Funciones de Variable Compleja [1]

1. Introducción al cuerpo de los complejos

Vamos a definir a los complejos como $\mathbb{C} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ y vamos a adoptar la notación $z = (a, b) \sim a + ib$ donde i es el bien conocido numero imaginario que cumple que $i^2 = -1$. Al valor a le vamos a llamar $\mathrm{Re}[z]$ la parte real del complejo y a b le vamos a llamar $\mathrm{Im}[z]$ la parte imaginaria. Vamos también a definir las siguientes operaciones:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + i^2 b + iad + ibc = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Estas son la suma y el producto, el producto fue extendido de forma de mostrar claramente que la intención de las operaciones definidas es que se opere con el numero i.

Al igual que los Reales, con estas operaciones, los Complejos son un cuerpo, es decir, tienen definidas dos operaciones (la suma y el producto) y estas cumplen ciertas propiedades. Este cuerpo se nota como $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ y cumple (como todos los cuerpos) que es cerrado bajo ambas operaciones, con la primera es un grupo abeliano (cumple asociativa, conmutativa, existencia de neutro y de inverso), con la segunda también si quitamos del conjunto al neutro de la suma y además cumple la distributiva. Por esto esta definida (a diferencia de $\mathbb{R}^2$) la división y es fácil ver que el inverso del complejo $z = a + ib$ es el complejo $z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$. Nada de esto es nuevo, todas estas propiedades son bien parecidas a las estudiadas para reales, y todos los resultados conocidos que se desprenden de estas propiedades valen tanto para los Reales como para los Complejos (se puede demostrar que las operaciones así definidas cumplen todas estas propiedades). El problema es que no hay forma de definir en estos números un orden como el que existe en los reales que mantenga todas las propiedades que cumple el orden de estos (como por ejemplo la monotonía, etc.).

Topológicamente los Complejos se comportan de forma idéntica a $\mathbb{R}^2$ definiendo la métrica a partir del valor absoluto de un complejo:

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

que induce una topología equivalente a la de $\mathbb{R}^2$ (observar que es la distancia euclidea al origen) por lo que todas las propiedades topológicas ya conocidas para $\mathbb{R}^2$ son válidas.

Como se ve, un número complejo puede ser visto como un vector de $\mathbb{R}^2$ o sea que también puede ser definido por su módulo y el ángulo que forma con el eje real. A este ángulo se le llama argumento y es una función de los complejos en los reales cocientados con la relación de equivalencia $a \sim b \Leftrightarrow a - b = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. De esa forma también vamos a usar como notación esa propiedad escribiendo $z = |z|e^{i\arg(z)}$ donde como ya se sabe la exponencial esta definida como:

$$e^z = e^{\mathrm{Re}[z]}(\cos(\mathrm{Im}[z]) + i\,\mathrm{sen}(\mathrm{Im}[z]))$$

Esto hace intentar definir las funciones seno y coseno de un complejo y esto se hace de la siguiente forma:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Es fácil ver que estas funciones extienden a las funciones reales de igual nombre y además que cumplen casi todas las mismas propiedades (no todas, por ejemplo el seno y el coseno no son acotados), pero en este texto no nos vamos a detener en eso. También se puede definir la función inversa de la exponencial como $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ que es una función multiforme y se soluciona eligiendo el representante a tomar de $\arg(z)$.

También como es sabido se define otra operación; la conjugación en la cual si $z = a + ib$ entonces $\overline{z} = a - ib$.

Observamos que esta es una introducción con la intención de presentar la notación a ser usada y fijar los conocimientos previos requeridos para continuar la lectura.

2. Funciones de variable compleja

2.1. Derivabilidad

Definición 2.1. Decimos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una *región sii* es abierto y conexo.

Definición 2.2. Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ decimos que es derivable en $z_0 \in \Omega$ *sii* existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

y a $f'(z_0)$ le llamamos derivada de f en z_0.

[1] Notas realizadas por Rafael Potrie en el primer semestre de 2004 y revisadas parcialmente en marzo de 2006

Observación. $h \in \mathbb{C}$.

Las propiedades elementales de los límites nos dan que si una función compleja f es derivable en un punto $x \in \mathbb{R}$ y f asigna números reales a los números reales, entonces f es derivable como función real y las derivadas coinciden. El recíproco no es cierto porque, por definición, para que una función tenga derivada compleja en un punto es necesario que esté definida en un entorno del punto en $\mathbb{C}$, y puede ocurrir que una función derivable en el sentido real no pueda extenderse a una función derivable en el sentido complejo. También es fácil ver que una función compleja derivable es continua y que además se cúmplen las propiedades más importantes de derivabilidad en los reales (hay que tener en cuenta que algebraicamente son iguales por lo tanto también en las operaciones con limites) entonces también cumplen la regla de la cadena, como también la derivabilidad de la suma el producto, la función inversa, etc.

Proposición 2.1. *f es derivable en z_0 si y sólo si es diferenciable en z_0*

Demostración. La diferenciabilidad implica el acercamiento por una transformación $\mathbb{C}$-lineal.

($\Rightarrow$) La función es derivable entonces tenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

entonces definamos $r(h) = f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h$ donde esta función claramente cumple que $\frac{r(h)}{h} \longrightarrow 0$ cuando $h \to 0$ por lo que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + r(h) \qquad \frac{r(h)}{h} \stackrel{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

($\Leftarrow$) Ahora tenemos que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = Ah + r(h) \qquad \frac{r(h)}{h} \stackrel{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ y } A \in \mathbb{C}$$

despejando A y pasando al limite cuando h tiende a 0 llegamos a que :

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} + \frac{r(h)}{h}$$

pero por hipótesis $\frac{r(h)}{h} \stackrel{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ entonces $A = f'(z_0)$.

$\square$

Si pensamos el plano complejo como $\mathbb{R}^2$ podemos pensar también las funciones complejas como funciones de $\mathbb{R}^2$ en si mismo. El teorema de Cauchy-Riemann permite comparar las nociones de diferenciabilidad en el plano complejo con las ya conocidas en $\mathbb{R}^2$.

Antes vamos a definir la notación que usaremos. Si tenemos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tendremos dos funciones $\operatorname{Re} f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ y $\operatorname{Im} f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Es claro que existe una analogía con la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $g(\operatorname{Re}[z], \operatorname{Im}[z]) = (\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z))$; muchas veces le llamaremos igual a ambas y trabajaremos en distintos dominios según convenga. También vamos a llamarle $u(z)$ o $u(x, y)$ a $\operatorname{Re} f(z)$ y $v(z)$ o $v(x, y)$ a $\operatorname{Im} f(z)$ (con $x = \operatorname{Re}[z]$ e $y = \operatorname{Im}[z]$).

Teorema 2.2 (Cauchy-Riemann). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f \sim (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (con la analogía ya vista) y sea $z_0 \in \Omega$, entonces: f derivable en $z_0 \Leftrightarrow (u, v)$ diferenciable, $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ y $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$. Además se cumple que $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Vamos a hallar la derivada en z_0 acercándonos por $h \to 0$ donde $h \in \mathbb{R}$. Para eso calculamos

$$f'(x_0 + iy_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0)$$

De donde se desprende que $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$. Y además:

$$f'(x_0 + iy_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + ih) - f(x_0 + iy_0)}{ih} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + iy_0)$$

Y como la derivada compleja no depende de h, llegamos a que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

que si $f = u + iv$ equivale a:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

por existir estas derivadas y notando que $f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0)$ tenemos que pensada como en $\mathbb{R}^2$ la función cumple

$$(u(z + h), v(z + h)) - (u(z), v(z)) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & -v_x(z_0) \\ v_x(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(h) \\ \operatorname{Im}(h) \end{pmatrix} + r(h)$$

estamos tomando la equivalencia ya vista de que dado un $z \in \mathbb{C}$ le asociamos el vector $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ de $\mathbb{R}^2$ entonces lo que nos queda es asegurarnos que $\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0$ cuando $h \to (0,0)$ sabiendo que $\frac{r(h)}{h} \to 0$ (con la division compleja).Pero

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \frac{r(h)}{\|h\|}\frac{h}{h} = \frac{r(h)}{h}\frac{h}{\|h\|}$$

donde $\frac{h}{\|h\|}$ esta acotado,entonces se ve que

$$\frac{r(h)}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

($\Leftarrow$) Tenemos que

$$(u(x_0+h, y_0+k), v(x_0+h, y_0+k)) - (u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)) = df(x_0,y_0)(h,k) + r((h,k))$$

$$\frac{r((h,k))}{\|(h,k)\|} \overset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

y donde

$$df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Pero por las condiciones de las derivadas parciales tenemos que :

$$df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & -v_x(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & u_x(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

(de ahora en mas $u_x \sim u_x(x_0,y_0), v_y \sim v_y(x_0,y_0)$)
entonces desarrollando llegamos a que

$$(u(x_0+h, y_0+k), v(x_0+h, y_0+k)) - (u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)) = (u_x h - v_x k, v_x h + u_x k) + r((h,k))$$

$$\frac{r((h,k))}{\|(h,k)\|} \overset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

que se ve que es equivalente a

$$f(z_0 + (h+ik)) - f(z_0) = (u_x h - v_x k) + i(v_x h + u_x k) + r(h+ik) = (u_x + iv_x)(h+ik) + r(h+ik)$$

entonces notando que

$$\frac{r((h,k))}{\|(h,k)\|} = \frac{r((h,k))}{\|(h,k)\|}\frac{h+ik}{h+ik} = \frac{r(h+ik)}{h+ik}\frac{h+ik}{\|(h,k)\|}$$

donde $\frac{h+ik}{\|(h,k)\|}$ esta acotado, vemos que

$$\frac{r(h+ik)}{h+ik} \overset{h+ik\to 0}{\longrightarrow} 0$$

entonces f es diferenciable y $f'(z_0) = u_x + iv_x$. □

Observación. Como vimos, $u(x,y)$ y $v(x,y)$, funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ se pueden notar también como funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$ como $u(z)$ y $v(z)$; pero además hay otra forma de notarlas como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ por medio de $u(r,\varphi)$ y $v(r,\varphi)$. Estas funciones también cumplen Cauchy-Riemann pero hay que recordar que al derivar respecto de φ tenemos que dividir entre r para corregir las ecuaciones que son

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

o equivalentemente

$$u_r = \frac{1}{r}v_\varphi \qquad v_r = -\frac{1}{r}u_\varphi$$

Definición 2.3. Decimos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *holomorfa* en z_0 *sii* existe ε tal que f es derivable en $B_\varepsilon(z_0)$.

