SISTEMAS DINÁMICOS EXPANSIVOS

RAFAEL POTRIE

Resumen. La idea es definir sistemas dinámicos expansivos, mostrar ejemplos y propiedades básicas interesantes además de comentar acerca de resultados conocidos.

1. Introducción

Los homeomorfismos expansivos son aquellos para los cuales las propiedades dinámicas de los puntos son distintivas en el sentido que dados dos puntos distintos se diferencian un cierto valor uniforme luego de aplicar reiteradamente la transformación o su inversa. Más precisamente:

Definición 1. Sea M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ un homeomorfismo. Decimos que f es *expansivo* si existe un valor $\alpha > 0$ que cumple que si dos puntos x e y en M verifican que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

entonces se cumple que $x = y$.

Lo interesante que verifican estas transformaciones es esa propiedad dinámica distintiva que poseen sus puntos, es sencillo ver como si la precisión del instrumento de medida que utilizamos nos permite distinguir puntos a más de α, podemos estar seguros que o en el pasado, o en el futuro, distinguiremos a estos. A pesar de esta "ventaja" con la que puede contar un hipotético experimentador, la definición nos permite prever un comportamiento sumamente caótico de este tipo de sistemas, además de "...una rica interacción entre la dinámica y la topología." ([Lew3]).

Naturalmente, la primer pregunta que puede surgir es por qué pedir que se separen en el futuro y/ó en el pasado en vez de pedir una de las dos opciones. Es fácil ver que las siguientes transformaciones verifican esas propiedades (es decir, expanden al futuro):

Ejemplo 1. Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal diagonalizable para la cual todos sus valores propios son mayores que uno (o menores). Entonces, dados dos puntos x, y distintos, se cumple que la distancia entre x e y para los iterados futuros es

$$\|A^n x - A^n y\| \geq \lambda^n \|x - y\|$$

donde λ denota el menor de los valores propios. Por lo tanto, vemos que siendo x e y distintos, su distancia tiende a infinito para los iterados futuros de la transformación.

Ejemplo 2. Definamos en S^1 (pensado como los puntos del plano complejo con $|z| = 1$) $f : S^1 \to S^1$ de forma tal que $f(z) = z^2$ entonces, dados dos puntos distintos, por ejemplo $x_1 = e^{i2\pi t_1}$ y $x_2 = e^{i2\pi t_2}$ con $t_2 - t_1 \notin \mathbb{Z}$, en algún momento futuro se separan. Esto se puede probar de la siguiente manera:

$$f^n(x_i) = e^{i2\pi 2^n t_i} \qquad i = 1, 2$$

Vamos a ver que en algún iterado se separan a más de una cierta constante.

En definitiva, basta ver que los conjuntos $2^n t_1 + \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = n + 2^n t_1 \ n \in \mathbb{Z}\}$ y $2^n t_2 + \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = n + 2^n t_2 \ n \in \mathbb{Z}\}$ están lejos para algún valor de n.

Esto es de hecho cierto y la distancia que alcanzan va a ser siempre mayor que $1/4$ dado que si los dos conjuntos están a distancia menor que $1/4$ su distancia se duplica (¿por qué?) por lo cual en algún momento superarán dicha distancia.-

Estos ejemplos acentúan la pregunta realizada anteriormente, si existen estos ejemplos, ¿a que se debe que la definición permita expansión en cualquiera de los dos sentidos?. La respuesta se encuentra en el siguiente Teorema debido a Utz ([Utz]) que demostraremos más adelante.

Teorema 1 (Utz)**.** *Sea $f : M \to M$ homemorfismo expansivo y M espacio métrico compacto. Entonces, si es expansivo al futuro (i.e. existe $\alpha > 0$ de forma tal que $d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha \ \forall n \geq 0$ implica $x = y$) entonces M es un conjunto finito.*

Vale la pena observar que en los ejemplos presentados no se cumplen las hipótesis del Teorema, en el primer caso por no ser $\mathbb{R}^n$ compacto y en el segundo por no ser invertible la transformación.

2. Ejemplos

2.1. El shift de Bernoulli. Sea $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ dotado de la topología producto dada por poner la topología discreta en $\{0, 1\}$. Esta topología en $\Sigma = \{\{x_n\} \ : \ a_n \in \{0, 1\} \ \forall n \in \mathbb{Z}\}$ es sabido que es equivalente a la inducida por la siguiente métrica

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$$

y por ser producto de compactos es un conjunto compacto.

