CLASE 1: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} \text{ tq } \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 dm < \infty \} / \sim \qquad f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ m-ctp.}$$

→ Es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

→ Admite un producto interno $\langle f, g \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} \, dm \Rightarrow \|f\|_2 = (\langle f, f \rangle)^{1/2}$

$\Rightarrow d_{L^2}(f, g) = \|f - g\|$

→ Es completo respecto a d_{L^2}. (lo vamos a ver después)

Para probar que el prod. interno está bien definido vamos a probar la bien conocida:

<u>Desigualdad de Cauchy-Schwartz</u>: $|\langle f, g \rangle_2| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. Igualdad $\Leftrightarrow$ f, g colineal

<u>dem</u>: Para $A, B \geq 0$ vale que $AB \leq \frac{A^2 + B^2}{2}$ (pues $(A-B)^2 \geq 0$), la igualdad se cumple si y solo si $A = B$.

Tenemos

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f \bar{g}| \, dm \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 \right) < \infty$$

Entonces la integral es absolutamente convergente (i.e. $f \bar{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$)

Ahora, si f o $g \equiv 0$, la desigualdad (igualdad) se cumple $\Rightarrow$ podemos suponer $f, g \neq 0$

Sea $\hat{f} = f / \|f\|_2$, $\hat{g} = g / \|g\|_2$, tenemos que $\|\hat{f}\|_2 = \|\hat{g}\|_2 = 1$.

Se cumple $|\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f} \bar{\hat{g}}| \, dm \leq 1 = \|\hat{f}\|_2 \|\hat{g}\|_2$

(la igualdad implica que $\hat{f} = \lambda \hat{g}$ para $|\lambda| = 1$)

Como $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2 = \frac{\langle f, g \rangle_2}{\|f\|_2 \|g\|_2}$ se concluye.

$\blacksquare$

<u>Espacios de Hilbert</u>: $\mathcal{H}$ es un <u>espacio de Hilbert</u> sii:

→ Es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

→ Tiene un <u>producto interno</u>, i.e. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$ tal que:

→ $f \mapsto \langle f,g\rangle$ es lineal $\forall g\in\mathcal{H}$.

→ $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$ $\forall f,g\in\mathcal{H}$.

→ $\langle f,f\rangle \geq 0$ y es 0 si y solo si $f\equiv 0$.

→ Es <u>completo</u> para la métrica inducida por $\|\cdot\| = (\langle\cdot,\cdot\rangle)^{1/2}$.

<u>Notas</u> (ejercicios): → Si hay f's tq $\langle f,f\rangle = 0$, forman un subespacio. Tomando el cociente se obtiene un producto interno.

→ Si no hay completitud, se puede tomar la <u>completación</u> que será un espacio de Hilbert.

Algunas propiedades (con las mismas demostraciones que en dimensión finita):

→ (Cauchy-Schwartz) $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$. Igualdad sólo si son colineales.

→ $\|f\| = (\langle f,f\rangle)^{1/2}$ es una norma.

→ (Ley Paralelogramo) $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2+\|g\|^2)$

→ (Prod. Interno de la norma) $\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\right) + \left[\frac{i}{4}\left(\|f+ig\| - \|f-ig\|\right)\right]$

→ (Pitagoras) Si $\langle f,g\rangle = 0 \Rightarrow \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

<u>Ortogonalidad</u>: Denotamos $f\perp g \Leftrightarrow \langle f,g\rangle = 0$.

Un conjunto $\{e_i\}_{i\in I}$ es un <u>conjunto ortonormal</u> si $\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$ $\forall i,j$.

Un conjunto $\{e_i\}_{i\in I}$ es una <u>base ortonormal</u> (bon) si es un conjunto ortonormal maximal (i.e. Si f cumple $\langle f,e_i\rangle = 0$ $\forall i\in I \Rightarrow f\equiv 0$)

<u>Prop</u> Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal.