Definición 2.4. Decimos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *holomorfa* en Ω *sii* f es holomorfa en todos los puntos de Ω. Notamos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

2.2. Funciones Conformes

Definición 2.5. Dadas dos curvas con parametrizaciones $\alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase C^1 tales que $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ y que $\dot{\alpha}^2(t_0) + \dot{\beta}^2(t_0) \neq 0$ definimos el ángulo entre esas curvas en $t = t_0$ como $\operatorname{ang}(\alpha, \beta)_{t_0} = \arg(\dot{\alpha}(t_0)) - \arg(\dot{\beta}(t_0))$ (todos las operaciones son módulo 2π).

Definición 2.6. Dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ decimos que es *conforme* en $z_0 \in \Omega$ *sii* para todo par de curvas α, β de clase C^1 tales que $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ se cumple que $\operatorname{ang}(\alpha, \beta)_{t_0} = \operatorname{ang}(f(\alpha), f(\beta))_{t_0}$.

Teorema 2.3. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ entonces f es conforme.*

Demostración. Tomemos $\alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase C^1 tales que $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ y que $\dot{\alpha}^2(t_0) + \dot{\beta}^2(t_0) \neq 0$ entonces definamos $\gamma(t) = f(\alpha(t))$ y $\varphi(t) = f(\beta(t))$ y vamos a hallar el ángulo que forman cuando $t = t_0$

$$\dot{\gamma(t)} = f'(\alpha(t_0))\dot{\alpha}(t_0) = f'(z_0)\dot{\alpha}(t_0) \quad ; \quad \dot{\varphi}(t) = f'(\beta(t_0))\dot{\beta}(t_0) = f'(z_0)\dot{\beta}(t_0)$$

Usando que $\arg(ab) = \arg(a) + \arg(b)$ (probar como ejercicio) tenemos que :

$$\operatorname{ang}(\gamma, \varphi)_{t_0} = \arg(f'(z_0)\dot{\alpha}(t_0)) - \arg(f'(z_0)\dot{\beta}(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{\alpha}(t_0)) - \arg(f'(z_0)) - \arg(\dot{\beta}(t_0)) =$$

$$= \arg(\dot{\alpha}(t_0)) - \arg(\dot{\beta}(t_0)) = \operatorname{ang}(\alpha, \beta)_{t_0}$$

□

Véase que por ser derivable f también era diferenciable en el sentido de $\mathbb{R}^2$ y además su derivada no se anulaba en ningún momento por lo que el jacobiano de la función análoga en $\mathbb{R}^2$ tampoco.Esto se aclara porque van a ser las hipótesis a agregar cuando demostremos el recíproco del teorema.

Teorema 2.4. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ conforme , diferenciable en el sentido de $\mathbb{R}^2$ y con diferencial siempre distinto de* 0*, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*

Demostración. Vamos a usar que las traslaciones son funciones conformes entonces su composición con otras funciones conformes también es conforme; a la vez si queremos probar que es holomorfa en Ω entonces basta probar que la composición de f con una traslación es derivable en 0.Tomemos $\alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $\alpha(t) = t$ y $\beta(t) = it$ entonces estas curvas en 0 son ortogonales entonces las curvas $f \circ T(\alpha(t))$ y $f \circ T(\beta(t))$ son perpendiculares, eso significa que

$$\lambda i \left(\frac{\partial f}{\partial x}(T(0))T'(0) \right) = \frac{\partial f}{\partial y}(T(0))T'(0)$$

donde $\lambda \geq 0$. Entonces

$$\lambda i \left(\frac{\partial f}{\partial x}(T(0)) \right) = \frac{\partial f}{\partial y}(T(0))$$

Ahora tomando $\alpha(t) = t + it$ y $\beta(t) = 1 - it$, nuevamente tenemos rectas ortogonales entonces pensadas en $\mathbb{R}^2$ tienen que cumplir :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(T(0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(T(0)), \frac{\partial f}{\partial x}(T(0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(T(0)) \right\rangle = 0$$

entonces tomando $f = u + iv$ tenemos que $u_x^2(T(0)) + v_x^2(T(0)) = u_y^2(T(0)) + v_y^2(T(0))$ por lo que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(T(0))\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(T(0))\right|$ por lo que teniendo en cuenta que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(T(0))\right| \neq 0$ por hipótesis tenemos que $\lambda = 1$ y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

□

2.2.1. Transformaciones de Möbius

Antes de definir estas transformaciones vamos a trabajar en el plano complejo, lo que vamos a ser se llama compactificarlo o sea que le vamos a agregar un punto para que nos quede un pase a ser un conjunto compacto. Para eso vamos a definir la "clausura" de $\mathbb{C}$.

Definición 2.7.

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

La topología de este conjunto estará dada por la del plano complejo y le agregaremos (como entornos del nuevo punto) el complemento de abiertos acotados del plano. Además vamos a definir las operaciones que lo involucran.

- $a\infty = \infty$ si $a \neq 0$.
- $a + \infty = \infty$ si $a \in \overline{\mathbb{C}}$.
- $\frac{a}{0} = \infty$ si $a \in \overline{\mathbb{C}}$.

Para las operaciones de las formas $\infty - \infty$, 0∞ y ∞/∞ o $0/0$ usaremos el álgebra de límites.

Para visualizar este nuevo espacio, lo podemos pensar como la esfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ asociando a cada punto del plano su proyección estereográfica (unir el polo norte $(0,0,1)$ al punto de $\mathbb{C}$ y asignarles el punto de corte con la esfera) y asignarle al polo norte el ∞.

Definición 2.8 (Transformaciones de Möbius). Definimos $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ como

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ y } ad-bc \neq 0$$

decimos entonces que $\varphi \in \mathcal{M}$.

Observación. Es fácil ver que si $\varphi \in \mathcal{M}$ entonces $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\})$ por que :

$$\varphi'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

además $\varphi'(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ entonces por lo antes visto φ es conforme en $\mathbb{C}$.

Observación. Si $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ y $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ entonces existe $\varphi^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$ y $\varphi^{-1} \in \mathcal{M}$.

Observación. También se ve que si $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ entonces $\varphi \circ \psi \in \mathcal{M}$ por que :

$$\varphi \circ \psi(z) = \frac{a\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+b}{c\left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+d} = \frac{(aa'+abc')z+(ab'+abd')}{(ca'+acc')z+(cb'+cdd')}$$

y además $(aa'+abc')(cb'+cdd') - (ab'+abd')(ca'+acc') = ac((a'+bc')(b'+dd') - (b'+bd')(a'+ac'))$ pero $ac \neq 0$ y viendo esto se ve que $(a'+bc')(b'+dd') - (b'+bd')(a'+ac') \neq 0$ (tener en cuenta que $ad-bc \neq 0$ y $a'd'-b'c' \neq 0$). Por lo que $\mathcal{M}$ es cerrada por la composición, se puede ver también fácilmente que $(\mathcal{M}, \circ)$ es un grupo.

Observación. Si $\varphi \in \mathcal{M}$ entonces $\varphi(\infty) = \frac{a}{c}$ y $\varphi(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Vamos ahora a definir algunas transformaciones de Möbius muy útiles y ya conocidas:

Definiciónes 2.9.

- $\varphi_1(z) = z + b$ con $b \in \mathbb{C}$ (traslación)
- $\varphi_2(z) = qz$ con $q \in \mathbb{C}$ y $|q| = 1$ (rotación)
- $\varphi_3(z) = az$ con $a \in \mathbb{R}$ (homotecia)
- $\varphi_4(z) = \frac{1}{z}$ (inversion)

Proposición 2.5. *Cualquier $\varphi \in \mathcal{M}$ se puede escribir como composición de las transformaciones recién definidas.*

Demostración. Si $c \neq 0$ entonces :

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

Ahora hacemos primero $z \mapsto c^2z + cd$ (traslación, con rotación y homotecia) después $z \mapsto \frac{1}{z}$ (inversion) después $z \mapsto (bc-ad)z + \frac{a}{c}$ (traslación con rotación y homotecia).

Claramente si $c = 0$ el teorema vale. □

Teorema 2.6. *El conjunto $\mathcal{F} = \{t \subset \mathbb{C} : t$ es una recta o una circunferencia$\}$ es invariante bajo transformaciones de Möbius.*

Demostración. Gracias a la proposición anterior nos basta con mostrar que esto se cumple para las transformaciones definidas anteriormente (traslación, rotación, homotecia e inversion).Convendremos en que ∞ pertenece a cualquier recta y claramente no pertenece a ninguna circunferencia.

Se sabe que las circunferencias son los puntos $z = x + iy \in \mathbb{C}$ que cumplen $(x-a)^2 + (x-b)^2 - r^2 = 0$ donde $a+ib$ es el centro y r es el radio. Multiplicando por un real $A \neq 0$ tenemos

$$A(x^2+y^2) - 2Aax - 2Aby + A(a^2+b^2-r^2) = 0$$

O sea que las circunferencias son los conjuntos de puntos que cumplen la ecuación

$$A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$$

Donde $A \neq 0$ y $B^2 + C^2 - AD > 0$ (ya que $B^2 + C^2 - AD = A^2r^2$). Pero al mismo tiempo si $A = 0$ y $B^2 + C^2 \neq 0$ entonces estamos frente a la ecuación de una recta (agregándole el punto ∞). O sea que los conjuntos de puntos que cumplen $A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$ con $B^2 + C^2 - AD > 0$ si $A \neq 0$ y $B^2 + C^2 \neq 0$ si $A = 0$ son los conjuntos de $\mathcal{F}$. Esto equivale (volviendo a la notación de z) a que

$$Az\overline{z} + E\overline{z} + \overline{E}z + D = 0$$

Donde $E = B + iC$ (o sea que se necesita $A = 0$ y $E \neq 0$ o bien $A \neq 0$ y $E\overline{E} - AD > 0$). Es claro que estos conjuntos son invariantes frente a la traslación, la rotación y la homotecia, queda probar que es cierto para la inversion. Entonces tenemos que ver que puntos cumplen (considerando los $z \neq 0$) :

$$A\frac{1}{z\overline{z}} + E\frac{1}{\overline{z}} + \overline{E}\frac{1}{z} + D = 0$$

o equivalentemente

$$Dz\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + A = 0$$

Si $A \neq 0$ y $D \neq 0$ (con lo que $z = 0$ no cumple la ecuación) tenemos que el conjunto inicial era una circunferencia y su imagen también. Si $A \neq 0$ pero $D = 0$ entonces el conjunto inicial era una circunferencia y el final es una recta. El 0 pertenece a la circunferencia y su imagen es ∞, que pertenece a la recta. Si $A = 0$ y $D \neq 0$ tenemos una recta que no pasa por 0 y se transforma en una circunferencia. El 0 esta en la imagen porque es la imagen de ∞, que estaba en la recta. Finalmente si $A = D = 0$ tenemos una recta que pasa por 0 y que se transforma en otra recta que pasa por 0 (de modo que 0 e ∞ se intercambian). Esto prueba que $\mathcal{F}$ es invariante bajo $\frac{1}{z}$ recordando la proposición anterior el teorema queda probado. □