En Σ podemos definir la siguiente transformación $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ dada por $\sigma(\{x_n\}) = \{y_n\}$ de forma tal que $y_n = x_{n-1}$. En pocas palabras, lo que hace σ (llamado *shift de Bernoulli*) es "correr" la sucesión $\{x_n\}$ un lugar para la derecha. En [KH] se puede encontar una introducción a esta transformación junto con varias propiedades, por ejemplo, que sus puntos periódicos son densos (esto igual se puede hacer como ejercicio)([1]).

Es muy sencillo observar como la transformación σ es expansiva con constante de expansividad 1. Para verlo, tomemos dos sucesiones diferentes $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$. Por ser distintas, existe n_0 para el cual $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ por lo cual $|x_{n_0} - y_{n_0}| = 1$, entonces

$$d(\sigma^{n_0}(\{x_n\}), \sigma^{n_0}(\{y_n\})) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n-n_0|}} \geq \frac{|x_{n_0} - y_{n_0}|}{2^{|n_0-n_0|}} = 1$$

En definitiva lo que haces es "correr" las dos sucesiones de forma tal que el término en el que difieren es el que se encuenta en donde se concentra la mayor distancia.

Sin embargo, es muy sencillo encontrar sucesiones distintas que se mantienen arbitrariamente cercanas para el futuro, por ejemplo: la sucesión constante igual a 1 se mantiene arbitrariamente a sucesiones $\{x_n\}$ que cumplen que son uno para los $n < n_0$ y en el resto de los valores son cero.

2.2. El Anosov en $\mathbb{T}^2$. Tomemos en $\mathbb{R}^2$ la transformación lineal A dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz, tiene coeficientes enteros y determinante uno, por lo cual se deduce que la inversa también tiene coeficientes enteros. Los valores propios son uno mayor y otro menor a uno y sus vectores propios (ortogonales) hacen con el eje Ox un ángulo irracional (verificar todas estas afirmaciones). Podemos por lo tanto, inducir a partir de esta transformación, un difeomorfismo en el toro $\mathbb{T}^2$ pensado como $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (por más detalles recurrir a [KH] o [Rob]). En la figura 1 se aprecia como transforma esta matriz el cuadrado $[0,1]^2$.

No es difícil tampoco, demostrar que este difeomorfismo del toro es expansivo. Para ver eso, diagonalizemos la matriz y tomando dos puntos diferentes, vemos que alguna de sus coordenadas difieren. Por ejemplo la asociada al valor propio mayor que uno (en caso contrario se argumenta con f^{-1}). Pero entonces, la distancia en esa dirección crecerá exponencialmente en $\mathbb{R}^2$. Para ver que en $\mathbb{T}^2$ se puede encontrar una constante de expansividad se argumenta de forma similar al ejemplo 2 probando que si los puntos están suficientemente cerca su distancia crece exponencialmente por lo cual en algún momento han de encontrarse lejos.

Es fácil en este caso también encontrar puntos que se mantienen cerca para el futuro.

[1] Además, vale la pena estudiar como se comporta esta transformación restricta a subconjuntos invariantes de Σ. Esto se puede encontrar tanto en [KH] capítulo 1, [Sh] capítulo 10 o en [Rob] capítulo 3. El único prerequisito para leer eso es saber algo de álgebra lineal y entender el espacio Σ y la transformación σ.

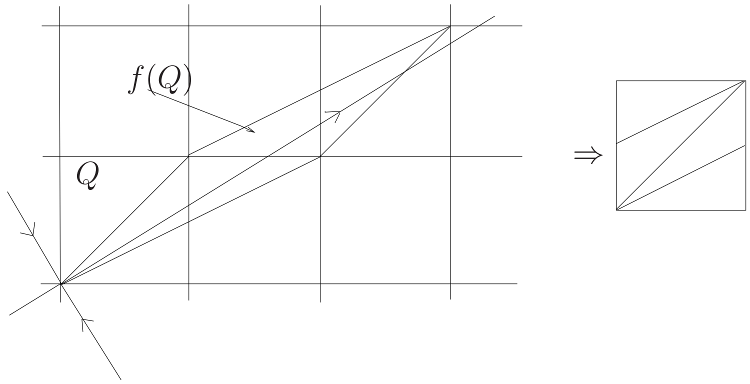

Figura 1. Difeomorfismo inducido por A

3. Caracterización de la expansividad

Vamos a comentar un poco acerca de formas de asegurar expansividad que recuerdan a los resultados de Lyapunov y Massera para ecuaciones diferenciales. Estos resultados se pueden encontrar en [Lew1] y [Lew3].

