

# BLENDERS Y TRANSITIVIDAD ROBUSTA

RAFAEL POTRIE

RESUMEN. La idea es presentar los resultados de [BD]. Nos ayudamos también con [BDV] y el paso del tiempo. Las pruebas no están todas hechas al detalle, son simplemente apuntes hechos para comprender un poco el asunto, pero quedaron lejos de ser autocontenidas y no me esforce mucho por incluir motivaciones.

## 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de estas notas es presentar el concepto de *blenders* y aprovechar para mostrar lugares donde aparecen y algún resultado interesante que se prueba con su ayuda.

Los resultados principales de [BD] se pueden resumir en el siguiente Teorema

**Teorema 1.1** ([BD], Ejemplos Robustamente Transitivos). *Existen conjuntos abiertos de  $\text{Diff}^1(M)$  formados por difeomorfismos transitivos que contienen las siguientes clases:*

- (T1) *Isotópicos a la identidad con  $\dim M \geq 3$ . Estos aparecen de utilizar  $M$  una variedad que admita un flujo de Anosov transitivo.*
- (T2) *Parcialmente hiperbólicos con dirección central de dimensión arbitraria y con exponentes arbitrariamente pequeños en dicha dirección.*

Previamente a estos resultados, los únicos ejemplos conocidos de difeomorfismos robustamente transitivos eran los que habían sido obtenidos por Mañé y Shub en [M] y [Sh]. Luego, en [BV] se construyeron ejemplos sin dirección uniforme alguna.

Las construcciones de Mañé y Shub son bastante diferentes, la primera es un derivado de Anosov en  $\mathbb{T}^3$  mientras que la segunda se construye como producto cruzado sobre un Anosov del toro  $\mathbb{T}^2$  (el difeomorfismo resultante es en  $\mathbb{T}^4$ ). La construcción de Bonatti y Diaz en [BD] puede pensarse como una generalización de la de Shub, o si se quiere, como el producto de entender lo que realmente pasaba en dicho ejemplo.

La construcción en [BV] es más similar a la de Mañé y también logra explotar las ideas allí presentes lo más posible.

Por información y contexto de estos resultados, vale la pena leer [BDV], [PS2] o [C] donde estos resultados (y otros) son presentados en forma de Survey. Aquí nos interesaremos fundamentalmente en presentar una prueba relativamente completa del Teorema 1.1 y asumimos conocimiento del interés y heurística de estos objetos (de todas maneras, intentamos dar un breve racconto en la sección 2). Observamos también que en todos estos ejemplos es posible mostrar la transitividad robusta (y de hecho la minimalidad de una de las foliaciones) mediante las técnicas de [PS], sin embargo, para estos ejemplos concretos, no es posible eludir la creación de blenders para mostrar esto (si permite por otro lado, evitar todo uso de los resultados de [HPS] que siempre está bueno eludir).

## 2. HEURÍSTICA

Voy a intentar escribir en esta sección algunas ideas que espero permitan leer la sección 5 saltándose las secciones 3 y 4 que son las más pesadas técnicamente y deberían ser obviadas antes de entender por que son útiles.

El primer ejemplo de un abierto  $C^1$  de difeomorfismos no hiperbólicos<sup>1</sup>, debido a Abraham-Smale, es un difeomorfismo de una variedad de dimensión 4 que posee un puntos hiperbólicos silla de diferente índice robustamente conectados, es decir, que pertenecen a un mismo conjunto transitivo. Obviamente esto prohíbe la hiperbolicidad, pero lo que es notable es justamente eso, que puntos de diferente índice puedan estar robustamente en una misma “pieza” de la dinámica.

La versión de Simon del ejemplo de Abraham-Smale (al menos, la versión de Bonatti del ejemplo de Simon<sup>2</sup>) es muy simple y deja en evidencia como este fenómeno puede ocurrir. Consideremos un atractor  $\Lambda$  de Plykin en el plano (un atractor hiperbólico no trivial del disco que tiene todo el plano menos tres puntos como variedad estable) y multiplicamos ese plano por una expansión uniforme mucho mayor que la que hay originalmente en el Plykin (de forma que dicho plano quede normalmente hiperbólico, y en particular, persistente). Ahora, consideramos una silla  $p$  de índice estable 2, en particular, tiene índice diferente a todos los puntos periódicos de  $\Lambda$  que son de índice 1. La gracia, es que por más que los puntos tengan variedad estable de dimensión uno, el conjunto hiperbólico entero tiene variedad estable de dimensión dos! y por lo tanto, ambos puntos pueden estar homoclinicamente relacionados, y robustamente!! Ver figura 1.

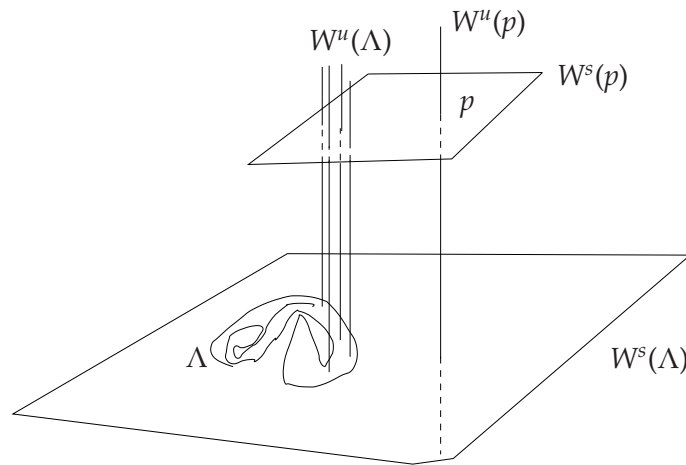


FIGURA 1. Ejemplo de Simon según Bonatti

Esta idea, que es super útil no solo para construir este tipo de ejemplos, sino por ejemplo para construir clases que no admitan robustamente descomposición dominada (basta considerar  $p$  con valores propios estables complejos y conectar  $\Lambda$  con un punto de índice 1 que tenga valores propios inestables complejos también<sup>3</sup>) y de esa manera construir ejemplos de clases homoclinicas acumuladas por infinitos pozos y/o fuentes, y mismo dinamicas universales (ver trabajos de Bonatti, Diaz y Pujals, en varias combinaciones).

Sin embargo, esta idea no termina de explicar todas las maneras posibles de que puntos de diferente índice esten conectadas. Y mismo en casos donde esto puede estar presente, es más bien una técnica que permite construir ejemplos más que explicar cual es la razón de que ocurran estos fenomenos.

Bonatti y Diaz introdujeron en [BD] los blenders (luego de que ya habian sido utilizados implicitamente por Diaz, ver [BDV] capítulo 6), una especie de conjuntos hiperbolicos que por su propia geometría mismo siendo de tipo silla y de dimensión topologica nula (es decir,

<sup>1</sup>Fue simultaneo al primer ejemplo de abierto  $C^2$  de difeomorfismos no hiperbolicos, en superficies, debido a Newhouse.

<sup>2</sup>Yo personalmente nunca vi el artículo de Simon, y Bonatti segun se, es la manera que se imagino el ejemplo.