Proposición 2.7. *Hay una única $\varphi \in \mathcal{M}$ tal que $\varphi((a, b, c)) = (0, 1, \infty)$.*

Demostración. Si $a \neq \infty$, $b \neq \infty$ y $c \neq \infty$ tomemos

$$\varphi(z) = \frac{(b - c)(z - a)}{(b - a)(z - c)}$$

Si $a = \infty$, $b = \infty$ o $c = \infty$ entonces

$$\varphi(z) = \frac{b - c}{z - c}, \qquad \varphi(z) = \frac{z - a}{z - c}, \qquad \varphi(z) = \frac{z - a}{b - a}$$

En ese orden. Y se ve que son únicas por que si hubiese entonces para que $\varphi(a) = 0$ necesitamos que $\varphi(z) = \frac{k(z-a)}{hz+j}$ para que $\varphi(c) = \infty$ necesitamos que $\varphi(z) = \frac{k(z-a)}{g(z-c)}$ y por último para que $\varphi(b) = 1$ necesitamos que $k = b - a$ y $g = b - c$ con lo que queda esto probado. □

Corolario 2.8. *Hay una única $\varphi \in \mathcal{M}$ tal que $(a, b, c) \mapsto (a', b', c')$:*

2.3. Funciones Analíticas

Antes de definir estas funciones vamos a recordar un teorema acerca de las series de potencias.

Teorema 2.9. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ entonces existe $R \in [0, +\infty]$ que cumple :*

1. $\sum_0^\infty a_n z^n$ *Converge absolutamente para* $|z| < R$
2. $\sum_0^\infty a_n z^n$ *Diverge para* $|z| > R$
3. $\sum_0^\infty a_n z^n$ *Converge uniformemente para* $|z| < r < R$
4. $\frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$

Definición 2.10. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ entonces decimos que f es *analítica* en Ω *sii* $\forall z_0 \in \Omega\ \exists r > 0$ tal que $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n\ \forall z \in B_r(z_0)$.

Teorema 2.10. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ entonces:*

$$f\, analítica \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Además : $f'(z) = \sum_1^\infty na_n(z - z_0)^{n-1}$

Demostración. Para empezar vamos a ver que la expresión dada para la derivada tiene el mismo radio de convergencia, pero eso es fácil porque $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ entonces $\frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{na_n}$. Ahora vamos a suponer que $z_0 = 0$ por comodidad (es claro que no tiene importancia). Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |w| < \rho < R$ ahora definamos

$$g(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_1^\infty na_n w^{n-1} = \sum_1^\infty a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - nw^{n-1}\right) =$$

$$= (z - w)\sum_1^\infty a_n \left(\frac{z^n - w^n - nw^{n-1}(z - w)}{(z - w)^2}\right)$$

y se puede ver que

$$\Phi_n = \frac{z^n - w^n - nw^{n-1}(z-w)}{(z-w)^2} = \frac{d}{dw}\left(\frac{z^n - w^n}{z-w}\right) \Rightarrow \frac{z^n - w^n}{z-w} = z^{n-1}\left(\frac{1-\left(\frac{w}{z}\right)^n}{1-\left(\frac{w}{z}\right)}\right) = z^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{w}{z}\right)^k$$

$$\Rightarrow \Phi_n = \frac{d}{dw}\left(z^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{w}{z}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1} \Rightarrow |g(z)| \leq |z-w|\sum_{1}^{\infty}|an||\Phi_n|$$

y además si z es suficientemente cercano a w tenemos que

$$|\Phi_n| \leq \sum_{k=1}^{n-1} k|w|^{k-1}|z|^{n-k-1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} k\rho^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}\rho^{n-2} \Rightarrow |g(z)| \leq |z-w|\sum_{2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}a_n\rho^{n-2}$$

Pero $\rho < R$ entonces la serie converge por lo que $|g(z)| \to 0$ cuando $z \to w$ por lo tanto f es holomorfa en 0.

□

El recíproco de este teorema es cierto pero aún no estamos en condiciones de probarlo, en la próxima sección vamos a hacernos de herramientas para demostrarlo.

3. Integración Compleja

3.1. Teorema de Cauchy

En este teorema vamos a definir la integral de una función compleja sobre una curva y probar algunas cosas acerca de ella.

Definición 3.1. Sea γ^* una curva del plano complejo entonces decimos que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una parametrización de γ^* *sii* $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t) \text{ con } t \in [a,b]\}$.

Observación. Se ve que γ tiene que ser de clase C^1 a trozos, para que γ^* sea una curva.

Definición 3.2. Dada $\gamma^* \subset \Omega$ una curva, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una parametrización y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ entonces definimos

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Observación. Si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ y $f(z) = u(z) + iv(z)$ tenemos que:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))dt =$$

$$= \int_a^b (u(\gamma(t))\dot{x}(t) - v(\gamma(t))\dot{y}(t))dt + i\int_a^b (u(\gamma(t))\dot{y}(t) + v(\gamma(t))\dot{x}(t))dt$$

Entonces $\mathrm{Re}\left[\int_\gamma f(z)dz\right] = \int_\gamma (u,-v)d\gamma$ y $\mathrm{Im}\left[\int_\gamma f(z)dz\right] = \int_\gamma (v,u)d\gamma$

Por esa observación se pueden demostrar muchas propiedades usando las conocidas del calculo vectorial.

Propiedades.

- $\int_\gamma (\mu f(z) + \lambda g(z))dz = \mu\int_\gamma f(z)dz + \lambda\int_\gamma g(z)dz$
- $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|dz$
- *Si* $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ *(notamos* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$*)* $\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$
- *Si* $|f(z)| \leq M \Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M \operatorname{long}\gamma.$

Proposición 3.1. *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *tal que* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*y que* f' *de clase* $C^0(\Omega)$*, sea* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *de clase* C^1 *(a trozos) tal que* $\gamma([a,b]) \subset \Omega$ *entonces*

$$\int_\gamma f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Demostración. Tomemos $f \circ \gamma(t)$ que es también una curva C^1 (suponemos que es C^1 por que si es a trozos hacemos el razonamiento trozo por trozo) entonces al derivarla queda $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$. Por lo tanto por la definición de la integral:

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_a^b f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a)$$

como queríamos por la regla de Barrow □

Teorema 3.2 (Teorema de Cauchy para triángulos). *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y sea* $\Delta \subset \Omega$ *un triángulo cerrado,* $\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

Observación. Si consideraramos las formas diferenciales $\omega_1 = udx - vdy$ y $\omega_2 = vd_x + udy$ (con la notación anterior de $f \sim (u,v)$ y el paralelismo con $\mathbb{R}^2$) se puede ver que en realidad

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta} \omega_1 + i\int_{\partial\Delta} \omega_2$$

Que gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann sabemos que cumple que $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$ por lo que si pudiesemos aplicar el teorema de Stokes implicaría inmediatamente la tesis del teorema. Ocurre que no lo podemos aplicar dado que carecemos de hipotesis de regularidad para las funciones u, v que luego probaremos que son ciertas; pero utilizando este teorema.

Demostración. Para empezar vamos a orientar el borde de el triángulo y tomar los puntos medios de sus lados creando un nuevo triángulo con esos puntos como vertices. Luego de hacer esa division estamos frente a 4 triángulos cuyo perímetro es la mitad del primero. Lo que tenemos que hacer es orientar los bordes de los triángulos exteriores de forma tal de que sean coherentes con la orientación del inicial; y al del centro de forma que al unir las cuatro curvas estemos recorriendo realmente el triángulo exterior. Entonces tenemos que

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz + \int_{T_3} f(z)dz + \int_{T_4} f(z)dz$$

o mas aun que

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \le \left|\int_{T_1} f(z)dz\right| + \left|\int_{T_2} f(z)dz\right| + \left|\int_{T_3} f(z)dz\right| + \left|\int_{T_4} f(z)dz\right|$$

pero claramente esto indica que si llamamos $J = \left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right|$ que para algún T_i con $i = 1 \dots 4$ tenemos $J_1 = \left|\int_{T_i} f(z)dz\right| \ge \frac{J}{4}$. A ese triángulo le vamos a llamar A_1 y con el mismo razonamiento vamos a crear una sucesión de triángulos con la característica que si $J_n = \left|\int_{\partial A_n} f(z)dz\right|$ entonces $J_n \ge \frac{J_{n-1}}{4} \ge \dots \ge \frac{J}{4^n}$. Tenemos entonces una sucesión de compactos que cumplen que $A_n \subset A_{n-1}$ además si definimos $l = \text{perimetro}(\Delta)$ entonces $\text{perimetro}(A_n) = \frac{l}{2^n}$ entonces el $\text{diam}(A_n) \to 0$ con n;por compacidad nos aseguramos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset \{z_0\} \subset \Delta \subset \Omega$$

Pero como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists r > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0| \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

Claramente podemos encontrar n_0 de forma que si $n > n_0$ tengamos a $A_n \subset B_r(z_0)$. A su vez tenemos que considerar que

$$\int_{\partial A_n} f(z)dz = \int_{\partial A_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))dz \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

que es verdad por que tanto $f(z_0)$ que es constante como $f'(z_0)(z - z_0)$ que es un polinomio tienen primitivas por lo tanto su integral en una curva cerrada es nula. Pero juntando estas cosas tenemos que $\forall n > n_0$

$$\left|\int_{\partial A_n} f(z)dz\right| \le \int_{\partial A_n} |(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))|\, dz \le \int_{\partial A_n} \varepsilon|z - z_0|dz$$

acotando $|z - z_0| \le \text{diam}(A_n) \le \text{perimetro}(A_n) = \frac{l}{2^n}$ entonces como sabíamos $J \le 4^n J_n$ entonces

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial A_n} f(z)dz\right| \le 4^n\varepsilon\left(\frac{l}{2^n}\right)^2 = \varepsilon l^2$$

Llegando a que $0 \le J \le \varepsilon l^2$, $\forall\varepsilon > 0$ como queríamos probar. □

Observación. Este teorema vale también si en vez de pedir que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$pedimos que $f \in \mathcal{H}(\Omega/\{P\})$ y que $f \in C^0(\Omega)$. Esto se ve claramente separando los posibles casos. En primer lugar, si P no esta en Δ no hay cambios en el teorema, si P esta en el triángulo, es fácil ver que se puede considerar como vértice, por que si no es se puede dividir el triángulo inicial en tres con P vértice de todos. Entonces analizando el caso en que P es vértice del triángulo, se puede tomar 2 puntos X e Y en los lados que contienen a P de forma que se divida el triángulo en 3 (si los otros vertices son Q y R tomamos los triángulos $\triangle(QXY)$,$\triangle(QXR)$ y $\triangle(XYP)$) y que podamos hacer el perímetro de $\Delta = \triangle(XPY)$ tan pequeño como queramos. Teniendo en cuenta que por ser continua f esta acotada en un compacto $(\partial\Delta)$ o sea $|f(z)| \le M \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \le \int_{\partial\Delta} |f(z)|dz \le M\,\text{perimetro}(\Delta)$$

eligiendo convenientemente X e Y tenemos lo que buscábamos.