<u>dem</u>: Aplicación del Lema de Zorn. Nota, hay que usar una forma de Gram-Schmidt.

Definimos $\mathrm{Span}(G) = \{ \sum_{x \in F} a_x x \ : \ F \subseteq G \text{ finito}, a_x \in \mathbb{K} \}$ para $G \subseteq \mathcal{H}$.

Se cumple:

Teorema: Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{e_i\}_{i \in I}$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

1) $\mathrm{Span}(\{e_i\}_{i\in I})$ es denso en $\mathcal{H}$.
2) $\{e_i\}$ es una base ortonormal.
3) (Identidad de Parseval) $\forall f \in \mathcal{H}$ vale que $\|f\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle f, e_i \rangle|^2$
4) $\forall f \in \mathcal{H}$ se cumple que $f = \sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i$

dem: [1) $\Rightarrow$ 2)] Sea $f \in \mathcal{H}$ tq $\langle f, e_i \rangle = 0 \ \forall i \in I$ y $\varepsilon > 0$

Entonces, si $g \in \mathrm{Span}(\{e_i\})$ tq $\|f-g\| < \varepsilon$ tenemos que como $f \perp g$ vale que $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle f-g, f \rangle + \underset{\overset{\|}{0}}{\langle g, f \rangle} = \langle f-g, f \rangle \underset{CS}{\leq} \|f-g\|\|f\| < \varepsilon \|f\|$

$\Rightarrow \|f\| < \varepsilon \ \forall \varepsilon \Rightarrow f = 0$.

[2) $\Rightarrow$ 3) y 4)] Para $F \subseteq I$ finito definimos $S_F(f) = \sum_{i \in F} \langle f, e_i \rangle e_i$

Se cumple que $(f - S_F(f)) \perp S_F(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pitagoras.}}}{\Longrightarrow} \|f\|^2 = \|f - S_F(f)\|^2 + \|S_F(f)\|^2$.

Obtenemos que $\forall F \subseteq I$ finito vale que $\|S_F(f)\|^2 \leq \|f\|^2$ (Desigualdad de Bessel) y se cumple que $\|S_F(f)\|^2 = \sum_{i \in F} |\langle f, e_i \rangle|^2$.

Esto implica que hay a lo sumo numerables $i \in I$ tq $\langle f, e_i \rangle \neq 0$.

Ordenamos los i y obtenemos que si $S_N(f) = \sum_{j=1}^{N} \langle f, e_{i_j} \rangle e_{i_j}$ vale que

$\|S_M(f) - S_N(f)\|^2 \leq \sum_{j=N}^{M} |\langle f, e_{i_j} \rangle|^2 \xrightarrow[N,M]{} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{completitud}}}{\Longrightarrow} \exists g \in \mathcal{H}$ tq $S_N(f) \to g$.

Fijado $j>0$ tenemos que para N suf. grande vale que

$$\langle f - S_N(f), e_j \rangle = 0 \implies \langle f - g, e_j \rangle = 0 \quad \forall j$$

Por 2) obtenemos $f = g$ mostrando 4) (Usando $\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2$ obtenemos tb 3)).

[3) ⇒ 1)] Como $\|S_N(f)\|^2 \to \|f\|^2$ Obtenemos $\|f - S_N(f)\|^2 \to 0$

y como $S_N(f) \in \operatorname{span}(\{e_i\})$ obtenemos 1). ∎

Sea $L^2(X, \mathcal{Q}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{K} : \int_X |f|^2 d\mu \} / \sim$

Denotamos $\ell^2(X) = L^2(X, \mathcal{P}(X), \text{conteo})$

El teorema anterior implica que todo espacio de Hilbert es $\ell^2(X)$ para algún X.

CLASE 2.