Empezemos por dar una definición:

Definición 2. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo donde M es un espacio métrico compacto. Decimos que $V : \{(x, y) \in M \times M \ : \ d(x, y) \leq \alpha\} \to \mathbb{R}$ continua es una función de Lyapunov para f si se verifican las siguientes propiedades:

1. $V(x, x) = 0 \ \forall x \in M$.
2. $\Delta V(x, y) = V(f(x), f(y)) - V(x, y) > 0 \ \forall x \neq y$ siempre que este bien definido.

A partir de las funciones de Lyapunov se puede caracterizar los sistemas expansivos a partir del siguiente teorema (del cual probaremos solo una parte, por el resto de la prueba ver [Lew3])

Teorema 2. *$f : M \to M$ es expansivo si y sólo si f admite una función de Lyapunov.*

Demostración del Recíproco. Sean x e y en M distintos de forma tal que $V(x, y) \geq 0$ (en caso contrario se argumenta de igual forma para el pasado) y supongamos que se mantienen a menos de α para el futuro. Entonces, sabemos que tenemos definido $V(f^n(x), f^n(y))$ para todo $n > 0$ y que verificará $V(f^n(x), f^n(y)) > V(f(x), f(y)) > 0$ para todo $n > 0$ (esto es por la segunda condición para V).

Como V es continua y vale cero en la diagonal, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ de forma tal que si $d(z, w) < \varepsilon$ entonces $V(z, w) < V(f(x), f(y))$ por lo tanto, concluimos que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$ para todo $n > 0$.

Como $K = \{(z, w) \in M \times M \ : \ \varepsilon \leq d(z, w) \leq \alpha\}$ es compacto y ΔV es positiva en dicho conjunto, concluimos que ΔV alcanza un mínimo $\delta > 0$ en K.

Juntando esto con la definición de ΔV concluimos que $V(f^n(x), f^n(y)) \geq (n-1)\delta$ lo cual es absurdo pues por ser K compacto V tiene que encontrarse acotada allí.

$\square$

4. Demostración del Teorema de Utz

Probaremos el Teorema de Utz siguiendo la demostración de [Lew3] en la cual se muestran muchas de las ideas con las que se trabaja en el contexto de homemorfismos expansivos([2]) .

Recordemos el enunciado del Teorema.

Teorema 3 (Utz)**.** *Sea $f : M \to M$ homemorfismo expansivo y M espacio métrico compacto. Entonces, si es expansivo al futuro (i.e. existe $\alpha > 0$ de forma tal que $d(f^n(x), f^n(y)) < \alpha$ $\forall n \geq 0$ implica $x = y$) entonces M es un conjunto finito.*

Demostración .

Paso 1: Primero veamos que todos los puntos tienen que ser "estables" para el pasado, es decir, existe un valor $\varepsilon < \alpha$ de forma tal que todo punto $x \in M$ posee un entorno U_x que cumple que si $y \in U_x$ entonces $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon$ para todo $n \geq 0$.

Esto se tiene que cumplir pues en caso contrario existirían puntos $y_n \to x$ de forma tal que para cierto valor k_n se cumple que $d(f^{-k_n}(y_n), f^{-k_n}(x)) > \varepsilon$ (podemos suponer que este valor k_n es el primero para el cual pasa lo mencionado pues y_n se encuentra a menos de ε de x).

Observamos que k_n tiene que tender a $+\infty$ pues siendo f uniformemente continua, necesita cada vez más iterados para hacer que puntos arbitrariamente cercanos superen la distancia ε que se encuentra fija.

Ahora, consideramos los puntos $z_n = f^{-k_n}(y_n)$ y $w_n = f^{-k_n}(x)$ que cumplen que $d(z_n, w_n) > \varepsilon$ y además, verifican que $d(f^l(z_n), f^l(w_n)) < \varepsilon$ para todo $1 \leq l \leq k_n$.