<sup>3</sup>Los resultados de Bonatti-Crovisier, por ejemplo, dado que por estar conectados estan en la misma clase de recurrencia, implican que genericamente estarán todos los puntos en la misma clase homoclinica.

totalmente desconexos), las variedades estables se comportan como que si tuviesen dimensión mayor (en particular, la dimensión de Hausdorff de la variedad estable del conjunto es al menos una mayor que la dimensión de cada variedad estable). A estos conjuntos los llamaron *cs-blenders*, y desde ese momento, donde los usaron para probar la transitividad robusta de ciertos ejemplos que presentamos en la introducción, han encontrado muchísimas otras aplicaciones, no solo en construcciones de ejemplos sino explicando y formando parte de la teoría (en particular, muy relacionados a los ciclos heterodimensionales).

**2.1. Lo que hay que saber para saltarse hasta la sección 5.** Aca voy a enunciar un par de resultados y dar una definición “tramposa” de *cs-blenders* que va a permitir saltarse las secciones subsiguientes e ir directamente a la prueba del Teorema. Dado que la definición entera de los blenders y su construcción son un poco técnicos, creo que vale la pena saber el final de la historia para ver que vale la pena conocerla toda.

Primero definimos lo que es un *cs-blender*, basados fundamentalmente en [BDV] y [BD3]. Decimos que es una definición tramposa pues es una definición en función de lo que cumple y no de como realmente es. De hecho, en la sección 3 lo que hacemos es dar una definición trabajable (es decir, que permita probar que existe) y luego probamos que verifica las propiedades que le damos.

**Definición 1.** Un *cs-blender* asociado a un punto periódico hiperbólico  $Q$  de índice  $k$  es un par  $(C, f)$  donde  $C$  es un compacto de  $M$  y  $f$  un difeomorfismo la variedad  $M$ . Además, se verifican las siguientes propiedades:

- Existe un campo de conos  $C^{uu}$  de dimensión  $\dim M - k - 1 \geq 0$  (la dimensión de un cono es la del subespacio de mayor dimensión contenido en él) en  $C$  que es  $Df$ -invariante (para todo  $x \in C$  tal que  $f(x) \in C$ ).
- Para toda órbita periódica  $P$  que verifique que la variedad inestable de  $P$  contiene un disco tangente a  $C^{uu}$  que intersecta un compacto  $C' \subset C$  fijado y cuyo borde no intersecta  $C$ . Entonces, se cumple que  $W^s(P) \subset \overline{W^s(Q)}$ . En dicho caso, diremos que  $P$  activa el blender  $(C, f)$ .

Lo importante a observar es que sale de la definición que es posible que la clausura de la variedad estable de  $Q$  tenga dimensión uno mayor que lo que realmente tiene!. Esto permite rehacer los ejemplos que comentamos arriba. Claro, con esta definición, no es para nada claro que estos conjuntos realmente existan. Es por eso que vamos a enunciar un par de Teoremas que muestran algunos casos en los cuales podemos garantizar la existencia de estos conjuntos (esto lo hacemos con más cuidado en la sección 4).

**Teorema 2.1.** Sea  $f : M \rightarrow M$  el tiempo 1 de un flujo de Anosov transitivo y sea  $\gamma$  una órbita periódica del flujo. Entonces, existe una perturbación  $g$  de  $f$  tal que en  $\gamma$  tiene dos órbitas periódicas, una atractora y una repulsora tal que la repulsora tiene un *cs-blender*  $(C, f)$  que es activado por la otra.

A veces, logramos hacer que la variedad estable se comporte de dimensión aun mucho mayor. Para eso, se definen las cadenas de *cs-blenders*. Eso es, consideremos  $Q_0, \dots, Q_n$  órbitas periódicas de índices  $k+i$  con  $k \geq 1$  y  $k+n \leq \dim M$ , decimos que  $\{(C_i, f)\}_{i=0}^{n-1}, Q_n$  es una cadena de *cs-blenders* sii  $(C_i, f)$  es un *cs-blender* asociado a  $Q_i$  y se cumple que  $Q_{i+1}$  activa  $(C_i, f)$ . Obtenemos que  $\overline{W^s(Q_0)} \supset W^s(Q_n)$ . Notar que no requerimos la existencia de blender para  $Q_n$ .

Obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de Anosov y  $N$  una variedad cerrada. Si  $F = f \times id_N$ , entonces existe una perturbación  $G$  de  $F$  que tiene puntos  $P_0, \dots, P_{\dim N}$  que están conectados por una cadena de blenders.

### 3. DEFINICIÓN DE $CS$ -BLENDERS

En esta sección definiremos los Blenders como en [BD], al final haremos algunos comentarios acerca de [BD3] donde se da una definición de lo que llaman *herraduras blender* que son un poco más restrictivas pero aparecen por igual en los contextos que estudiamos usualmente. Asumiremos alguna notación, definición y probablemente algunos resultados. Algunas de estas cosas aparecen en el Apéndice, las otras, están en las referencias que dimos arriba.

Consideramos una variedad  $M$  compacta de dimensión  $n \geq 3$  y escribimos  $n = k + m + 1$  con  $k, m \geq 1$ . Notamos como  $\mathbb{D}^k$  y  $\mathbb{D}^m$  los discos euclídeos de dichas dimensiones.

Consideramos ahora  $C$  un encaje del “cubo”  $\mathbb{D}^k \times [-1, 1] \times \mathbb{D}^m$  en  $M$ . Le llamamos a las coordenadas definidas por este encaje,  $x_s \in \mathbb{D}^k$ ,  $x_c \in [-1, 1]$  y  $x_u \in \mathbb{D}^m$ . La imagen mental a la que seguido haremos referencia es pensar a  $x_s$  como horizontal, a  $x_c$  como la intersección del plano horizontal y vertical y a  $x_u$  como la dirección vertical (ver figura 2).

Vamos a denotar

$$\partial^{ss}C = (\partial\mathbb{D}^k) \times [-1, 1] \times \mathbb{D}^m$$

$$\partial^u C = \mathbb{D}^k \times \partial([-1, 1] \times \mathbb{D}^m)$$

$$\partial^{uu}C = \mathbb{D}^k \times [-1, 1] \times (\partial\mathbb{D}^m)$$

Notamos que  $\partial C = \partial^{ss}C \cup \partial^u C$  ya que  $\partial^{uu}C \subset \partial^u C$ . En el dibujo (figura 2),  $\partial^{ss}C$  representa las tapas de adelante y de atrás de  $C$  mientras que  $\partial^{uu}C$  las tapas de arriba y abajo.

Definimos, para  $x = (x_s, x_c, x_u) \in C$ ,  $\tilde{E}^{ss}(x)$ ,  $\tilde{E}^u(x)$  y  $\tilde{E}^{uu}(x)$  como los subespacios tangentes en  $x$  a  $\mathbb{D}^k \times \{(x_c, x_u)\}$ ,  $\{x_s\} \times [-1, 1] \times \mathbb{D}^m$  y  $\{(x_s, x_c)\} \times \mathbb{D}^m$  respectivamente. Tienen dimensiones respectivas  $k, m + 1$  y  $m$ .