Lema $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert, $S \subseteq \mathcal{H}$ subespacio cerrado y $f \in \mathcal{H}$
Entonces: (i) $\exists$ un único $g_0 \in S$ tq $\|f-g_0\| = \inf_{g\in S} \|f-g\|$

(ii) $f-g_0$ es perpendicular a S (i.e. $\forall g \in S$ tenemos $\langle f-g_0, g\rangle = 0$)

dem: Si $f \in S$, tomando $g_0 = f$ todo queda probado $\Rightarrow$ podemos suponer $f \notin S$.

Sea $d = \inf_{g\in S} \|f-g\|$ y sea $g_n \in S$ sucesión tq $\|f-g_n\| \to d$.

Af: $\{g_n\}$ es de Cauchy.
dem: $A_n = f-g_n$ y aplicamos ley de Paralelogramo a A_n, A_m

$$\Rightarrow \|A_n + A_m\|^2 + \|A_n - A_m\|^2 = 2(\|A_n\|^2 + \|A_m\|^2)$$

$$\|2f - (g_n+g_m)\|^2 + \|g_n - g_m\|^2 = 2(\|f-g_n\|^2 + \|f-g_m\|^2)$$

$$\|g_n - g_m\|^2 = 2(\|f-g_n\|^2 + \|f-g_m\|^2) - 4\left\|f - \frac{(g_n+g_m)}{2}\right\|^2$$

Como $\frac{1}{2}(g_n+g_m) \in S \Rightarrow \left\|f - \frac{(g_n+g_m)}{2}\right\| \geq d$

$$\Rightarrow \|g_n - g_m\|^2 \leq 2(\|f-g_n\|^2 + \|f-g_m\|^2) - 4d^2$$

Como $\|f-g_n\|^2 \to d^2$ tenemos $\|g_n - g_m\| \to 0$ como queríamos. $\boxtimes$

Sea $g_0 = \lim g_n$ (que existe pues $\mathcal{H}$ es de Hilbert), vale que $g_0 \in S$ pues S cerrado

Como $g_0 \in S$ tenemos $\|f-g_0\| \geq d$
Además,

$$\|f-g_0\| \leq \|f-g_n\| + \|g_n - g_0\| \quad \forall n \Rightarrow \|f-g_n\| \leq d$$

Queremos probar que si $g \in S$ tenemos $(f-g_0) \perp g$

Consideramos $g_\varepsilon = g_0 + \varepsilon g$ con $\varepsilon \in \mathbb{C}$.

Se cumple $\|f-g_\varepsilon\|^2 \geq \|f-g_0\|^2 \quad \forall \varepsilon$.

Denotamos $A = \langle f-g_0, g \rangle$

$$\langle f-g_\varepsilon, f-g_\varepsilon \rangle = \|f-g_0\|^2 + |\varepsilon|^2 \|g\|^2 - \langle f-g_0, \varepsilon g\rangle - \langle \varepsilon g, f-g_0 \rangle$$

$$= \|f-g_0\|^2 + |\varepsilon|^2\|g\|^2 - \bar{\varepsilon} A - \varepsilon \bar{A}$$

Deducimos $|\varepsilon|^2 \|g\|^2 - \bar{\varepsilon} A - \varepsilon \bar{A} \geq 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{C}$.

Considerando $\varepsilon \in \mathbb{R}$ obtenemos $\varepsilon^2 \|g\|^2 - \cancel{4}\varepsilon\, \mathrm{Re}(A) \geq 0 \quad \forall \varepsilon$

Esto implica $\mathrm{Re}(A) = 0$.

Con $\varepsilon \in i\mathbb{R} \Longrightarrow \mathrm{Im}(A) = 0$ como queríamos.

Falta ver la unicidad: Sea $\tilde{g}_0 \in S$ tq $\|f-g_0\| = \|f-\tilde{g}_0\|$

Como $\tilde{g}_0 - g_0 \in S$ tenemos $(f-g_0) \perp (\tilde{g}_0 - g_0) \underset{\text{Pitagoras}}{\Longrightarrow} \|f-\tilde{g}_0\|^2 = \|f-g_0\|^2 + \|\tilde{g}_0 - g_0\|^2$

$\Rightarrow \|\tilde{g}_0 - g_0\| = 0$ mostrando la unicidad.

