perturbar f a un g C^1 cerca tal que tiene una órbita periódica O (que mediante una pequeña perturbación podemos suponer hiperbólica) que verifica que se mantiene cerca de la órbita de y durante todo su período, mayor que N.

De esta manera, tenemos que siendo $p \in O$

$$\left|\frac{1}{\pi(O)}\sum_{i=0}^{\pi(O)-1}\varphi(g^i(p)) - \int\varphi d\mu_k\right| \leq \left|\frac{1}{\pi(O)}\sum_{i=0}^{\pi(O)-1}\varphi(g^i(p)) - \frac{1}{\pi(O)}\sum_{i=0}^{\pi(O)-1}\varphi(f^i(y))\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\pi(O)}\sum_{i=0}^{\pi(O)-1}f^i(y) - \int\varphi d\mu\right| + \left|\int\varphi d\mu - \int\varphi d\mu_k\right| < \frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{2n}$$

Como queríamos. Observar que la primera cota (que no explicitamos) se obtiene dado que g esta arbitrariamente C^1 cerca de f y la órbita de O por g se mantiene arbitrariamente cerca (en función de la continuidad uniforme expresada arriba) de la órbita de y por g.

◇

Ahora estamos en condiciones de concluir la prueba. Basta mostrar que existen órbitas periódicas O_n de f con período $\pi(O_n)$ de forma tal que si $p_n \in O_n$

$$\frac{1}{\pi(O_n)}\sum_{i=0}\varphi_j(f^i(p_n)) \to \int \varphi_j d\mu$$

Para todo φ_j el conjunto denso definido arriba.

Fijado $\delta > 0$ y Φ_l un subconjunto de $\{\varphi_j\}$, consideramos μ_k a distancia menor que $\delta/2$ de μ. Fijamos n tal que $1/n < \delta/2$.

Entonces, como $f \in \mathcal{U}(\mu_k, \Phi_l, N, n)$ se cumple que hay una órbita periódica $O_{\delta,l}$ que verifica que para toda $\varphi \in \Phi_l$ se cumple que si $p \in O_{\delta,l}$

$$\left|\frac{1}{\pi(O_{\delta,l})}\sum_{i=0}^{\pi(O_{\delta,l})-1}\varphi(f^i(p))-\int\varphi d\mu\right|\leq\left|\frac{1}{\pi(O_{\delta,l})}\sum_{i=0}^{\pi(O_{\delta,l})-1}\varphi(f^i(p))-\int\varphi d\mu_k\right|+\left|\int\varphi d\mu-\int\varphi d\mu_k\right|<\delta$$

Mediante un proceso diagonal, obtenemos órbitas periódicas de f con las propiedades buscadas.

□

4. Apéndice 1: Esbozo de prueba del Lema de Pugh

La idea es muy simple (vista 40 años despues de que apareció). Para simplificar, vamos a trabajar con un "toy model".

Tenemos $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(u,v)=(u,v+1)$. Fijado $\mathcal{U}$ entorno C^1 de f tenemos por el Lema de perturbación elemental un valor de θ.

Sea $r\ll 1$ y consideramos los puntos $x=(-r/2,0)$ e $y=(r/2,0)$. Vamos a ver que considerando N suficientemente grande, podemos conseguir $g\in\mathcal{U}$ de forma tal que $g^N(x)=f^N(y)$.

Una cosa que hay que demostrar es que si se hacen perturbaciones pequeñas con soporte disjuntos no se agranda el tamaño de la perturbación.

Ahora, consideramos N de forma tal que $\frac{\theta}{N}<\varepsilon$. Precomponiendo con perturbaciones elementales soportadas en $B(x_i,\theta r/N)$ donde $x_i=(r(-\frac{1}{2}+\frac{2i+1}{2N}),i)$ donde $0\leq i\leq N-1$ que envien el punto $(r(-\frac{1}{2}+\frac{i}{N}),i)$ en $(r(-\frac{1}{2}+\frac{i+1}{N}),i)$; obtenemos una perturbación pequeña de f como la deseada. Notese que estas perturbaciones verifican las propiedades deseadas (también del agregado al Lema).

¿Cuál es la dificultad del caso general? Evidentemente no es un problema dimensional (trabajar en dimension dos simplemente simplifico la notación), el problema es que en nuestro modelo, el mapa es una translacion, es decir, la derivada es la identidad y por ende la geometría de la bola donde vamos a perturbar no se ve afectada por la aplicación de f. Esta dificultad es puramente técnica, y si bien hace la prueba bastante más complicada, la idea de la prueba es la efectuada en este modelo simplificado.

5. Apéndice 2: Prueba del Closing Lemma

Aprovechamos a presentar también la prueba de Crovisier (en [C]) del Clásico Closing Lemma de Pugh.

Teorema 5.1 (Closing Lemma)**.** *Sea $\mathcal{U}$ un entorno de $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$. Entonces, si $x\in\Omega(f)$, entonces existe $g\in\mathcal{U}$ tal que x es periódico.*

Demostración.Basta probar que existe $g\in U$ con un punto periódico en un entorno arbitrariamente pequeño de x (después, con una pequeña translación se hace x periódico).

Fijemos $\varepsilon>0$ de forma tal que $(1+\varepsilon)^L<5/4$ donde $L=2^d+1$. El Lema de Pugh nos da un valor de N para poder realizar perturbaciones.

Como podemos suponer que x no es periódico, considerando una carta $\varphi:V\to\mathbb{R}^d$, tenemos cubos C arbitrariamente pequeños centrados en x de forma tal que $2C$ es disjunto de sus N primeros iterados. Vamos a ver que podemos crear un punto periódico en $2C$.

Como x es no errante, existe $y\in C$ tal que $f^k(y)\in C$ es el primer iterado de y que vuelve a C.

Podemos asumir que hay un iterado intermedio $f^{k_1}(y)$ con $0<k_1<k$ en $(1+\varepsilon)C$, sino podriamos, utilizando el Lema de Pugh crear un punto periódico en C. Ahora, fijandonos en $(1+\varepsilon)^2C$ tenemos un iterado intermedio $f^{k_2}(y)$ con $0<k_2<k_1$ también. Iterando este proceso L veces, obtenemos valores $0<k_L<\ldots<k_1<k$ tales que $f^{k_i}(y)\in(1+\varepsilon)^iC\backslash(1+\varepsilon)^{i-1}C$.

Como $L > 2^d$, si partimos $(1+\varepsilon)^L C$ en 2^d cubos iguales, tendremos que alguno de ellos contendrá 2 puntos por el principio del palomar. Llamamos a este cubo C_1 que verifica que $2C_1 \subset 2C$ por como elegimos L ($(1+\varepsilon)^L < 5/4$).

En C_1 entonces, tenemos un punto $z \in \{y, f(y), \dots, f^k(y)\}$ tal que su primer retorno a C_1 es $f^{k'}(z)$ con $k' < k$. Entonces, si repetimos el argumento en algun momento el proceso se termina. Eso implica que en algun momento, encontramos un punto que retorna a un cubo sin pasar por la homotecia de razon $(1+\varepsilon)$ de ese cubo.

Esto concluye la prueba del Closing Lemma.

$\square$

Referencias

[C] S. Crovisier,*Perturbation de la dynamique de difféomorphismes en petite regularite*, These d'habilitation, Universite Paris 13 (2009)

CMAT, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay
E-mail address: rpotrie@cmat.edu.uy