Si fijamos ahora  $\varepsilon \in (0, 1)$  vamos a definir los campos de conos  $C^{ss}$ ,  $C^u$  y  $C^{uu}$  definidos en un punto  $x \in C$  como los conos de ángulo  $\varepsilon$  alrededor de las direcciones definidas anteriormente.

La observación importante es que si tenemos una variedad  $A \subset C$  de dimensión  $k$  tangente a  $C^{ss}$  y tal que  $\partial A \subset \partial^{ss}C$  y otra variedad  $B \subset C$  de dimensión  $m + 1$  tangente a  $C^u$  cuyo borde está contenido en  $\partial^u C$ , entonces, obtenemos que  $A$  y  $B$  tienen intersección no vacía, y esta consiste de un único punto.

La idea va a ser que ciertos discos horizontales corten a discos verticales o al menos a estos “enzanchados” entonces pasamos a dar alguna otra definición.

**Definición 2.** Un disco  $\Delta$  de dimensión  $k$  (resp.  $m$ ) en  $C$  es un *disco horizontal* (resp. *vertical*) si es tangente a  $C^{ss}$  (resp.  $C^{uu}$ ) y verifica que  $\partial\Delta$  está contenido en  $\partial^{ss}C$  (resp.  $\partial^{uu}C$ ).

Si fijamos  $D^H \subset C$  un disco horizontal, se cumple que en  $C \setminus D^H$  hay dos clases de homotopía de discos verticales. Decimos que un disco vertical  $D^V$  está *a la derecha* del disco  $D^H$  si se encuentra en la clase de homotopía del disco  $\{(0_s, 1)\} \times \mathbb{D}^m$ . En caso contrario, decimos que está *a la izquierda*.

Decimos que  $\mathcal{S}$  es una *banda vertical* si es siempre tangente a  $C^u$  y es la imagen por una función  $\Phi : [-1, 1] \times \mathbb{D}^m \rightarrow C$  verificando que  $\Phi(t, \mathbb{D}^m)$  es un disco vertical para todo  $t \in [-1, 1]$ . Se cumple que  $\partial\mathcal{S} = \partial^+ \mathcal{S} \cup \partial^- \mathcal{S} \cup (\mathcal{S} \cap \partial^{uu}C)$  donde  $\partial^\pm \mathcal{S}$  son discos verticales.

Observar que siempre podemos “ensanchar” un disco vertical para hacer una banda a su alrededor.

Decimos que  $\mathcal{S}$  es una *banda vertical maximal* si se verifica que  $\partial\mathcal{S} \subset \partial^u C$ .

Por último, definimos el *ancho* de una banda  $\mathcal{S}$  como  $wd(\mathcal{S}) = \min\{\ell(\alpha) : \alpha \subset \mathcal{S} \quad \partial\alpha \cap \partial^\pm \mathcal{S} \neq \emptyset\}$ , es decir, el mínimo de las longitudes de curvas en  $\mathcal{S}$  que unen los bordes verticales.

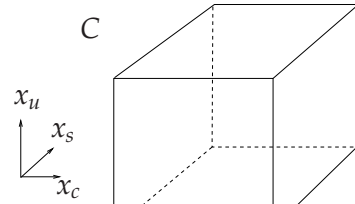


FIGURA 2. Las direcciones en  $C$

Se verifican la siguiente propiedad.

**Lema 3.1.** *Fijado  $C$  como arriba, las bandas verticales tienen un ancho uniformemente acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver primero que toda banda vertical está contenida en una banda vertical maximal (cuyo ancho, obviamente es mayor o igual). Entonces basta encontrar la cota para bandas verticales maximales.

El hecho que las bandas son tangentes al cono  $C^u$  y la maximalidad implican que son el gráfico de una función de  $\{0_s\} \times [-1, 1] \times \mathbb{D}^m$  en  $\mathbb{D}^k \times \{(0_c, 0_u)\}$  con derivada acotada por  $\varepsilon$ . Esto da una cota de algo así como  $1 + \varepsilon$  a la longitud de curvas que atraviesan una banda maximal.  $\square$

Estamos en condiciones de definir lo que es un  $cs$ -blender.

**Definición 3.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo  $C^1$  y  $C$  un encaje  $C^1$  de  $\mathbb{D}^k \times [-1, 1] \times \mathbb{D}^m$ . Decimos que  $(C, f)$  es un  $cs$ -blender (de índice  $k$ ) si verifica las siguientes hipótesis:

- (H1) Existe una componente conexa  $A$  de  $C \cap f(C)$  disjunta de  $\partial^{ss}C \cup f(\partial^u C)$  (figura 3).
- (H2) Existe  $n > 0$  y  $B$  componente conexa de  $C \cap f^n(C)$  disjunta de  $\partial^{ss}C \cup f^n(\partial^{uu}C) \cup \mathbb{D}^k \times \{1\} \times \mathbb{D}^m$  (figura 3).
- (H3) Los conos  $C^{ss}$ ,  $C^u$  y  $C^{uu}$  son invariantes (dependiendo de  $s$  o  $u$  para  $Df^{-1}$  o  $Df$ ) e hiperbólicos. Precisamente, existe  $\lambda > 1$  tal que:
  - (i) Para todo  $x \in f^{-1}(A)$  (resp.  $x \in f^{-n}(B)$ ) y  $v \in C^u(x)$ , el vector  $Dfv$  (resp.  $Df^n v$ ) pertenece al interior de  $C^u(f(x))$  (resp.  $C^u(f^n(x))$ ) y se cumple que  $\lambda \|v\| \leq \|Dfv\|$  (resp.  $\lambda \|v\| \leq \|Df^n v\|$ ).
  - (ii) Lo mismo que arriba ocurre para  $C^{uu}$ .
  - (iii) Para todo  $x \in A$  (resp.  $x \in B$ ) y todo vector  $v \in C^{ss}(x)$ , el vector  $Df^{-1}v$  (resp.  $Df^{-n}v$ ) pertenece al interior de  $C^{ss}(f^{-1}(x))$  (resp.  $C^{ss}(f^{-n}(x))$ ) y se cumple que  $\lambda \|v\| \leq \|Df^{-1}v\|$  (resp.  $\lambda \|v\| \leq \|Df^{-n}v\|$ ).
- (H3bis) Es consecuencia de (H1) y (H3) que existe un único punto fijo  $Q \in A$ , que además es hiperbólico de índice  $k$ . Notamos  $W_0^s$  como la componente conexa de su variedad estable cortada con  $C$  que contiene a  $Q$ . Como consecuencia de (H3), es un disco horizontal.
- (H4) Existe un entorno  $U^-$  de  $\mathbb{D}^k \times \{-1\} \times \mathbb{D}^m$  tal que todo disco vertical a la derecha de  $W_0^s$  no corta  $U^-$  (esto quiere decir solamente que  $Q$  no está muy contra el borde izquierdo de  $C$ ).
- (H5) Si  $D$  es un disco vertical a la derecha de  $W_0^s$  entonces, o bien  $f(D) \cap A$  contiene un disco vertical a la derecha de  $W_0^s$  que no está muy contra el borde  $\mathbb{D}^k \times \{+1\} \times \mathbb{D}^m$ , o bien  $f^n(D) \cap B$  contiene un disco vertical a la derecha de  $W_0^s$  y no muy cerca de  $W_0^s$ . La cercanía se expresa mediante abiertos  $U^+$  y  $U$  de  $\mathbb{D}^k \times \{+1\} \times \mathbb{D}^m$  y  $W_0^s$  respectivamente.