Sea $S \subseteq H$ un subespacio (no necesariamente cerrado), podemos definir

$S^\perp = \{ f \in H \text{ tq } \langle f, g\rangle = 0 \ \ \forall g \in S \}$

Tenemos que $S^\perp$ es un subespacio y $S \cap S^\perp = \{0\}$

Además, $S^\perp$ es cerrado: Si $f_n \to f$ y $f_n \in S^\perp \Rightarrow \forall g \in S$ se cumple que

$$|\langle f, g\rangle| = |\langle f-f_n, g\rangle + \underbrace{\langle f_n, g\rangle}_{=0}| = |\langle f-f_n, g\rangle| \leq \|g\|\,\|f-f_n\| \to 0.$$

Si S es cerrado obtenemos que $\mathcal{H} = S \oplus S^{\perp}$ (todo vector se escribe de forma única como suma de uno en cada uno)

Esto es pues para $f \in \mathcal{H}$ $\exists g_0 \in S$ tq $f - g_0 \in S^{\perp}$ y g_0 es único.

Definimos $P_S : \mathcal{H} \to S$ como $P_S(f) = g_0$ (proyección ortogonal)

Cumple: $\to$ $f \mapsto P_S(f)$ es lineal (por unicidad sale)
$\to$ $P_S(f) = f$ si $f \in S$ (en particular $P_S \circ P_S = P_S$)
$\to$ $P_S(f) = 0$ si $f \in S^{\perp}$
$\to$ $\|P_S(f)\| \leq \|f\|$ (Pitagoras)

<u>Nota</u>: Si S no es cerrado, se cumple que $(S^{\perp})^{\perp} = \overline{S}$ (ejercicio)

<u>Prop</u> Sea $\{e_i\}_{i \in F}$ conjunto ortonormal finito $\Rightarrow$ $S = \operatorname{span}\{e_i\}$ es cerrado (más en general, todo subespacio de dimensión finita es cerrado)

<u>dem</u>: Las normas en un e.vectorial de dimensión finita son todas equivalentes $\Rightarrow$ S es completo $\Rightarrow$ cerrado.

$\blacksquare$

<u>Corolario</u> Un espacio de Hilbert tiene dimensión algebraica finita o no numerable.

<u>Def</u>: La dimensión algebraica es el cardinal de un conjunto l.i. maximal (base algebraica) que está bien definido (Ejercicio).

<u>dem</u> (Corolario)

Supongamos $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es base algebraica $\Rightarrow$

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{span}(\{e_i\}_{i=1}^{n}),$$ con lo cual $\mathcal{H}$ es unión creciente de subespacios cerrados. Como $\mathcal{H}$ es completo, por Baire vale que $\exists n_0$ tal que $\operatorname{span}\{e_i\}_{i=1}^{n}$ tiene interior

$\Rightarrow$ $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{e_i\}_{i}^{M}$ (un subespacio con interior es todo)

Notar que si $\{e_i\}_{i\in F}$ conj. to ortonormal finito y $S = \text{span}\{e_i\}$ tenemos que $P_S(f) = S_F(f) = \sum_{i\in F}\langle f, e_i\rangle e_i$ (por unicidad).

Funcionales lineales:

$\mathcal{H}' = \{\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{K} \text{ lineal}\}$ ← se llama el dual algebraico.

Nos interesa $\mathcal{H}^* = \{\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{K} \text{ lineal y continua}\}$

Definimos $\|\varphi\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|\varphi v\|}{\|v\|}$ está bien definido pues φ es continua.
(entonces, $\exists \delta > 0$ tq $\varphi(B(0,\delta)) \subseteq [-1,1]$
$\Rightarrow \|\varphi\| \leq 1/\delta$)

No vamos a probar por ahora que es una norma pq no lo vamos a usar.