Sea $n_j \to +\infty$ de forma tal que $z_{n_j} \to z$ y $w_{n_j} \to w$ por lo cual tenemos que $d(z, w) > \varepsilon$ en particular, son puntos distintos.

Veamos como $f(z)$ y $f(w)$ se mantienen siempre a menos de α para el futuro([3]) violando la expansividad al futuro.

Para eso, utilizamos que

$$d(f^m(z), f^m(w)) = \lim_{j \to +\infty} d(f^m(z_{n_j}), f^m(w_{n_j})) \leq \varepsilon$$

[2]Las herramientas usadas, asi como los argumentos son simples, pero conviene hacerlos con cuidado un par de veces para familiarizarse. Es recomendable seguir la prueba con lápiz en mano y rellenar sus detalles.

[3]Lo hacemos para $f(z)$ y $f(w)$ pues z y w podrían estar ya a más de α.

pues para n_j suficientemente grande (de forma tal que $k_{n_j} > m$) se cumple que $d(f^m(z_{n_j}), f^m(w_{n_j})) \leq \varepsilon$.

Paso 2:

Es fácil ver que si dos puntos se mantienen cerca para el pasado tienen que también acercarse. Además, se puede ver que lo hacen uniformemente.

Lo que queremos decir es que $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \alpha$) y $\forall \delta > 0$ existe un valor de N de forma tal que si $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon \ \forall n \geq 0$ entonces se cumple que si $m > N$ entonces $d(f^{-m}(x), f^{-m}(y)) < \delta$([4]).

Si esto no pasara, para todo N existirían puntos x_N e y_N verificando que $\delta \leq d(f^{-k}(x_N), f^{-k}(y_N)) < \varepsilon < \alpha$ para todo $0 \leq k \leq N$.

Si consideramos $N_j \to +\infty$ de forma tal que $f^{-N_j}(x_{N_j}) \to z$ e $f^{-N_j}(y_{N_j}) \to w$ se cumplirá que $d(z, w) > \delta$ pero sin embargo $d(f^n(z), f^n(w)) < \varepsilon < \alpha$([5]) para todo $n \geq 0$ violando la expansividad al futuro.

Paso 3:

Con lo obtenido podemos probar entonces que M es un conjunto finito.

Como todo punto tiene un entorno U_x para el cual los puntos se mantienen cerca para el pasado, tenemos un cubrimiento de M por estos abiertos del cual podemos seleccionar un subcubrimiento finito por la compacidad de M.

Sea $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ ese subcubrimiento y sea $n_k \to +\infty$ de forma tal que $f^{-n_k}(x_i) \to x_i^\infty$ $\forall i$.

Como sabemos que para n_k suficientemente grande $f^{-n_k}(U_{x_i})$ se encuentra en un entorno arbitrariamente pequeño de x_i^∞ al mismo tiempo que $f^{-n_k}(M) = M$ concluimos que $M = \{x_1^\infty, \dots, x_n^\infty\}$.

□

5. Otros resultados, problemas abiertos y comentarios

Dado que los espacios topológicos naturales en sistemas dinámicos son las variedades, inmediatamente surge la pregunta acerca de ¿Qué variedades admiten homeomorfismos expansivos?. Vimos un ejemplo en $\mathbb{T}^2$ que se puede también generalizar a $\mathbb{T}^n$ sin ningun problema, por lo cual vemos que hay expansivos en variedades de cualquier dimensión. Pero por ejemplo: ¿habrá expansivos en S^2? ¿y en S^n?.

O'Brien y Reddy, en en 1970 ([OR]) prueban que toda superficie de género mayor que 1 admite un homeomorfismo expansivo, pero no es hasta 1989 ([Lew2]) que se prueba que

---

[4]Notar como esto muestra que si dos puntos se mantienen cerca para el pasado entonces las distancias de sus iterados pasados tienden a cero. Pero no solo eso, también muestra que lo hacen uniformemente, es decir, todos los puntos con esa propiedad van a cero a la "misma" velocidad.

[5]Esto es por el mismo argumento utilizado en el Paso 1.