Estas propiedades implican directamente la robustez de los  $cs$ -blenders.

**Proposición 3.1.** *Sea  $(C, f)$  un  $cs$ -blender. Entonces, existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $\tilde{f}$  está  $C^1$ -cerca de  $f$ , entonces  $(C, \tilde{f})$  es un  $cs$ -blender.*

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente (H1), (H2) y (H3) son robustas (e implican (H3bis)). Por otro lado, (H4), que es robusta, le da significado y robustez a (H5). Notar que sin (H4), mismo si hiciera sentido (H5), podría no ser robusto pues el disco vertical que aparecía en  $f^n(D) \cap B$  (por ejemplo) podría salirse para  $\tilde{f}^n(D) \cap B$  y dejar de ser un disco vertical. Una vez observado esto, queda clara la robustez del  $cs$ -blender.  $\square$

Notar que de alguna manera, la hipótesis (H5), lo que pide es que si bien  $B$  está corrido hacia la izquierda, no puede estar demasiado corrido. Lo que pide es que los discos verticales cuya

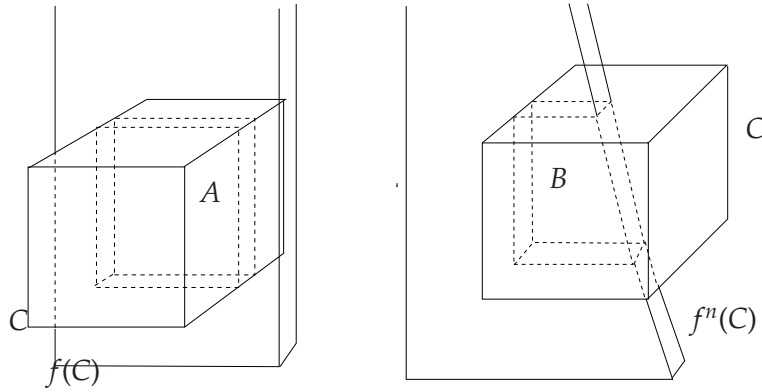


FIGURA 3. Hipotesis (H1) y (H2)

imagen está muy a la derecha (se salen de  $C$  o mismo están en  $U^+$ ) igual están a la derecha de  $W_0^s$  al pasar por  $B$ .

Para probar la propiedad geométrica distintiva de los cs-blenders, vamos a hacer uso del siguiente resultado que usa fuertemente la hipótesis (H5).

**Lema 3.2.** *Existe  $\nu > 1$  tal que si  $\mathcal{S}$  es una banda vertical a la derecha de  $W_0^s$ , entonces, si  $f(\mathcal{S}) \cup f^n(\mathcal{S}) \cap W_0^s = \emptyset$ , entonces, existe  $\tilde{\mathcal{S}}$  banda vertical a la derecha de  $W_0^s$  contenida en  $f(\mathcal{S}) \cup f^n(\mathcal{S})$  tal que  $wd(\tilde{\mathcal{S}}) \geq \nu wd(\mathcal{S})$ .*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos los discos verticales  $D^+ = \partial^+ \mathcal{S}$  y  $D^- = \partial^- \mathcal{S}$ .

Si  $f(D^+) \cap A$  y  $f(D^-) \cap A$  son discos verticales a la derecha de  $W_0^s$  o si lo mismo pasa para  $f^n(D^+) \cap B$  y  $f^n(D^-) \cap B$ , tenemos que el ancho de la banda  $f(\mathcal{S}) \cap A$  en el primer caso, o el de  $f^n(\mathcal{S}) \cap B$  en el segundo, se multiplica por la expansión que hay en la dirección  $x_c$  dado por (H3)(i). Esto concluye en esos casos.

Por la hipótesis (H5), sabemos que alguno de  $f(D^+) \cap A$  o  $f^n(D^+) \cap B$  es un disco vertical a la derecha de  $W_0^s$ , y lo análogo ocurre para  $D^-$ .

Supongamos que  $f^n(\mathcal{S}) \cap B$  no corta  $W_0^s$ . Entonces, podemos suponer también que  $f^n(D^+) \cap B$  y  $f^n(D^-) \cap B$  no son discos a la derecha de  $W_0^s$  (si lo son ambos, entonces vemos que se ensancha la banda, si es uno solo, obtenemos que corta  $W_0^s$ ).

Por lo tanto, la hipótesis (H5) como mencionamos antes, nos da que  $f(D^+) \cap A$  y  $f(D^-) \cap A$  son discos verticales a la derecha de  $W_0^s$  y también concluimos.  $\square$

Obtenemos como consecuencia que

**Lema 3.3.**  *$W^s(Q)$ , la variedad estable de  $Q$  (de dimensión  $k$ ), intersecta toda banda vertical.*

DEMOSTRACIÓN. Esto sale directo de un argumento inductivo con el Lema anterior, la invariancia de  $W^s(Q)$  y el hecho de que el ancho de las bandas está acotado uniformemente.  $\square$

Pero la propiedad más importante de los cs-blenders, combina esta propiedad geométrica con el  $\lambda$ -lema para darnos:

**Lema 3.4.** *Sea  $P$  un punto periódico hiperbólico de índice  $k + 1$  tal que  $W^u(P) \cap C$  contiene un disco vertical a la derecha de  $W_0^s$ . Entonces,  $W^s(P) \subset \overline{W^s(Q)}$*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x \in W^s(p)$  y  $V$  entorno de  $x$ . Entonces,  $V$  contiene un pequeño disco transversal a  $W^s(p)$  por  $x$ , de hecho, podemos considerar una pequeña banda. El  $\lambda$ -Lemma dice que después de suficientes iterados, esta banda estará muy cerca de la variedad inestable de  $P$  y por

lo tanto, contendrá una banda vertical en  $C$ . Esto implica que  $W^s(Q)$  corta ese iterado, y por la invariancia, corta también  $V$  lo cual concluye.  $\square$

Finalmente, vamos a definir una noción que es útil a los efectos de las construcciones.

**Definición 4.** Decimos que  $(\{(C_i, f)\}_{i=0}^{m-1}, Q_m)$  es una *cadena de cs-blenders* si se verifica que  $(C_i, f)$  son cs-blenders de índice  $k + i$  (para algún  $k \geq 1$ ),  $Q_m$  es un punto periódico de índice  $k + m$  y además se cumple que si  $Q_i$  es el punto fijo de  $(C_i, f)$  dado por (H3bis) y  $W_0^s(i)$  la componente conexa en  $C_i$  de su variedad estable, entonces, la variedad inestable de  $Q_{i+1}$  contiene un disco vertical en  $C_i$  a la derecha de  $W_0^s(i)$  para todo  $i = 0, \dots, m - 1$ .

Dado un cs-blender  $(C, f)$ , diremos que un punto periódico  $P$  lo *activa* si su variedad inestable contiene un disco vertical a la derecha de  $W_0^s$ .