Teorema 3.3 (Teorema de Cauchy version Local). *Sea Ω un conjunto convexo y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$ $\forall\gamma$ curva cerrada.*

Demostración. Sea $a \in \Omega$ defino $F(z) = \int_{[a,z]} f(z)dz$ (donde $[a,z]$ es el segmento que une a con z). Para demostrar el teorema alcanzaría con mostrar que F es derivable y $F' = f$. Tenemos que

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[a,z]} f(z)dz - \int_{[a,z_0]} f(z)dz = \int_{[z_0,z]} f(z)dz$$

por el teorema anterior. Ahora veamos

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f(z)dz - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} (f(z) - f(z_0))dz$$

porque $\int_{[z_0,z]} f(z_0)dz = f(z_0)(z - z_0)$. Pero como f es continua (por ser holomorfa) tenemos que dado $\varepsilon > 0$ $\exists\delta$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ entonces

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| = \frac{1}{|z - z_0|}\int_{[z_0,z]} |(f(z) - f(z_0))|\, dz < \varepsilon$$

con lo que finaliza la prueba. □

3.2. Teorema del índice

Definición 3.3. Sea γ^* una curva cerrada en $\mathbb{C}$ y $D = \mathbb{C} - \gamma^*$ entonces definimos $\operatorname{Ind}_\gamma : D \to \mathbb{C}$ como

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

el *índice* de z respecto a γ.

Teorema 3.4. *1. $\forall z \in D$ (el de la definición anterior)* $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

2. Si z_1 y z_2 están el la misma componente conexa de D entonces $\operatorname{Ind}_\gamma(z_1) = \operatorname{Ind}_\gamma(z_2)$.

3. Si $|z|$ es suficientemente grande entonces $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$.

Demostración. 1. Recordemos que $e^w = e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)) = 1$ entonces $x = 0$ e $y = k2\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$. O sea que si $e^w = 1$ entonces $\frac{w}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$. Ahora recordemos que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ entonces

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t) - z}dt$$

definamos entonces

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{C} \quad \varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\dot\gamma(s)}{\gamma(s) - z}ds\right)$$

derivando la función nos queda que

$$\varphi'(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\dot\gamma(s)}{\gamma(s) - z}ds\right)\frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t) - z} \Rightarrow \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t) - z}$$

entonces $\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\dot\gamma(t) = 0$, ahora tomemos una nueva función (mismo dominio)

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} \Rightarrow \psi'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\dot\gamma(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0$$

por lo que ψ es constante entonces en particular $\psi(a) = \psi(b)$ entonces (teniendo en cuenta que $\varphi(a) = 1$ y que $\gamma(a) = \gamma(b)$)

$$\frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} \Rightarrow \varphi(b) = \varphi(a) = 1$$

2. Basta probar que $\operatorname{Ind}_\gamma$ es continua en D (por que entonces lleva conexos en conexos y como en $\mathbb{Z}$ los conexos son los puntos prueba la afirmación). Tomemos z_1 y z_2 en D tal que $|z_1 - z_2| < \varepsilon$, y sea $d = \mathrm{d}(z_0, \gamma^*)$ entonces si $\zeta \in \gamma^*$ entonces $|z_1 - \zeta| \geq d$ y $|z_2 - \zeta| \geq |z_1 - \zeta| - |z_1 - z_2| \geq d - \varepsilon$. Ahora veamos que pasa con los indices de z_1 y z_2 cuando estos se acercan uno a otro:

$$|\operatorname{Ind}_\gamma(z_1) - \operatorname{Ind}_\gamma(z_2)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_2}\right)d\zeta\right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{z_1 - z_2}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} \right) d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|z_1 - z_2|}{|\zeta - z_1||\zeta - z_2|} |d\zeta| \leq$$

$$\leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{d(d-\varepsilon)} |d\zeta| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{\text{long}(\gamma)}{d(d-\varepsilon)} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

3. Sea R tal que $\gamma^* \subset B_R(0)$ y sea z tal que $|z| > R$ entonces si definimos

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z} \Rightarrow f \in \mathcal{H}(B_R(0))$$

usando el teorema de Cauchy tenemos $\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 0$ entonces $\text{Ind}_\gamma(z) = 0$. □

3.3. La formula de Cauchy.

Teorema 3.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un convexo abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, también sea $\gamma^* \subset \Omega$ el recorrido de una curva cerrada, entonces $\forall z \in \Omega - \gamma^*$ vale que:*

$$\text{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Demostración. Definimos

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

por como la definimos es claro que $g \in \mathcal{H}(\Omega - \{z\})$, pero además es claro que $g \in C^0(\Omega)$. Esto pone a g en las hipótesis del teorema de Cauchy (es fácil la prueba de que si no es holomorfa en una cantidad finita de puntos pero si es continua en toda la region vale el teorema) entonces por el teorema de Cauchy tenemos:

$$0 = \int_\gamma g(\zeta) d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \, \text{Ind}_\gamma(z) 2\pi i \Rightarrow \text{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

□

3.4. Funciones analíticas y holomorfas

En este capítulo hemos juntado las herramientas suficientes para demostrar el recíproco del teorema que nos afirmaba que si una función era analítica entonces también era holomorfa (el teorema también agregaba que la derivada de esta función también era analítica y nos decía como hallarla). Antes de demostrar el recíproco vamos entonces a hacer una observación acerca del directo.

Observación. Si f es analítica en Ω entonces ya sabemos que para todo $z \in \Omega$ existen $r > 0$ y $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ de forma que si $z' \in B_r(z)$ vale que $f(z') = \sum_n a_n (z' - z)^n$, el teorema visto en el capitulo pasado no solo nos aseguraba que esta función era derivable (más aun, holomorfa) si no que nos decía que la derivada era$f'(z') = \sum_n n a_n (z' - z)^{n-1}$ de lo que se deduce fácilmente que

$$f^{(k)}(z) = k! a_k$$

Teorema 3.6. $\Omega \subset \mathbb{C}$ *abierto y* $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow$ f *es analítica.*

Demostración. Dado un a elegimos r que cumpla que $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$ (es fácil ver que existe por que como Ω es abierto, se encuentra $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset \Omega$ tomando $r = \varepsilon/2$ se cumple) llámese $D = B_r(a)$ entonces claramente hay un convexo D' en Ω que cumple que $\partial D \subset D'$ entonces como $f \in \mathcal{H}(D')$ podemos usar la formula de Cauchy, usando que $\text{Ind}_{\partial D}(z) = 1$ $\forall z \in D$ (fácil probar queda como ejercicio) tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

pero además (recordando la serie geométrica) sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n = \frac{\zeta - a}{\zeta - z}$$

y además la convergencia es uniforme (sabemos que para todo $z \in D$ $|\zeta| > |z|$ porque $\zeta \in \partial D$) entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n d\zeta$$

entonces como la serie converge uniformemente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta (z-a)^n$$

con lo que el teorema queda probado ya que para un a cualquiera encontramos un $r > 0$ que cumple que para todo $z \in B_r(a)$, $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$ con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

□

Observación. El radio de convergencia es $R = \mathrm{d}(a, \partial D)$ ya que el argumento vale para todo disco $D(0,r)$ cuya clausura este en Ω entonces como $D(0,R) \subset \Omega$ lo podemos hacer para cualquier $r < R$.

Corolario 3.7. *Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$entonces $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Definición 3.4. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ entonces le llamamos conjunto de ceros de f a

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

Ahora vamos a probar el recíproco del teorema de Cauchy.

Teorema 3.8 (Morera). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f \in C^0(\Omega)$ donde Ω es un abierto convexo tal que $\forall \Delta \subset \Omega$ triángulo $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Demostración. La demostración es muy parecida a la del teorema de Cauchy local, por que gracias al corolario anterior basta probar que si consideramos:

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(z)dz$$

y demostramos que es holomorfa entonces su derivada, f, también lo sera. Se puede ver que por hipótesis

$$0 = \int_{\triangle a z z_0} f(z)dz = \int_{[a,z]} f(z)dz - \int_{[a,z_0]} f(z)dz - \int_{[z_0,z]} f(z)dz$$

entonces

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[a,z]} f(z)dz - \int_{[a,z_0]} f(z)dz = \int_{[z_0,z]} f(z)dz$$

Ahora veamos

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} f(z)dz - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} (f(z) - f(z_0))dz$$

porque $\int_{[z_0,z]} f(z_0)dz = f(z_0)(z - z_0)$. Pero como f es continua (por hipótesis) tenemos que dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ entonces

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \frac{1}{|z - z_0|} \int_{[z_0,z]} |(f(z) - f(z_0))| \, dz < \varepsilon$$

Por lo tanto $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ lo que concluye la prueba. □

Lema. *Sea $f \in \mathcal{H}(B_r(a))$ no nula tal que $f(a) = 0$ entonces existe $h \in \mathcal{H}(B_r(a))$ y $p \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = (z-a)^p h(z)$ y $h(a) \neq 0$.*

Demostración. Como f es holomorfa existe un $r > 0$ $\forall z \in B_r(a)$ podemos escribir

$$f(z) = \sum_{n \in N} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots$$

donde $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ por lo que inmediatamente vemos que $a_0 = 0$. Sea entonces m tal que $a_i = 0$ $\forall i < m$ y $a_m \neq 0$ (m existe por que f es no nula y además $m > 0$).Ahora podemos escribir

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n(z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n \geq 0} a_{n+m}(z-a)^n \qquad \forall z \in B_r(a)$$

donde

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+m}(z-a)^n \in \mathcal{H}(B_r(a))$$

por ser analítica y además $h(a) = a_m \neq 0$. □

Teorema 3.9. *Sea Ω una region y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$entonces son equivalentes:*

1. $Z(f) = \Omega$.
2. $\exists \alpha \in \Omega$ *tal que* $f^{(n)}(\alpha) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $Z(f)$ *tiene un punto de acumulación en* Ω.