S^2 no admite homemorfismos expansivos. En [Lew2] además, se completa la clasificación de estos, determinando que los expansivos en $\mathbb{T}^2$ son conjugados a los Anosov lineales ([6]) mientras que en las superficies de género mayor son conjugados a los pseudo-Anosov.

Para probar el resultado mencionado, se construye para los expansivos una estructura de producto local, encontrando conjuntos estables e inestables para todos los puntos (entre otras cosas, un paso fundamental es probar que no puede haber puntos estables). Estas ideas son claves para la clasificación mencionada y para los resultados en dimensiones mayores.

Así como en dimensión 2 los homeomorfismos expansivos quedaron completamente clasificados, no se puede decir lo mismo en dimensiones mayores. Para empezar, una primera dificultad (además de la evidente dificultad de trabajar en espacios de dimensión mayor) es que hay ejemplos (ver [FrRo]) de homeomorfismos expansivos para los cuales el conjunto no errante ([7]) no es toda la variedad. Otra gran dificultad, es que al momento, no se sabe que existan puntos periódicos para estos homeomorfismos.

Escencialmente, se han seguido dos caminos para enfrentar este problema, uno de ellos fue directamente trabajar sobre los expansivos para lograr obtener resultados que muestren que tipo de espacios admiten este tipo de transformaciones. Este enfoque fue llevado a cabo por Paternain [Pat2], que logró demostrar (entre otras cosas) que para que una variedad pueda admitir un homeomorfismo expansivo esta no puede ser simplemente conexa (el resultado dice que un homeomorfismo expansivo es levantado al cubrimiento universal ha de ser infinitamente expansivo, lo cual es mucho más general e implica directamente lo afirmado). Sus técnicas tienen que ver con el estudio de la transformación aplicada en vez de a los puntos, a las curvas del espacio lo cual le permite obtener varias conclusiones interesantes (en particular, con estas técnicas logra clasificar los difeomorfismos de Anosov, problema abierto hace mucho tiempo).

El otro camino, seguido en los trabajos de Vieitez (ver [Vie1] y [Vie2]) y en [ABP], fue optar por estudiar los homeomorfismos expansivos asumiendo ciertas hipotesis de trabajo. Todos los ejemplos conocidos de homeomorfismos expansivos tienen la propiedad de que sus puntos periódicos son densos en el conjunto no errante (en particular, en el caso de expansivos cuyo no errante es toda la variedad densos a secas). El objetivo de estos trabajos fue estudiar (e intentar clasificar) los homeomorfismos expansivos cuyo conjunto no errante es toda la variedad. Para eso, por razones que pasaré a explicar, se tuvo que agregar la hipótesis técnica de que los puntos periódicos topologicamente hiperbólicos[8]

[6]Ser conjugado significa que el homeomorfismo es igual a menos de un cambio de coordenadas, esto es un resultado muy fuerte ya que los Anosov son muy bien conocidos.

[7]El conjunto no errante es el conjunto de los puntos x de forma tal que para todo U entorno, existe n de forma tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

[8]Un punto periódico es topologicamente hiperbolico si en un muy pequeño entorno se comporta como una transformacion lineal sin valores propios de modulo 1

sean densos en la variedad. Como explicamos, la clave de la clasificación en dimensión 2 consiste en conseguir estructura de producto local a partir de la existencia de conjuntos conexos estables e inestables. Esto en dimensión 2 se puede llevar a cabo sin la hipotesis de que existan puntos periódicos (y de hecho luego de hacerlo se puede concluir que estos son densos!!), pero en dimensión 3 esto ya falla (por el ejemplo de [FrRo]). La idea en dimensión dos, es que teniendo un arco estable y uno inestable, sus intersecciones llenarán un abierto (por el teorema de invariancia del dominio) pero en dimensión 3 eso no pasa. Es por eso que se agrega la hipotesis de los puntos periódicos que permite hacer ese trabajo.