**Lema 3.5.** Sea  $(\{(C_i, f)\}, Q_m)$  una cadena de cs-blenders. Entonces,  $W^s(Q_m) \subset \overline{W^s(Q_0)}$ .

Notar que tener una cadena de cs-blenders, así como tener un cs-blender, es una propiedad robusta. Por último, hacemos notar que se puede definir *cu-blender* como un cs-blender para  $f^{-1}$ .

En [BD3] se estudian ciertos conjuntos hiperbólicos que de alguna manera generalizan los cs-blenders y que en ciertos casos (como el que estudian ellos por ejemplos) pueden ser útiles. La idea es considerar una herradura en dimensión  $\geq 3$  tal que hay una dimensión que es inestable pero de muy poca expansión y la intersección está de alguna manera torcida. Lo mejor es ver una figura, supongamos que  $C$  es un cubo con conos  $C^{ss}$ ,  $C^u$  y  $C^{uu}$  como arriba y estudiamos que pasa con  $f^{-1}(C) \cap C$ . Lo que pedimos a una *blender-horseshoe* es que esa intersección tenga dos componentes conexas,  $A$  y  $B$ , completas (en el sentido que atraviesan  $\partial^{ss}C$ ) y que sean como en la figura 4.

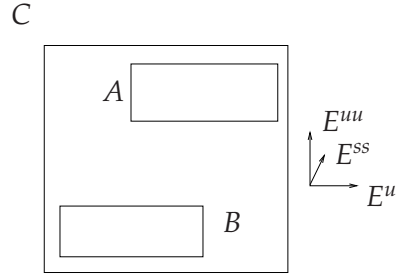


FIGURA 4. Un blender horseshoe

#### 4. CREACIÓN DE BLENDERS

La idea es ver bajo que condiciones, o en que circunstancias se pueden crear estos blenders. Y cuando se pueden hacer cadenas de blenders (que son más útiles por los Lemas 3.4 y 3.5). Todas las perturbaciones de esta sección se pueden hacer tan diferenciables como se quiera y pequeñas en todas las clases de diferenciabilidad.

**4.1. Conexión homoclínica fuerte.** Supongamos que tenemos un punto fijo (periódico) hiperbólico  $p$  de índice  $k$  en  $M$ , una variedad de dimensión  $n = k + m + 1$  con  $k, m \geq 1$ .

Asumimos también que el  $k + 1$  exponente de  $p$  no es muy fuerte, es decir, en  $p$  tenemos una decomposición  $T_pM = E^{ss} \oplus E^u \oplus E^{uu}$  con  $\dim E^u = 1$ .

La teoría usual de [HPS] nos dice que  $p$  posee variedades estable  $W^{ss}(p)$ , inestable  $W^u(p)$  e inestable fuerte  $W^{uu}(p)$  tangentes a  $E^{ss}$ ,  $E^u$  y  $E^{uu}$  respectivamente. Diremos que  $p$  presenta una *conexión fuerte* si se verifica que  $W^{ss}(p) \cap W^{uu}(p) \neq \emptyset$  y además, esta intersección es quasi-transversal.

La idea es que si el valor propio central (el  $k + 1$ -ésimo exponente) es muy pequeño, entonces, una perturbación no muy grande nos permitirá crear un cs-blender.

Empecemos con los detalles. Consideramos alrededor de  $p$ , un cubo  $C_0$ , muy cerca del dado por Hartman-Grobman, con lo cual es casi lineal el mapa en dicho cubo. En particular, en dicho cubo, si es suficientemente pequeño, con  $\varepsilon$  tan chico como queramos tenemos que los conos  $C^{ss}$ ,  $C^u$  y  $C^{uu}$  satisfacen (H3).

Llamemos  $q$  al punto de conexión fuerte, entonces, tenemos que  $f^{n_1}(q) \in C_0$  y  $f^{n_2}(q) \in C_0$  donde elegimos  $n_1, n_2 > 0$  para que sean los primeros naturales con esa propiedad.

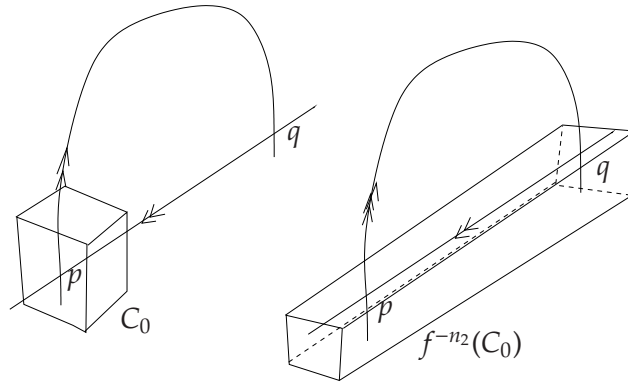


FIGURA 5. La caja  $C_0$

Nos gustaría en la caja  $C = f^{-n_2}(C_0)$  poder definir también campos de conos verificando (H3). Vemos rápidamente que considerando  $A$  como la componente conexa de  $C \cap f(C)$  que contiene a  $p$  obtenemos que se cumple (H1).

Por otro lado, en  $C$  podemos definir  $\Lambda$  como el invariante maximal para  $f^{n_1}$  que evidentemente contiene a  $q$  y  $p$  y es un conjunto hiperbólico (para  $f$  considerando los iterados, pero recordar que por construcción, el único punto que se mantiene todos sus iterados en  $C$  es  $p$ , aunque hay puntos que se mantienen por todos sus iterados futuros, i.e. su variedad estable local).

Por lo tanto, para todo  $x \in \Lambda$ , tenemos direcciones  $E^{ss}$ ,  $E^u$  y  $E^{uu}$  bien definidas (a partir de conos que se extienden de  $p$ ). Por lo tanto, los conos que elijamos para que valga (H3), en los puntos de  $\Lambda$  tienen que tener estos subespacios adentro. Obvio que la contracción-expansión en un paso que pide (H3) podemos suponer que se verifica para estos subespacios (eligiendo una métrica adaptada). Los conos que tenemos en  $\Lambda$ , los podemos extender a un pequeño entorno  $V_1$  de  $\Lambda$  que en principio no es todo  $C$ .

De todas maneras, la construcción de los campos de conos fuera de ese entorno de  $\Lambda$  no es tan grave ya que solo tenemos que controlar un iterado. Fijado  $V_1$ , existe  $n_0$  fijo tal que si un punto está  $n_0$  iterados consecutivos en  $A$ , entonces  $x \in V_1$ .

Entonces, definimos campos de conos  $C^u$  y  $C^{uu}$  bien angostos (de forma que no se pueda ensanchar más que  $\varepsilon$  en  $n_0$  iterados) en  $f^{-1}(A) \setminus (V_1 \cup A)$  que se pegue bien en  $\partial V_1$  con el campo y en  $\partial A$  con la imagen por  $Df$  de ellos mismos. Así los “engordamos un poquito en  $A \setminus (V_1 \cup f(A))$  y así sucesivamente por  $n_0$  iterados donde nos aseguramos que ya nos quedo definido en todo  $f^{-1}(A)$ . Hacemos algo análogo con  $C^{ss}$  iterando para el otro lado.