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) y ($2 \Rightarrow 3$) son triviales entonces basta probar ($3 \Rightarrow 1$).

Sea a de acumulación de $Z(f)$ tal que $a \in \Omega$ entonces existe $\{z_n\} \subset Z(f) - \{a\}$ tal que $z_n \to a$ entonces por continuidad sabemos que

$$f(a) = \lim_{z_n \to a} f(z_n) = 0$$

entonces usando el lema anterior y notando que por ser f holomorfa em Ω region entonces existe $r > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(B_r(a))$ tenemos que $f(z) = (z-a)^p g(z)$ donde $g \in \mathcal{H}(B_r(a))$ y $g(a) \neq 0$ pero además de g sabemos que se anula en z_n $\forall n$ por que $(z-a)^n$ no lo hace. Que g sea holomorfa nos indica que es continua, y al ser $g(a) \neq 0$ podemos asegurar que $g(z) \neq 0$ por lo menos en un entorno de a lo que contradice que $g(z_n) = 0$ para una sucesión $z_n \to a$. Se concluye que $f(z) = 0$ $\forall z \in B_r(a)$.
Hasta ahora demostramos que existe un $r > 0$ tal que f se anula en $B_r(a)$ pero si elegimos un punto z_0 cualquiera de Ω podemos encontrar una curva $\gamma : [0,1] \to \Omega$ que cumpla que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = z_0$ por que toda region es arcoconexa. Consideremos $A = \{t \in [0,1] : f(\gamma(t)) = 0\}$ y sea $t_0 = supA'$ (donde A' es el conjunto de puntos de acumulación de A que no es vació por que $\gamma^* \cap B_r(a) \subset A$ y esta acotado por 1) entonces $\exists \{t_n\} \subset A \cap [0, t_0)$ tal que $t_n \to t_0$; esto nos asegura que $\exists r' > 0$ tal que f se anula en $B_{r'}(f(\gamma(t_0)))$ y suponiendo que $t_0 \neq 1$ llegamos a un ABSURDO. Por lo tanto $f(z_0) = 0$. ☐

Teorema 3.10 (Del modulo máximo). *Sea Ω región y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$tal que f no es constante, entonces $|f|$ no alcanza un máximo en Ω.*

Demostración. Supongamos que $\exists z_0 \in \Omega$ que cumple que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ $\forall z \in \Omega$. Definamos ahora $D_r = B_r(z_0) \subset \Omega$ entonces la formula de Cauchy nos asegura que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})(ire^{it})}{re^{it}} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

entonces tomando módulos tenemos que

$$|f(z_0)| = \frac{1}{|2\pi|} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt$$

Además sabemos que

$$|f(z_0)| \geq |f(z_0 + re^{it})| \qquad \forall t \in [0, 2pi)$$

supongamos que $\exists t_0$ tal que $|f(z_0)| > |f(z_0 + re^{it_0})|$ entonces como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$en particular f es continua en $z_0 + re^{it_0}$ por lo tanto existe un $\delta > 0$ $|f(z_0)| > |f(z_0 + re^{it})|$ $\forall z \in B_\delta(t_0)$ entonces tenemos que

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{B_r^{\complement}} |f(z_0 + re^{it})| dt + \int_{B_r} |f(z_0 + re^{it})| dt \right)$$

Además las propiedades de las integrales nos aseguran (por estar acotados los integrandos)

$$\int_{B_r^{\complement}} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq |f(z_0)|(2\pi - \delta)$$

$$\int_{B_r} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq |f(z_0)| \delta$$

uniendo los resultados llegamos a

$$|f(z_0)| < |f(z_0)|$$

por lo tanto no puede ser que $\exists t_0$ tal que $|f(z_0)| > |f(z_0 + re^{it_0})|$ o lo que es lo mismo $|f(z_0)| = |f(z_0 + re^{it})|$ $\forall t \in [0, 2\pi)$. Pero esto lo habíamos hecho para un $r > 0$ genérico que cumpliese que $D_r \subset \Omega$ por lo tanto tenemos que $\exists \rho > 0$ tal que $|f(z)|$ es constante en $B_\rho(z_0)$ que como $f \in \mathcal{H}(B_\rho(z_0))$ sabemos que $f(z)$ es constante en $B_\rho(z_0)$ y usando el teorema anterior para la función $f(z) - f(z_0)$ llegamos a que es nula en Ω o lo que es lo mismo que decir que $f(z)$ es constante en Ω; esto es ABSURDO por que en las hipótesis habíamos pedido que f no sea constante. ☐

Corolario 3.11. *Sea Ω región y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$tal que $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$ entonces*

$$|f(a)| \geq \min_{t\in[-\pi,\pi]} |f(a + re^{it})|$$

si f no tiene ceros en $B_r(a)$.

Demostración. Si $f(a + re^{it}) = 0$ para algún t es obvio, en caso de que no sea así, tomando una region que contenga a $\overline{B_r(a)}$ y aplicándola el teorema anterior a $\frac{1}{f}$ se obtiene la prueba. □

3.5. Consecuencias del teorema del módulo máximo

Como vimos, este teorema afirma que si una función es holomorfa y no constante en una región entonces su módulo no alcanza un máximo en ella, o lo que es equivalente, si una función holomorfa en una region alcanza un máximo, entonces es constante. Otro enunciado sería (es el que nos va a interesar) si f es una función holomorfa en una region Ω y $K = \overline{\Omega}$ y f es continua en K entonces

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\partial\Omega}$$

Si se da la igualdad para algún $z \in \Omega$ entonces la función es constante.

Teorema 3.12 (Lema de Schuarz). *Sea $D = \{z : |z| < 1\}$ y $f : D \to D$ tal que $f \in \mathcal{H}(D)$ y $f(0) = 0$ entonces*

1. $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D$
2. $|f'(0)| \leq 1$
3. *Si se da la igualdad en* (1) *para algún* $z \neq 0$ *o si se da la igualdad en* (2) *entonces* $f(z) = \lambda z$ *con* $|\lambda| = 1$.

Demostración. Como $f \in \mathcal{H}(D)$ y $f(0) = 0$ entonces $f(z) = zg(z)$ con $g(z) \in \mathcal{H}(D)$ dado un $r \in (0, 1)$ el principio del modulo máximo nos asegura que

$$|g(z)| \leq \max_{z\in B_r(0)} \{|g(z)|\} \leq \frac{1}{r} \Rightarrow \forall r \in (0, 1), |g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Entonces haciendo que $r \to 1$ se tiene que $|g(z)| \leq 1$ por lo tanto $|f(z)| \leq |z|$ (queda probado (1)). Ahora, por como esta definida g se tiene que $f'(0) = g(0)$ por lo tanto $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ que prueba (2). Para (3) se ve que si en algún z $|g(z)| = 1$ entonces la función alcanza un máximo en D por lo tanto es constante, o sea $|f(z)| = |z|$ o lo que es lo mismo $f(z) = \lambda z$ con $|\lambda| = 1$ (una rotación), también si $|f'(0)| = 1$, $|g(0)| = 1$ que es un caso particular de lo anterior. □

Definición 3.5. Sea $\alpha \in D$ (en esta sección D siempre va a ser la bola de centro cero y radio uno) entonces definimos

$$\psi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}$$

Observación. ψ_α es una transformación de Möbius y su unico polo no cae en D (su polo es $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ que tiene modulo mayor que 1) por lo tanto $\psi_\alpha \in \mathcal{H}(D)$.

Teorema 3.13. *Sea $\alpha \in D$ entonces ψ_α lleva D en D inyectivamente y lleva α en 0, además es invertible y $\psi_\alpha^{-1} = \psi_{-\alpha}$ y por último*

$$\psi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2, \quad \psi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

Demostración.

$$\psi_\alpha(\psi_{-\alpha}(z)) = \frac{\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z} - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}} = z$$

Esto prueba no solo que ψ_α es invertible sino que es inyectiva o, más aún, biyectiva. También derivando es facil ver que

$$\psi'_\alpha(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha}z)^2}$$

lo que prueba que

$$\psi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2, \quad \psi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

□

Proposición 3.14. *Sea $f \in \mathcal{H}(D)$ tal que $f : D \to D$ y sean $\alpha, \beta \in D$ tal que $f(\alpha) = \beta$ entonces*

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$$

Demostración. Sea
$$g = \psi_\beta \circ f \circ \psi_{-\alpha}$$
como todas son funciones de D en D se ve que g tambien lo es; ademas $g(0) = 0$ por como definimos la funcion por lo tanto, usando el lema de Schwarz, $|g'(0)| \leq 1$ y usando la regla de la cadena tenemos que

$$g'(0) = \psi'_\beta(\beta) f'(\alpha) \psi'_{-\alpha}(0) \Rightarrow |f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$$

□

Teorema 3.15. *Sea $f \in \mathcal{H}(D)$, $f : D \to D$ biyectiva y sea $\alpha \in D$ tal que $f(\alpha) = 0$. Entonces existe λ con $|\lambda| = 1$ tal que*
$$f(z) = \lambda \psi_\alpha(z) \quad \forall z \in D$$

Demostración. Sea g la inversa de f $(g(f(z)) = z)$ como f es inyectiva, f' no se anula en D por lo tanto $g \in \mathcal{H}(D)$. La regla de la cadena nos muestra que
$$g'(0) f'(\alpha) = 1$$
ademas por la proposicion anterior, tenemos que