Los resultados son bastante sorprendentes, en dimensión 3, con esa hipotesis, Vieitez prueba que el homeomorfismo es conjugado a un difeomorfismo de Anosov Lineal del toro $\mathbb{T}^3$, en particular, prueba que no pueden haber singularidades (cosa que es falsa en cualquier otra dimension!!!!). El resultado es sorprendente en el sentido de que las hipotesis que se pusieron son satisfechas por todos los homeomorfismos expansivos en superficies y sin embargo solo una variedad de dimension 3 admite un homeomorfismo de este tipo. En dimensiones más grandes, el trabajo [ABP] logra generalizar estos resultados probando que si los puntos periodicos topologicamente hiperbolicos son densos, entonces existe estructura de producto local en un abierto y denso. Luego, se estudia el caso en que haya un punto periódico de codimension uno, con lo cual logramos probar que el homeomorfismo ha de ser conjugado a un difeomorfismo de Anosov Lineal en $\mathbb{T}^n$. Para esto último, hubo que trabajar con otras ideas ya que la demostración de no existencia de singularidades dada en [Vie1] se basa en descartar las intersecciones de ciertos conjuntos una por una, lo cual en dimensiones mayores resultaría imposible. Sobre la hipotesis de los puntos periódicos, vale la pena mencionar el resultado de [Vie2] que prueba que si el homeomorfismo es suficientemente diferenciable (de clase $C^{1+\varepsilon}$) entonces basta con la hipotesis de que el conjunto no errante sea todo para alcanzar la misma conclusión. Este resultado es interesante en el sentido de que si bien se agrega la hipotesis técnica de diferenciabilidad, parece indicar que se puede completar la demostración sin dicha hipotesis ya que la expansividad es una propiedad "detectable desde lejos" con lo cual la diferenciabilidad no debería cambiar su "comportamiento".

Otros resultados interesantes vinculan la expansividad con la hiperbolicidad. Mañe, en [Mañ], prueba que el interior C^1 de los difeomorfismos expansivos, esta formado por difeomorfismos $\Omega-$estables (es decir que las propiedades dinámicas en su conjunto no errante no varían bajo perturbaciones pequeñas en la topología C^1).

A pesar de los resultados de Lewowicz que caracterizan completamente los expansivos en superficies desde el punto de vista topológico, aún quedan preguntas por responder, en particular relacionadas a los resultados de Mañe. Al día de hoy, por ejemplo, no se sabe si los difeomorfismos del toro $\mathbb{T}^2$ que están en el borde C^1 de los expansivos se pueden aproximar por difeomorfismos de Anosov, eso a pesar que el resultado de Mañe asegura que el interior C^1 de los expansivos en $\mathbb{T}^2$ son de Anosov y los del borde han de ser conjugados a Anosov (por el resultado de Lewowicz).

Otra posible fuente de problemas interesantes puede ser considerar el caso no compacto, en el cual, se sabe muy poco (esto no ocurre solo en el caso de sistemas expansivos sino en el caso de sistemas dinámicos en general donde siempre la compacidad es una herramienta fundamental en las argumentaciones). Lo que se sabe tiene que ver con el problema de clasificar los homeomorfismos infinitamente expansivos del plano (ver [Gr])

6. Flujos Expansivos

Para terminar, vamos a comentar un poco acerca de como se define esta noción para flujos. La idea es usar la definición de [BW].

Definición 3. Sea $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo en M espacio métrico compacto. Decimos que ϕ es expansivo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que si

$$d(\phi_t(x), \phi_{s(t)}(y)) < \delta \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

para un par de puntos $x, y \in M$ y $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua tal que $s(0) = 0$ entonces, se cumple que $y = \phi_t(x)$ con $|t| < \varepsilon$.

Parecería como que la definición es mucho más rebuscada, pero en realidad no lo es tanto, además, en [BW] también prueban que es equivalente a pedir que s sea un homeomorfismo creciente. La idea es que si dos puntos se mantienen cerca en un flujo eso no significa que el flujo no "expanda" puesto que puntos cercanos en una misma órbita usualmente se mantendrán cercanos. La reparametrización (s) lo que asegura es que la expansión es geométrica y no cinemática, es decir, lo que se tiene que separar son las órbitas y no los puntos en estas.

Lo que parecería ser un problema de esta definición es que no permite que el flujo tenga singularidades (ver [BW], pero se puede hacer como ejercicio).

En este contexto, y con la filosofía de entender las variedades que admiten este tipo de transformaciones, se prueba en [Pat1] que para que una variedad de dimensión 3 admita un flujo expansivo, ha de tener "muchos agujeros", es decir, de alguna manera, la expansividad se da en los momentos que las órbitas "eligen" caminos distintos dentro de la variedad.