En  $B$ , que si bien aun no está bien definido, lo vamos definiendo como la componente conexa de  $f^{n_1}(C) \cap C$  que contiene a  $q$ , queremos hacer la misma construcción, pero queremos que sea coherente. Aquí hay que apelar al margen que nos deja la construcción en  $A$ . El problema se puede dar en  $B \cap f^{-1}(A)$  y en  $f^{-n}(B) \cap A$  (notar que  $A \cap B = \emptyset$  ya que  $B$  contiene a  $q$  y en el sentido de la variedad estable tiene un ancho muy pequeño, mientras que  $q$  no pertenece a  $A$ ). El conjunto  $B \cap f^{-1}(A)$  no es muy problemático pues es bastante “errante” por  $f$  (de hecho, la observación de que  $A \cap B = \emptyset$  implica que  $f(B \cap f^{-1}(A)) \cap (B \cap f^{-1}(A)) = \emptyset$ ) entonces, lo importante es que allí definamos los campos de conos coherentes con como los construimos para  $B$ . Algo análogo pasa en  $f^{-n}(B) \cap A$ , supongo a simple vista que no aparecen problemas cíclicos de definición de los conos, i.e. se pueden construir sin problemas.

Ahora, vamos a intentar perturbar  $f$ , y ver cuanto tenemos que hacerlo, para que  $B$  realmente verifique lo que buscamos. Naturalmente, cuanto mayor sea el exponente  $k + 1$ -ésimo, más va a haber que “empujar” a  $B$  para que verifique (H2). Una vez que logremos eso, las condiciones



(H4) y (H5) no son tan difíciles de verificar (de hecho, (H4), si extendemos para un costado un poco  $C$  se verifica ya mismo automáticamente), de hecho, la verificación de (H5) la haremos medio simultánea con (H2) y se va a necesitar que el exponente antedicho no sea demasiado grande (la razón queda clara en la figura 6, observar que si empujamos mucho al punto  $q$  como muestra la figura, la hipótesis (H5) no se va a cumplir).

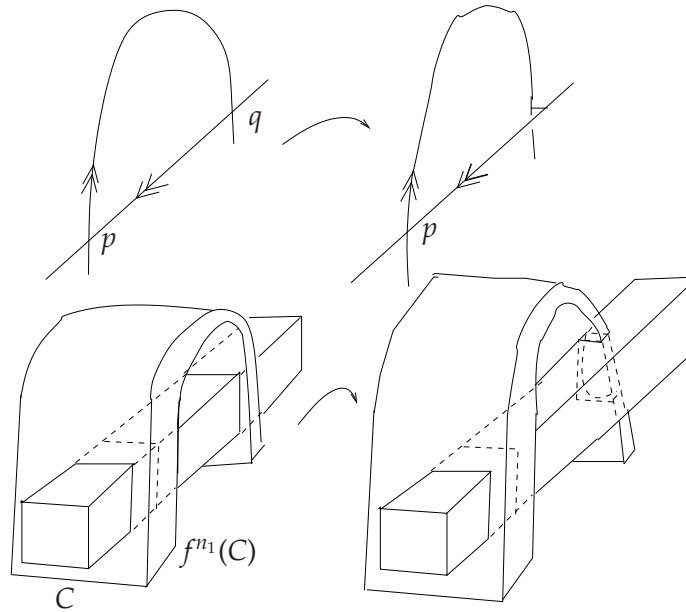


FIGURA 6. La perturbación

Una vez hecha esta observación, no hay mucho que demostrar, simplemente, la idea es correr  $q$  mediante una translación (que no afecta las propiedades de los conos). Si no se expande mucho en la dirección  $E^c$ , entonces se cumplirá bajo una pequeña translación la hipótesis (H2). Observar que si la expansión en  $E^c$  es pequeña, cuando los discos verticales se salen por  $f$  de  $A$ , entonces van a estar muy hacia “el borde” y por lo tanto, al entrar en  $B$  serán discos a la derecha de la variedad estable de  $p$  y por tanto verificando (H5).

En la sección 4.1 de [BD2] se prueba que en una situación muy similar a esta se pueden crear cs-blenders, de hecho, ellos logran fabricar blender-horseshoes (no hay mucha diferencia en la construcción, simplemente hay que tomar un  $C$  un poco más grande y también hacer el corrimiento).

**4.2. Tiempo uno de un flujo hiperbólico.** Esta construcción es específica de [BD]. Si bien no es difícil ponerse en las hipótesis de la sección anterior para lograr una perturbación que genere un blender, la ventaja es que en vez de decir que hay perturbaciones pequeñas con blenders, da una verdadera curva partiendo del difeomorfismo con blenders (en principio podría estar en la clausura del interior, pero que no esté en la clausura de ninguna componente conexa del interior).

Tenemos  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de una variedad  $M$  de dimensión  $n = k + m + 1$  con  $k, m \geq 1$  como antes y  $Z$  es un campo de vectores  $Df$ -invariante. Suponemos que  $Z$  tiene una órbita cerrada  $\gamma$  que suponemos normalmente hiperbólica (y por ende persistente [HPS]). Suponemos que la dimensión estable de  $\gamma$  es  $k$  y la inestable tiene dimensión  $m$ .

Suponemos también que  $f$  tiene en  $\gamma$  dos puntos periódicos  $P$  y  $Q$  (en diferentes órbitas) tal que  $W^s(Q)$  intersecta  $W^u(P)$  quasi-transversalmente en un punto  $a \in M$ . Tenemos que  $T_a M = T_a W^s(Q) + T_a W^u(Q) + \mathbb{R}Z(a)$ .

Se cumple entonces

**Teorema 4.1.** *En las hipótesis anteriores, tenemos que existe  $\{f_t\}_{t \geq 0}$  un arco de difeomorfismos con  $f_0 = f$  y tal que para todo  $t > 0$  tenemos que*

- (1) *Los puntos  $P$  y  $Q$  son sillas hiperbólicas de  $f_t$  de índices  $k + 1$  y  $k$  respectivamente.*
- (2) *Existen entornos  $C_t(Q)$  de  $Q$  y  $C_t(P)$  de  $P$  tal que  $(C_t(Q), f_t)$  es un cs-blender y  $(C_t(P), f_t)$  es un cu-blender.*
- (3)  *$P$  activa el cs-blender  $(C_t(Q), f_t)$  y  $Q$  activa el cu-blender  $(C_t(P), f_t)$ .*

De hecho, como es lo que nos interesa, vamos a suponer que  $f$  es parcialmente hiperbólico globalmente.

Voy a mostrar solo los dibujos que permiten rápidamente creerse este resultado. Mediante una buena elección de coordenadas, estamos en la situación mostrada por la figura 7.