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{1 - |\alpha|^2}, \qquad |g'(0)| \leq 1 - |\alpha|^2$$

por lo tanto tienen que cumplirse las igualdades, eso implica que si definimos (como en la proposicion anterior) $h = f \circ \psi_{-\alpha}$ entonces $|h'(0)| = 1$ por lo tanto

$$f \circ \psi_{-\alpha} = \lambda z \Rightarrow f = \lambda \psi_\alpha, \quad |\lambda| = 1$$

□

3.6. Teorema de Liouville y el Teorema fundamental del Álgebra

Lema (Estimativa de Cauchy). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$entonces*

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n! M(r)}{r^n} \qquad M(r) = \text{máx}\{|f(z) : |z - a| = r\}$$

Demostración. Por lo que vimos en la sección anterior sabemos que $f^{(n)}(a) = n! a_n$ donde

$$n! a_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

donde $D = B_r(a)$ entonces si tomamos el módulo tenemos que

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right|$$

Si ahora parametrizamos el borde de la bola como $\partial D(t) = a + re^{it}$ tenemos que

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{(re^{it})^{n+1}} re^{it} dt \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(a + re^{it})|}{r^n} dt \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} M(r) dt = \frac{n! M(r)}{r^n}$$

□

Teorema 3.16 (Liouville). *Sea $f : \mathbb{C} \to K$ con K acotado y tal que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ entonces f es constante.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{C}$ cualquiera entonces $|f'(a)| \leq \frac{M(r)}{r}$ $\forall r$ (por el teorema anterior) entonces dado $\varepsilon > 0$ tenemos que eligiendo $r = \sup\{|f(z)|\}\varepsilon^{-1}$ (el supremo existe porque la función es acotada) entonces $|f'(a)| \leq \frac{M(r)}{r} \leq \varepsilon$ de donde $|f'(a)| = 0$ o lo que es lo mismo $f'(a) = 0$ $\forall a \in C$ entonces usando el teorema de Cauchy-Riemann sabemos que las derivadas parciales de la parte real e imaginaria de la función son también nulas, por lo tanto (como el plano complejo es conexo) la función f es constante. □

Teorema 3.17 (Teorema fundamental del Algebra). *Sea p un polinomio de grado $n \geq 1$ entonces $\exists z_0$ tal que $p(z_0) = 0$.*

Demostración. Sea p un polinomio de grado $n \geq 1$ tal que $p(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Entonces como $p \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ sabemos que

$$g(z) = \frac{1}{p(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

por que p no se anula. Además

$$|p(z)| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i z^i\right| \geq \left||a_n||z|^n - \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i\right|\right|$$

por lo que $\lim_{z\to\infty} p(z) = +\infty$ o lo que es lo mismo

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que si $z \in (\overline{B_r(0)})^C$ sabemos que $|g(z)| < \varepsilon$ y a su vez $\overline{B_r(0)}$ es compacto y como $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ $\exists M = \max\{|g(z) : |z| \leq r\} \Rightarrow |g(z)| \leq \max\{M, \varepsilon\}$, pero el teorema de Liouville nos asegura que g tendría que ser constante y por lo tanto p también ABSURDO. Entonces no puede ser que p no tenga al menos una raíz. $\square$

3.7. Teorema de Cauchy Global

Definición 3.6. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *abierta sii* para todo A abierto de $\mathbb{C}$, $f(A)$ es abierto.

Teorema 3.18. *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$ entonces existe $V \subset \Omega$ entorno de z_0 que cumple:*

1. *f es inyectiva en V.*
2. *$f(V)$ es abierto.*
3. *Si $g : f(V) \to V$ esta definida por $g(f(z)) = z$ entonces $g \in \mathcal{H}(V)$.*

Demostración. Este teorema es un corolario del teorema de función inversa. Observar que al ser la derivada de la función inversa la inversa de la derivada de la función, se deduce que g en este teorema también es holomorfa utilizando Cauchy-Riemann. $\square$

Teorema 3.19. *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$no constante, y sea $z_0 \in \Omega$. Sea m el orden del 0 que tiene la funcion $f - f(z_0)$ en z_0 entonces existe un entorno $V \subset \Omega$ de z_0 y existe $\varphi \in \mathcal{H}(V)$ tal que*

1. *$f(z) - f(z_0) = (\varphi(z))^m$ $\forall z \in V$.*
2. *φ' no tiene ceros en V y φ es una funcion invertible de V sobre una bola $B_r(0)$.*

Demostración. Podemos suponer que Ω es un entorno convexo de z_0 que cumple que $f - f(z_0)$ solo se anula en z_0 (por que todos los ceros de las funciones son aislados) entonces podemos afirmar que en Ω

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z) \qquad g \in \mathcal{H}(\Omega)^{\mathrm{o}} \text{ tal que } g(z_0) \neq 0$$

Por lo tanto $\frac{g'}{g} \in \mathcal{H}(\Omega)$ y por el teorema de Cauchy local hay una $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\frac{g'}{g} = h'$ entonces

$$(ge^{-h})' = g'e^{-h} - h'ge^{-h} = 0 \Rightarrow ge^{-h} = k \Rightarrow g = e^{h+\ln k}$$

Sea $h_1 = h + \ln k$ entonces si definimos

$$\varphi(z) = (z - z_0)e^{\frac{h(z)}{m}}$$

tenemos probada la parte (1).
La parte (2) sale del teorema anterior recordando que $\varphi(z_0) = 0$ y $\varphi'(0) \neq 0$. $\square$

Corolario 3.20. *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$una función inyectiva, entonces $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, y la inversa de f es holomorfa.*

Definición 3.7. Decimos que Γ es un *ciclo* en Ω *sii* $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ con γ_i curvas cerradas, esto equivale a decir que su recorrido es $\Gamma^* = \bigcup_1^n \gamma_i^*$.

Observación.

- Sumar curvas implica agregarlas con su sentido y restarlas implica cambiarles el sentido.
- $\int_\Gamma f(z)dz = \sum_1^n \int_{\gamma_i} f(z)dz$.
- $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \sum_1^n \mathrm{Ind}_{\gamma_i}(a)$.

Lema. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces la función g*

$$g(\zeta, z) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & si\ \zeta \neq z \\ f'(z) & si\ \zeta = z \end{cases}$$

es continua en $\Omega \times \Omega$.

Demostración. Sea $(\zeta_0, z_0) \in \Omega \times \Omega$. Si $\zeta_0 \neq z_0$ es claro que g es continua .Ahora probemos que g es continua en (a, a) ; sea $r > 0$ tal que $D = \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$; sean $\zeta, z \in D$ como D es convexo se tiene que

$$f(z) - f(\zeta) = \int_\gamma f'(w)dw = \int_0^1 f'(\gamma(t))(z-\zeta)dt$$

donde $\gamma(t) = \zeta + (z-\zeta)t$. Como f' es continua en z_0 existe $h > 0$ tal que $|f'(w) - f'(a)| < \varepsilon$ si $w \in B_h(a)$ eligiendo z, ζ en el nuevo entorno tenemos que

$$|g(\zeta, z) - g(a,a)| = \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(a) \right| = \left| \int_0^1 f'(\gamma(t))dt - f'(a) \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 (f'(\gamma(t)) - f'(a))dt \right| \leq \int_0^1 |f'(\gamma(t)) - f'(a)|dt < \varepsilon$$

$\square$

Teorema 3.21 (Cauchy Global). *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea Γ un ciclo tal que $\Gamma^* \subset \Omega$ y que* $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$ *para todo $a \notin \Omega$. Entonces*

$$(a) \quad f(z)\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \qquad \forall z \in \Omega - \Gamma^*$$

y

$$(b) \quad \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Demostración. Sea $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z,w) = \begin{matrix} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{matrix}$$

Como ya sabemos, g es continua y por lo tanto podemos definir:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)dw$$

Ahora, probar que $h(z) = 0$ equivale a probar (a) porque

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w}dw = f(z)\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-z}}_{\operatorname{Ind}_\Gamma(z)} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Primero probemos que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, como g es uniformemente continua en cualquier compacto de $\Omega \times \Omega$ entonces si $z, z_n \in \Omega$ y $z_n \to z$ de donde $g(z_n, w) \to g(z,w)$ uniformemente $\forall w \in \Gamma^*$ (compacto en $\Omega \times \Omega$) lo que prueba que $h(z_n) \to h(z)$ o sea que es continua. Ademas para cada $w \in \Omega$ la funcion $z \mapsto g(z,w)$ es holomorfa en Ω (notar que la singularidad en $z = w$ es evitable). Consideremos $\triangle$ un triangulo cerrado en Ω. Entonces

$$\int_{\partial\triangle} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\int_{\partial\triangle} g(z,w)dz \right) dw = 0$$

porque al ser g holomorfa $\int_{\partial\triangle} g(z,w)dz = 0$ $\forall w \in \Gamma^*$ por lo tanto el teorema de Morera implica que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Sea $\Omega_1 = \{z : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$ definamos entonces

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \qquad \forall z \in \Omega_1$$

Por un argumento ya dado la definicion de Ω_1 implica que si $z \in \Omega \cap \Omega_1$ entonces $h_1(z) = h(z)$ por lo tanto podemos definir $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega \cup \Omega_1)$ que cumpla que $\varphi|_\Omega = h$ y $\varphi|_{\Omega_1} = h_1$ entonces como por hipotesis $\Omega^{\complement} \subset \Omega_1$ por lo tanto $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Como sabemos que si $|z|$ suficientemente grande $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ entonces (usando la formula de Cauchy para convexos) sabemos que $\varphi(z) = 0$ pero entonces φ esta acotada (por que si se toma un disco que deje afuera a Γ el indice va a ser siempre cero y en el disco con el borde que es un compacto tambien) entonces el teorema de Liouville nos asegura que $\varphi(z) = 0$ para todo z entonces $h(z) = 0$ lo que prueba la parte (a).
Para deducir (b) elijamos $a \in \Omega - \Gamma^*$ y definamos $F(z) = (z-a)f(z)$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}dz = F(a)\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$$

ya que por como esta definida $F(a) = 0$ $\square$

Corolario 3.22. *Si Γ_1 y Γ_2 son ciclos en Ω tales que* $\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(z) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_2}(z)$ *para todo $z \in \Omega^{\complement}$ entonces*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

Demostración. Es facil probarlo tomando el ciclo $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ y usando el teorema anterior $\square$

4. Singularidades Aisladas

Definición 4.1. Dada $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ decimos que a es una *singularidad aislada* de f *sii* existe un $r > 0$ que cumple que $f \in \mathcal{H}(B_r^*(a))$.