Los ejemplos más sencillos de flujos expansivos son las suspenciones de homemorfismos expansivos y los flujos geodésicos en variedades de curvatura negativa. Todos estos (obviamente por el resultado mencionado) están libres de singularidades.

Sin embargo, no resulta natural (al menos a mi gusto) descartar los flujos con singularidades de los flujos expansivos ya que estos pueden presentar separación geométrica de sus órbitas a pesar de tener singularidades. Simplemente que la definición tiene que ser retocada para permitirlas.

Definición 4. Un flujo es K^*-expansivo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que si

$$d(\phi_t(x), \phi_{s(t)}(y)) < \delta \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

para un par de puntos $x, y \in M$ y $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfismo creciente tal que $s(0) = 0$ entonces, se cumple que existen t y u de forma tal que $\phi_{s(u)}(y) = \phi_{u+t}(x)$ con $|t| < \varepsilon$.

El problema es que teniendo singularidades no hay una cota inferior para la "velocidad" de las órbitas por lo cual se podría partir de puntos en una misma órbita que se encuentren muy lejanos en el tiempo y con la reparametrización permitir que sus órbitas se mantengan cerca. Esto a mi gusto sería artificial dado que a pesar de ello se puede tener que las órbitas se separen geométricamente.

Ambas coinciden en que se cumple que si $\tilde{M}$ es M cocientado por la relación de equivalencia de pertenecer a la misma órbita, se tiene que:

$$\inf_{[x],[y] \in \tilde{M}} \sup_{t,s \in \mathbb{R}} \{d(\phi_t(x), \phi_s(y)\} \geq \delta > 0$$

Que de alguna manera mide la separación de las órbitas.

En este contexto, se tiene un resultado ([Art]) que da una condición necesaria y suficiente para existencia de flujos expansivos (con singularidades) en superficies que en particular permite probar que no los hay en S^2 ni en $\mathbb{T}^2$. Además, en [Art] se presentan ejemplos en superficies de género mayor a 1.

Referencias

[Art] A. Artigue, preprint 2007.

[ABP] A. Artigue, J.Brum y R. Potrie, Local product structure for expansive homeomorphisms, PreMat 98/2007

[BW] R. Bowen y P. Walters, Expansive One-Parameter Flows, *Journal of Differential Equations* **12** p. 180-193 (1972).

[FrRo] J. Franks y C. Robinson, A Quasi-Anosov Diffeomorphism that is not Anosov. *Trans. Am. Math. Soc.* **233** p.267-278. (1976).

[Gr] J. Groissman, Tesis de Doctorado, UdelaR 2007.

[KH] A. Katok y B. Hasselblatt; Introduction to the modern theory of Dynamical Systems, *Cambridge Univ. Press* (1995).

[Lew1] J. Lewowicz, Lyapunov functions and topological stability, *Journal of Differential Equations* **38** p. 192-209 (1980).

[Lew2] J. Lewowicz, Expansive Homemorphisms of Surfaces, *Bol. Soc. Bras. de Mat.* **20** (1989), 113-133.

[Lew3] J. Lewowicz, Dinámica de los homeomorfismos expansivos. *Monografias del IMCA* (2003)

[Mañ] R. Mañe, Expansive Diffeomorphisms, *Lecture Notes in Math.* **468** Springer p. 162-174 (1975).

[OR] O'Brien y W. Reddy, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism. *Pacific Journal of Math.* **35** p. 737-741 (1970).

[Pat1] M. Paternain, Expansive flows and the fundamental group, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **24** 179-199 (1993)

[Pat2] M. Paternain, The Principal Loop Bundle and Dynamics, *Compt. Rend. Ac. Sci.* (1999).

[Rob] C. Robinson, Dynamical Systems, *CRS Press* (1995).

[Sh] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, *Springer-Verlag* (1987).

[Utz] W.R. Utz. Unstable homeomorphisms. *Proc. Am. Math. Soc.* **1** (1950).

[Vie1] J.L. Vieitez, Expansive homeomorphisms and hyperbolic diffeomorphisms on three manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **16** p 591- 622 (1996).

[Vie2] J.L. Vieitez, Lyapunov functions and expansive diffeomorphisms on 3D manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **22** p 601- 632 (2002).