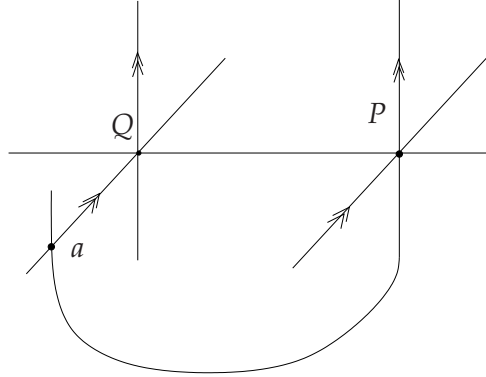


FIGURA 7. El ciclo con buenas coordenadas

Mirando con cuidado, es claro que para hacer valer las hipótesis (H1)-(H4) de cs-blender en un entorno de  $Q$  basta darle una pequeña expansión a  $Q$  en la dirección de  $Z$  (hacer una especie de norte-sur, con  $Q$  como norte y  $P$  como sur). Basta elegir un cubo que contenga  $Q$ ,  $a$  y no llegue hasta  $P$  (el cubo naturalmente va a ser suficientemente chato de forma de contener la variedad inestable fuerte aun lineal en ese entorno).

Para obtener también la hipótesis (H5) hay que notar que inicialmente no se cumple ya que de hecho la componente  $B$ , está completamente a la izquierda de  $W_{loc}^s(Q)$ . Por lo tanto, al tiempo que vamos dándole un valor propio mayor que uno a  $Q$  en la dirección de  $Z$ , también “corremos”, mediante una translación en la dirección  $Z$  el punto  $a$  hacia la derecha y elegimos el cubo con cuidado de forma de satisfacer (H5). Esto es simple, pero difícil de escribir al detalle. Algún día espero hacerlo (sobre todo porque no me conforma que en [BD] parecen hacerlo asumiendo hiperbolicidad parcial globalmente lo cual me parece que no es necesario).

**4.3. Caso Anosov por la identidad.** El caso que tengamos un Anosov (o un conjunto hiperbólico) por la identidad en el círculo, está contenido en la sección 4.1. El contexto ahora es de tener un conjunto hiperbólico  $\Lambda$  y considerarlo multiplicado por la identidad en una variedad  $N$ .

La idea no es tan diferente, lo único que lo que buscamos es una cadena de cs-blenders activados. Tenemos el Teorema siguiente:

**Teorema 4.2.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico no trivial de índice estable  $k$  de un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  y sea  $F = f \times id_N : M \times N \rightarrow M \times N$ . Entonces, existe  $\{F_t\}_{t \geq 0}$  tal que  $F_0 = F$  y se cumple que para todo  $t > 0$  tenemos:*

- (1) *Existen puntos periódicos  $P_0, \dots, P_{\dim N}$  de  $f$  y un punto  $P^N \in N$  tal que los puntos  $(P_i, P^N)$  son periódicos de  $F_t$  hiperbólicos de índice  $k + i$ .*
- (2) *Existen entornos  $C_t(i)$  de  $(P_i, P^N)$  tal que  $\{(C_t(i), F_t)\}_{i=0}^{\dim N-1}, (P_{\dim N}, P^N)\}$  es una cadena de cs-blenders.*

La prueba de esto es más o menos como sigue: Vamos a hacer las perturbaciones de forma de mantener invariantes las subvariedades  $N_i = \{P_i\} \times N$  con  $\{P_i\}_{i=0}^{\dim N}$  periódicos hiperbólicos (que suponemos fijos sin problema) dados por el hecho que  $\Lambda$  es no trivial y por lo tanto tiene infinitos puntos periódicos.

En cada una de esas variedades, ponemos un campo  $Z_i$  gradiente, de forma tal que en  $P^N \in N$  (punto cualquiera pero que fijamos de ahora en más) tenga una singularidad de índice (estable)  $\dim N - i$  y que el  $\dim N - i + 1$  valor propio sea mucho más chico que el resto de los mayores que uno y de forma tal que a medida que se agranda  $i$ , la estable del anterior queda contenida en la del siguiente.

Esto nos pone a los puntos  $(P_i, P^N)$  en la situación de que, por un lado, como  $P_i$  tiene un corte homoclinico transversal en  $M$  (por  $f$ ), está en las hipótesis de la sección 4.1 (una vez que tenes esa conexión, que se podría considerar, conexión “muy” fuerte, obviamente implica que tenes conexión fuerte) y podemos, moviendo un poco el punto de corte fuerte (que está lejos de  $P_i$  y del resto de los  $P_j$  con  $j \neq i$ ) crear para  $P_i$  un cs-blender que obviamente será del índice deseado. Ahora, el hecho de que los  $P_i$  estan todos homoclinicamente relacionados, nos da la cadena de blenders deseada (eso implica directamente la “activación” deseada).

## 5. TRANSITIVIDAD ROBUSTA

Vamos a ver como se utilizan los blenders para probar la transitividad robusta en dos ejemplos concretos. El tiempo uno de un flujo de Anosov y el producto de un Anosov por la identidad en otra variedad.

Recordamos que si  $f : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo tal que  $Df$  deja invariante una descomposición  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  en tres fibrados no triviales tal que los vectores en  $E^s$  son contraídos uniformemente por  $Df$ , los de  $E^u$  expandidos uniformemente y se cumple una condición de dominación

$$\|D_x f|_{E^s}\| < m(D_x f|_{E^c}) \leq \|D_x f|_{E^c}\| < \|D_x f|_{E^u}\| \quad m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$$

Decimos<sup>4</sup> entonces que  $f$  es *parcialmente hiperbólico*.

**5.1. Tiempo uno de Flujo de Anosov.** Sea  $f : M \rightarrow M$  el tiempo uno de un flujo de Anosov transitivo  $\varphi_t$ . Por lo tanto, tenemos que  $f$  es parcialmente hiperbólico con fibrado central de dimensión uno.

**Teorema 5.1.** *Existe una perturbación  $g$  de  $f$  (chica en la topología  $C^r$  con  $r$  la diferenciabilidad de  $f$ ) tal que  $g$  es  $C^1$ -robustamente transitivo.*

**DEMOSTRACIÓN.** Tenemos que existe una órbita periódica  $\gamma$  para  $\varphi_t$ , que por ser Anosov transitivo verifica que  $W^s(\gamma)$  y  $W^u(\gamma)$  son densas en  $M$ .

Mediante una pequeña perturbación  $\tilde{f}$ , podemos hacer que en  $\gamma$  tengamos un difeomorfismo Morse-Smale con dos órbitas periódicas, una atractora  $P$  y una repulsora  $Q$ .

Se verifica entonces que la variedad inestable de  $Q$  es densa en  $M$  mientras que la variedad estable de  $P$  es densa en  $M$ . Observar que [HPS] garantiza la estabilidad estructural de la foliación central (es decir, existe un homeo  $h : M \rightarrow M$  tal que manda centrales en centrales y se cumple que si  $\mathcal{F}$  es una hoja central, entonces,  $\tilde{f} \circ h(\mathcal{F}) = h \circ f(\mathcal{F})$ ) y por lo tanto, las variedades estables e inestables de las hojas centrales compactas serán siempre densas en la variedad.