Observación. Es posible que en el capitulo nos refiramos a ellas como simplemente *singularidades.*

Definición 4.2. Dada $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ decimos que una singularidad a de f es *evitable sii* existe un $r > 0$ tal que podemos definir $\hat{f} : B_r(a) \to \mathbb{C}$ que cumple que $\hat{f} \in \mathcal{H}(B_r(a))$ y que $\hat{f}\mid_{B_r^*(a)} = f\mid_{B_r^*(a)}$.

Definición 4.3. Dada $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ decimos que una singularidad a de f es un *polo de orden p sii* existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p = \min\{n \in \mathbb{N}\}$ que cumplen $(z - a)^n f(z)$ tiene una singularidad evitable en a.

Observación. Un polo de orden 0 es una singularidad evitable.

Definición 4.4. Dada $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ decimos que una singularidad a de f es *esencial sii* si no es evitable ni un polo.

Teorema 4.1. *Sea $f \in \mathcal{H}(B_r^*(a))$ entonces si existe $\rho < r$ tal que $f(B_\rho^*(a)) \subset B_k(0)$ para algún k entonces a es una singularidad evitable.*

Demostración. Definamos

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & z \neq a \\ 0 & z = a \end{cases}$$

Claramente $h \in \mathcal{H}(B_r^*(a))$ pero si observamos que

$$\lim_{z \to a} \frac{h(z) - h(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0$$

por que f es acotada entonces $h \in \mathcal{H}(B_r(a))$ y como vimos eso equivale a decir que para todo punto z en la bola de centro r de a vale

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + \sum_{n \geq 0} a_{n+2}(z-a)^{n+2}$$

donde $a_0 = h(a) = 0$ y $a_1 = h'(a) = 0$ entonces

$$h(z) = (z-a)^2 \sum_{n \geq 0} a_{n+2}(z-a)^n$$

pero por como definimos h tenemos que $f(z) = \sum a_{n+2}(z-a)^n \; \forall z \in B_r^{ast}(a)$ por lo tanto podemos extender holomorfamente f definiendo

$$\hat{f} = \begin{cases} f(z) & z \in B_r^*(a) \\ a_2 & z = a \end{cases}$$

donde sabemos que $a_2 = \frac{h''(a)}{2}$. ☐

Observación. El recíproco de este teorema es trivial ya que si f tiene una singularidad evitable en a y se considera la función $\hat{f}$ holomorfa en todo el disco que la extiende, en particular $\hat{f}$ sera continua y como ya sabemos una función continua en un disco esta acotada.

Observación. Si f tiene una singularidad aislada en a y $f(z) \to l \in \mathbb{C}$ cuando $z \to a$ entonces $f(z)$ tiene una singularidad evitable en a.

Teorema 4.2. *Sea $f \in \mathcal{H}(B_r^*(a))$ (o sea que f tiene una singularidad en a) entonces es necesario que ocurra una única de las siguientes posibilidades:*

1. *f tiene en a una singularidad evitable.*
2. *$\exists\{c_i\} \subset \mathbb{C}$ $i = 1 \ldots m$ tal que $k(z) = f(z) - \sum_{i=1}^m c_i(z-a)^{m-i}$ tiene una singularidad evitable en a.*
3. *$\forall \rho > 0$ $f(B_r^*(a))$ es denso en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos que no ocurre la tercera opción lo que es equivalente a decir que $\exists w$ y existen $\rho > 0$ y $\delta > 0$ tal que $\forall z \in B_\rho^*(a)$ $f(z) \notin B_\delta(w)$. Esto es lo mismo que decir que $|f(z) - w| \geq \delta$ si $z \in B_\rho^*(a)$. Definamos

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w} \Rightarrow |h(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{\delta} \qquad \forall z \in B_\rho^*(a)$$

Como el denominador $f(z) - w$ no se anula en la bola reducida y como $f \in \mathcal{H}(B_\rho^*(a))$ entonces $h \in \mathcal{H}(B_\rho^*(a))$ además como $|h|$ esta acotado en $B_\rho^*(a)$ sabemos por el teorema anterior que h tiene una singularidad evitable en a. Sea $\hat{h}$ la extension holomorfa de h.

Estamos frente a dos posibilidades, que $\hat{h}(a) = 0$ o que sea distinto. Supongamos que $\hat{h}(a) \neq 0$ entonces $h(z) \to l \neq 0$ cuando $z \to a$ entonces como $h(z) \neq 0$ si $z \in B^*_\rho(a)$ $f(z) = w + \frac{1}{h(z)}$ esta acotado en $B^*_\rho(a)$ por lo que f tendría una singularidad evitable en a.

Si por el contrario $\hat{h}(a) = 0$ como $\hat{h} \in \mathcal{H}(B_\rho(a))$ y además $\hat{h}(z) \neq 0$ si $z \in B^*_\rho(a)$ sabemos que

$$\hat{h}(z) = (z-a)^m h_1(z) \qquad h_1(a) \neq 0 \quad h_1 \in \mathcal{H}(B_\rho(a))$$

Ahora despejando para $z \in B^*_\rho(a)$

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w} = (z-a)^m h_1(z) \Rightarrow (z-a)^m f(z) = w(z-a)^m + \frac{1}{h_1(z)}$$

Además $h_1(z) \neq 0$ $\forall z \in B^*_\rho(a)$ entonces $\frac{1}{h_1(z)} \in \mathcal{H}(B_\rho(a))$. Como es holomorfa es también analítica lo que significa que podemos escribir:

$$f(z) = w + \frac{1}{(z-a)^m}\sum_{i=0}^{\infty} c_i(z-a)^i \Rightarrow f(z) = w + \sum_{i=m-1}^{\infty} c_i(z-a)^{i-m} + \sum_{i=0}^{m-1} c_i(z-a)^{i-m}$$

notando que $c_0 \neq 0$ por que $\frac{1}{h_1(a)} \neq 0$. Pero entonces

$$k(z) = f(z) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i(z-a)^{i-m} = w + \sum_{i=m-1}^{\infty} c_i(z-a)^{i-m}$$

tiene una singularidad evitable en a (porque esta definida para que si $\hat{k}(a) = w + c_m$ entonces $\hat{k}$ sea la extension holomorfa de k). $\square$

Observación. La segunda condición implica directa y recíprocamente que f tenga un polo de orden menor o igual que m en a por que multiplicando f por $(z-a)^m$ se tiene que restandole un polinomio a $f(z)(z-a)^m$ la función resultante tendrá una singularidad evitable en a o lo que es lo mismo $f(z)(z-a)^m$ tiene una singularidad evitable en a. A su vez si f tiene un polo de orden m en a multiplicando por $(z-a)^m$ a $f(z)$ tenemos una función con singularidad evitable o sea desarrollable en series de potencia, por lo tanto restandole a f los primeros $m-1$ términos de su serie y dividiendo todo entre $(z-a)^m$ llegamos a que se cumple la segunda condición.

Observación. La observación anterior implica que la tercera condición es equivalente a tener una singularidad esencial.

Proposición 4.3. *Si f tiene una singularidad aislada en a entonces si*

$$\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$$

entonces $f(z)$ tiene un polo en a.

Demostración. La prueba de esta proposición es una consecuencia del teorema recién demostrado, hay que definir nuevamente $h(z) = (f(z) - w)^{-1}$ y ver que la para que f tuviera un polo en a se requería que $h(z) \to 0$ cuando $z \to a$ por lo tanto $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to a$. $\square$

Observación. Es fácil ver que el recíproco de esta proposición es cierto, eso implica que

$$\lim_{z\to a} f(z) = \begin{cases} l \in \mathbb{C} \Rightarrow \text{evitable} \\ \infty(\text{en modulo}) \Rightarrow \text{polo} \\ \nexists \Rightarrow \text{escencial} \end{cases}$$

4.1. Polos

Como vimos tenemos varias formas de caracterizar un polo, sabemos que una función con una singularidad aislada en a tiene un polo de orden m en a si

$$\lim_{z\to a} (z-a)^m f(z) = l \neq 0$$

o lo que es lo mismo que podamos escribir

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} \qquad g \in \mathcal{H}(B_r(a)), \;\; g(a) \neq 0$$

y lo que es mas importante como vimos que podemos escribir

$$f(z) = r(z) + \frac{c_m}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_1}{(z-a)} \qquad r \in \mathcal{H}(B_r(a)), \; c_m \neq 0$$

En esta sección nos va a interesar calcular la integral en una curva cerrada de una función con polos aislados y vamos a notar que (siendo $D = B_r(a)$)

$$\int_{\partial D} f dz = \int_{\partial D} \sum_{i=1}^{m} c_i (z-a)^{-i} + \int_{\partial D} r dz = c_1 2\pi i$$

esto nos lleva a definir el residuo de un polo.

Definición 4.5. Le llamamos el residuo de un polo de una función $f \in \mathcal{H}(B_r^*(a))$ con $f(z) = f(z) = r(z) + \frac{c_m}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_1}{(z-a)}$ a

$$\operatorname{Res}_a(f) = c_1$$

Observación. Lo visto nos muestra que es verdad la siguiente igualdad

$$\operatorname{Res}_a(f) = c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz$$

con $D = B_r(a) \subset \Omega$.

Propiedad.

$$\lim_{z \to a} \frac{((z-a)^m f(z))^{(m-1)}}{(m-1)!} = \operatorname{Res}_a(f)$$

Demostración. Como f tiene un polo en a localmente vale el siguiente desarrollo

$$f(z) = \frac{g(a)}{(z-a)^m} + \frac{g'(a)}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!(z-a)} + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_i (z-a)^i$$

$$g \in \mathcal{H}(B_r(a)) \qquad f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m} \ \forall z \in B_r^*(a)$$

pero entonces vale tomar el limite y decir que

$$\lim_{z \to a} \frac{((z-a)^m f(z))^{(m-1)}}{(m-1)!} = \operatorname{Res}_a(f)$$

□

Definición 4.6. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega - A)$ entonces decimos que f es *meromorfa sii* A no acumula en Ω y los puntos de A son polos de f.