Por otro lado, también podemos suponer (quizas, luego de otra perturbación  $g$ ) que tenemos un cs-blender en  $Q$  que es activado por la variedad inestable de  $P$  (ver sección 4.2) y esto implica,

<sup>4</sup>La definición no es ni la más general, ni la más standard, pero si es la más cómoda en nuestro contexto. Por más discusiones ver [BDV] apéndice, o [C] por ejemplo.

por la propiedad de los blenders, que  $\overline{W^s(Q)} \supset W^s(P)$  que es densa y por lo tanto, obtenemos densidad de ambas variedades invariantes de  $Q$ . Esto será robusto.

El  $\lambda$ -lemma ahora nos permite probar la transitividad de la siguiente manera. Sean  $U$  y  $V$  abiertos de  $M$ . Entonces, como  $W^s(Q)$  y  $W^u(Q)$  son densas, tenemos que  $W^s(Q) \cap U \neq \emptyset$  y  $W^u(Q) \cap V \neq \emptyset$ . Ahora, podemos considerar en  $U$  un disco transversal a  $W^s(Q)$  que luego de iterar se aproxima a  $W^u(Q)$  y por lo tanto, obtenemos que corta  $V$  para cierto iterado. Obtuvimos la existencia de  $n$  tal que  $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Por lo tanto, concluimos que la perturbación que construimos es robustamente transitiva.  $\square$

Observar que una vez que tenemos la transitividad, podemos mostrar que la clase homoclínica de  $Q$  es toda la variedad (no es necesariamente una consecuencia directa, ni de la transitividad robusta).

**Teorema 5.2.** *Se cumple que la clase homoclinica de  $Q$  es robustamente igual a  $M$ .*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos  $U$  un abierto de  $M$ . Como  $W^u(Q)$  es densa en  $M$ , tenemos que corta  $U$ .

Como es de dimensión adecuada, si saturamos  $W^u(Q) \cap U$  por estables en  $U$ , obtenemos un abierto. Por la transitividad, existe  $x$  cuya estable fuerte corta la inestable de  $Q$  tal que su orbita futura es densa. Sea  $y \in W_{loc}^{ss}(x) \cap U \cap W^u(Q)$ . Consideramos  $I$  un arco inestable fuerte por  $y$  que este contenido en  $U$ .

En particular, existen iterados arbitrariamente grandes de  $x$  que pasan por la región de activación del cs-blender de  $Q$ .

Sea  $n_j$  suficientemente grande que garantice que  $f^{n_j}(I)$  active el blender (notar que la orbita futura de  $y$  también va a ser densa!). Entonces, como la variedad inestable de  $Q$  es de una dimensión mayor que  $I$ , obtenemos que  $f^{n_j}(W^u(Q) \cap U)$  contiene una banda vertical que atraviesa el cs-blender de  $Q$  y por lo tanto, hay un punto homoclínico en  $f^{n_j}(W^u(Q) \cap U)$ . Por invariancia, concluimos.  $\square$

**5.2. Conjunto hiperbólico por la identidad en una variedad.** Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico no trivial para  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo  $C^r$  que verifica que tiene un entorno  $U_0$  tal que  $\Lambda = \bigcup_{n \geq 0} f^n(U_0)$ . Consideramos  $N$  una variedad compacta cualquiera y  $F : M \times N \rightarrow M \times N$  el difeomorfismo  $C^r$  dado por  $F(x, y) = (f(x), y)$ .

**Teorema 5.3.** *Existe una  $C^r$ -perturbación  $G$  de  $F$  que hace que  $G$  tenga un conjunto robustamente transitivo homeomorfo a  $\Lambda \times N$ . En particular, si  $f$  es un Anosov transitivo,  $G$  es robustamente transitivo y en particular, hay un punto cuya clase homoclinica coincide robustamente con todo el conjunto.*

Recordamos que un conjunto  $\Gamma$  es robustamente transitivo, si existe un entorno  $V$  de  $\Gamma$  tal que para toda perturbación del difeomorfismo, el maximal invariante en  $V$  es transitivo.

DEMOSTRACIÓN. Por [HPS] obtenemos que luego de perturbar, el maximal invariante en  $U_0 \times N$  es homeomorfo a  $\Lambda \times N$  por un homeomorfismo cercano a la inclusión.

Mediante una pequeña perturbación, podemos conseguir que si  $P_0, \dots, P_{\dim N}$  eran puntos periódicos de  $\Lambda$  (que suponemos fijos), y  $P^N$  es un punto dado de  $N$ , obtenemos que luego de una perturbación tenemos una cadena de cs-blenders del tipo  $\{(C_i, G), (P_{\dim N}, P^N)\}$ .

Lo importante es que se puede construir de forma tal que  $W^u((P_0, P^N))$  y  $W^s((P_{\dim N}, P^N))$  sean densas, y por lo tanto, por estar conectada la cadena de blenders, obtenemos que  $W^s((P_0, P^N))$  también es densa en el maximal invariante.

La topología de las variedades estables e inestables obliga en este caso a tener densidad de puntos homoclínicos de  $(P_0, P^N)$  en este caso (notar que si  $W_f^{ss}(P_0)$  y  $W_f^{uu}(P_0)$  son las variedades

estables e inestables por  $f$ , tenemos que  $\pi_1(W^s((P_0, P^n))) \sim W^s(P_0)$ , con  $\pi_1$  proyección en  $M$  y que  $W^u((P_0, P^n)) \sim W_f^u(P_0) \times N$  salvo algunas cosas de dimension menor en  $N$  correspondientes a las sillas y pozo de  $G|_{P_0 \times N}$ .

□

## REFERENCIAS

- [BD] C. Bonatti y L.J. Díaz, Persistence of transitive diffeomorphisms, *Annals of Math.*, **143** (1996), 357-396.
- [BD2] C. Bonatti y L. J. Díaz, Robust heterodimensional cycles and  $C^1$ -generic dynamics, *J. Inst. Math. Jussieu* (2008).
- [BD3] C. Bonatti y L. J. Díaz, Abundance of  $C^1$ -robust tangencies, *Preprint arXiv 0909.4062v1*
- [BDV] C. Bonatti, L. Diaz and M.Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A global gemoetric and probabilistic perspective*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **102**. Mathematical Physics III. Springer-Verlag (2005).
- [BV] C. Bonatti and M.Viana, SRB measures for partially hyperbolic diffeomorphisms whose central direction is mostly contracting. *Israel J. of Math* **115** (2000), 157–193.
- [C] S. Crovisier, Perturbation de la dynamique de difféomorphismes en topologie  $C^1$ , *Preprint arXiv:0912.2896* (2009)
- [HPS] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, Invariant Manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).
- [M] R. Mañé, Contributions to the stability conjecture, *Topology* **17** (1978), 383–396.
- [PS] E.R. Pujals y M. Sambarino, A sufficient condition for robustly minimal foliations, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **26** (2006) 281-289.
- [PS2] E.R. Pujals y M. Sambarino, Homoclinic Bifurcations, Dominated Splitting and Robust Transitivity, *Handbook of Dynamical Systems* Eds: B. Hasselblatt y A.Katok, Vol 1B (2006) Capítulo 4, p.327-378.
- [Sh] M. Shub, Topologically transitive diffeomorphisms of  $\mathbb{T}^4$ , *Lecture Notes in Math.*, **206**, Springer- Verlag (1971).

CMAT, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, URUGUAY

E-mail address: rpotrie@cmat.edu.uy