Teorema 4.4 (Residuos). *Sea f meromorfa en Ω region, dado un ciclo Γ con $\Gamma^* \subset \Omega - A$ tal que* $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$ $\forall a \in \Omega^{\complement}$ *entonces*

$$\int_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{Res}_a(f) \operatorname{Ind}_\Gamma(a)$$

Demostración. Consideremos el conjunto $H = \{a \in A : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\} \subset \Omega$ el teorema del índice nos asegura que el conjunto es acotado. Supongamos que el conjunto tiene cardinal infinito entonces H tendría que tener un punto de acumulación (Bolzano - Weierstrass) claramente ese punto no podría estar en Ω (por que A no acumula en Ω) si no que tendría que estar en $\partial\Omega$ pero al ser Ω abierto claramente si $z \in \partial\Omega$ $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ pero además si $r = \frac{\mathrm{d}(z,\Gamma^*)}{2}$ tomando $B_r(z)$ es claro que $B_r(z) \cap \Gamma^* = \emptyset$ por lo que $B_r(z)$ esta en la misma componente conexa con respecto a Γ por lo tanto el mismo índice con respecto a ese ciclo que z concluyendo que $a \in B_r(z)$ implica que $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$ por lo tanto z no puede tampoco ser punto de acumulación de H. Con esto concluimos que hay una cantidad finita de polos de f con índice no nulo con respecto a Γ. Sea $H = \{a_1, \ldots, a_n\}$ entonces definamos la funcion holomorfa definida en $H^{\complement}$ por

$$F(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_j^i}{(z-a_i)^j}$$

el teorema de Cauchy global nos asegura que la integral de F en Γ es nula por lo tanto la linealidad de la integral nos permite afirmar

$$\int_\Gamma f(z) dz = \sum_{i=1}^{n} \int_\Gamma \sum_{j=1} m_i \frac{c_j^i}{(z-a_i)^j} dz = \sum_{i=1}^{n} \int_\Gamma \frac{c_1^i}{(z-a_i)} dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_1^i \int_\Gamma \frac{1}{(z-a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_i}(f) 2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma(a_i)$$

□

4.1.1. Aplicaciones

Ahora vamos a ver algunas aplicaciones de este teorema (y de otros anteriores) en el calculo de integrales y en el conteo de raíces.

Definición 4.7. Llamamos numero de ceros de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$en una curva γ cerrada y simple a

$$N_f = \#\{z_0 \in \Omega_1 : f(z_0) = 0\} \qquad \Omega_1 = \{z \in \Omega : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1\}$$

contados con sus respectivas multiplicidades.

Observación. Si $f = z^2$ y $\gamma = \partial D$ con $D = B_r(0)$ entonces $N_f = 2$.

Proposición 4.5 (Principio del Argumento). *Sea Ω una región y una curva $\gamma^* \subset \Omega$ cerrada simple (que sea simple implica que $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} - \gamma^* \to \{0, 1\}$) tal que $\mathrm{Ind}_\gamma = 0$ $\forall a \in \Omega^{\complement}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ no nula, tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$entonces entonces*

$$N_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$$

Demostración. Sea $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ entonces φ es meromorfa en Ω (por que si f es no nula tiene ceros aislados, por lo tanto las singularidades de φ son aisladas). Sea a tal que $f(a) = 0$ de orden m, entonces $f(z) = (z - a)^m h(z)$ en un entorno $B_r(a)$ y además $h(a) \neq 0$. Por lo tanto $f'(z) = m(z - a)^{m-1}h(z) + (z - a)^m h'(z)$ en el mismo entorno. Claramente entonces tenemos que

$$\varphi(z) = \frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \qquad \forall z \in B_r(a)$$

Eso muestra que si a es un cero de f entonces es un polo de orden 1 en φ y además $\mathrm{Res}_a(\varphi) = m$ la multiplicidad del cero (recodar que $\frac{h'}{h} \in \mathcal{H}(\Omega)$). Pero entonces el teorema de los residuos nos asegura que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)dz = \sum \mathrm{Res}_a(\varphi)$$

Falta ver que $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$ pero

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t)}dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

□

Lema. *Sean $\gamma_0, \gamma_1 : I \to \mathbb{C}$ curvas cerradas tal que $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ que cumple $|\gamma_0(s) - \gamma_1(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)|$ $\forall s \in I$ entonces $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(alpha)$.*

Demostración. Hay que aclarar que no es necesario pedir que exista dicho α ya que dadas dos curvas cualesquiera tomando un α con modulo suficientemente grande cumple lo requerido. Definamos

$$\varphi(t) = \frac{\gamma_1(t) - \alpha}{\gamma_0(t) - \alpha} \qquad \forall t \in I$$

Es facil notar que φ es una curva cerrada, porque $\gamma_0(t) - \alpha$ no se anula por hipotesis y ademas por como esta definida $\varphi(a) = \varphi(b)$ (suponiendo que $I = [a, b]$). Tambien es facil observar que

$$|\varphi(t) - 1| = \left|\frac{\gamma_1(t) - \alpha}{\gamma_0(t) - \alpha} - 1\right| = \left|\frac{\gamma_1(t) - \gamma_0(t)}{\gamma_0(t) - \alpha}\right| < 1 \Rightarrow \varphi^* \subset B_1(1)$$

Ahora derivemos φ

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma_1'(t)(\gamma_0(t) - \alpha) - \gamma_0'(t)(\gamma_1(t) - \alpha)}{(\gamma_0(t) - \alpha)^2} \Rightarrow \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - \alpha} - \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - \alpha}$$

Entonces

$$\mathrm{Ind}_\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_a^b \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - \alpha} - \int_a^b \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t) - \alpha}\right) =$$
$$= \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) - \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)$$

pero $\mathrm{Ind}_\varphi(0) = 0$ porque como $\varphi^* \subset B_1(1)$ el 0 esta en la componente no acotada de $(\varphi^*)^{\complement}$. □

Teorema 4.6 (Rouche). *Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sea γ una curva cerrada tal que $\gamma^* \subset \Omega$. Si $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ $\forall z \in \gamma^*$ entonces $N_f = N_g$.*

Demostración. Notar que las hipótesis impiden que f ó g se anulen en γ^*. El principio del argumento nos dice que $N_f = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$ y que $N_g = \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$ pero

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |0 - \varphi(\gamma(t))|$$

por lo que el lema anterior nos asegura que $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$. □

Ahora vamos a demostrar unos lemas que pueden ser útiles a la hora de resolver integrales reales impropias. Se logra por medio de extenderlas a funciones complejas holomorfas e integrándolas en curvas cerradas que encierren o no singularidades, la dificultad se encuentra en elegir las curvas de forma de que el calculo de la integral se simplifique, para eso en ocasiones es útil tomar como curva las semicircunferencias con diámetro en $\mathbb{R}$ y luego ver cuales son los resultados cuando el radio tiende a ∞ o a 0 y para eso los lemas a continuación tienen una gran utilidad.

Lema (1). *Sea $\Omega = \{z : \arg(z) \in [\varphi_0, \varphi_1]\}$ y sea $\gamma_R = Re^{it}$ con $t \in [\theta_0, \theta_1] \subset [\varphi_0, \varphi_1]$ y sea $f \in C^0(\Omega)$ tal que $zf(z) \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

Demostración. Como $zf(z) \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe un k tal que si $|z| > k$ entonces $|z||f(z)| < \varepsilon$ entonces si $|z| > k$

$$\left|\int_{\gamma_R} f\right| \le \int_{\gamma_R} |f| \le \varepsilon \int_{\gamma_R} \frac{dz}{|z|} = \varepsilon \frac{\mathrm{long}(\gamma)}{R}$$

Pero $\mathrm{long}(\gamma) = R\alpha$ donde $\alpha = \theta_1 - \theta_0$ por lo tanto, dado ε existe un k tal que si $|z| > k$ entonces

$$\left|\int_{\gamma_R} f\right| \le \varepsilon\alpha \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

□

Lema (2). *Sea $\Omega = \{z : \arg(z) \in [\varphi_0, \varphi_1]\}$ y sea $\gamma_r = re^{it}$ con $t \in [\theta_0, \theta_1] \subset [\varphi_0, \varphi_1]$ con $\alpha = \theta_1 - \theta_0$ y sea $f \in C^0(\Omega)$ tal que $zf(z) \overset{|z|\to 0}{\longrightarrow} L \in \mathbb{C}$ entonces*

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = iL\alpha$$

Demostración.

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(re^{it}) ire^{it} dt = i \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\gamma_r(t))\gamma_r(t)dt$$

pero sabemos que

$$f(\gamma_r(t))\gamma_r(t) \overset{r\to 0}{\longrightarrow} L \Rightarrow \int_{\gamma_r} f \overset{r\to 0}{\longrightarrow} iL\alpha$$

□

Lema (Jordan). *Sea $\Omega = \{z : |z| > k, \mathrm{Im}(z) > a\}$ $f \in C^0(\Omega)$ y γ_R un arco de circunferencia tal que $\gamma_R^* \subset \Omega$ (para todo $R > k$) $f(z) \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{inz} f(z)dz = 0$$

4.2. Series de Laurent

Definición 4.8. Sea $0 < r < R$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ entonces le llamamos *anillo* de centro cero y radios r y R a $A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

Teorema 4.7. *Sea $f \in \mathcal{H}(A_{r,R}(z_0))$ entonces existe un único conjunto de complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \forall z \in A_{r,R}(z_0)$$

Demostración. Primero vamos a observar que decir que esa serie converja es equivalente a decir que la serie de c_n con $n \geq 0$ converja y que la serie de c_n con $n \leq 0$ converja.

Vamos a considerar el ciclo $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ donde $\gamma_1 = R'e^{it}$ y $\gamma_2^* = r'e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y con $r < r' < R' < R$ ahora usando el teorema de Cauchy global podemos afirmar que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

y esto vale para cualquier z en $A_{r',R'}(z_0)$ (el teorema global da esa formula donde el índice es uno). Para γ_1 recordemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}$$

y converge uniformemente en el anillo porque $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$ por lo que podemos ver que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

Ahora observemos que en γ_2 tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n = \frac{z - z_0}{z - \zeta}$$

entonces

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta$$

En conclusion llegamos a que si $n \geq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$$

y si $n < 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}d\zeta$$

□

Observación. Si f tiene un polo de orden m en z_0 los términos c_n cuando $n < m$ se van a anular porque se estará integrando una función holomorfa. Además el término c_{-1} de la serie de Laurent es el residuo de la función, esto hace que el residuo se extienda a las funciones con singularidades esenciales, en las cuales se puede verificar que también vale el teorema de los residuos.