Obs. Si $\dim \mathcal{H} < \infty$ (i.e $\mathcal{H} \cong \mathbb{K}^d$) $\Rightarrow$ todo funcional lineal es continuo (acotar en 1 base y usar desigualdad triangular)
• En $\dim \mathcal{H} = \infty$ si creemos el Axioma de eleccion nunca vale $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^*$.

Ejemplo: • Sea $\varphi : C^0([0,1], \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tq $\varphi(f) = f(0)$.
Ahora ponemos $C^0([0,1],\mathbb{K}) \subseteq L^2([0,1], m)$
Tenemos que φ no es continua ($\exists f_n$ continuas tq $f_n(0) = 1$ y $\|f_n\|_2 \to 0$)

Otro ejemplo relevante: $\varphi_g : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ tq $\varphi_g(f) = \langle f, g\rangle$ es continuo

$$\left(\varphi_g(f_n) = \langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle = \varphi_g(f) \text{ si } f_n \to f \text{ por C-S} \right)$$

Teorema (Representación de Riesz) $\forall \varphi \in \mathcal{H}^*$ $\exists g \in \mathcal{H}$ tq $\varphi = \varphi_g$ y $\|\varphi\| = \|g\|$.
dem: $S = \ker\varphi$ es cerrado pues φ es continua. Si $S = \mathcal{H} \Rightarrow \varphi, g = 0$ anda.
Si no $S^\perp \neq \{0\}$ es de dimensión 1 (teo de las dimensiones) y consideramos $h \in S^\perp$ de norma 1. Haciendo cuentas se ve que $g = \overline{\varphi(h)}\, h$ funciona.

CLASE 3: Espacios L^p.

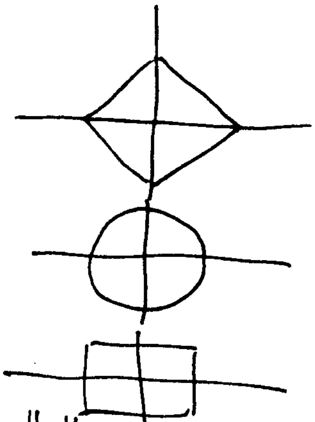
Sea $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ espacio de medida

$$L^p(X,\mathcal{Q},\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K} \ / \ \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\} \Big/ \sim \qquad f \sim g \text{ si } f = g \ \mu\text{-ctp.}$$

Definimos $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ con $p > 0$.

En dimensión finita (i.e. $X = \{1, \ldots, d\}$ y $\mu(i) = 1$) tenemos $\mathbb{K}^d$ con $\|(x_1, \ldots, x_d)\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_d|^p)^{1/p}$

En $\mathbb{R}^2$, los que tienen norma uno son: $p = 1$, $p = 2$, "$p = \infty$"



Queremos ver que $L^p(X,\mathcal{Q},\mu)$ es un e.v. y que $\| \ \|_p$ es una norma.
(notar que si $p<1$ no es norma)

Teorema (Hölder) Sea $p > 1$ y $f \in L^p(X,\mathcal{Q},\mu)$, $g \in L^q(X,\mathcal{Q},\mu)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Entonces, $fg \in L^1(X,\mathcal{Q},\mu)$ y se cumple:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (\text{igualdad} \Rightarrow \text{colineales?})$$

Notar que si $p = 2 = q$ es Cauchy-Schwartz.

dem: Primero vemos que si $a, b \geq 0 \Rightarrow a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta) b \quad \forall\, 0 < \theta < 1$.
De hecho, podemos suponer $b \neq 0$ (sino es obvio)
Entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^\theta \leq \theta\left(\frac{a}{b}\right) + (1-\theta) \Rightarrow$ basta mostrar que $\varphi(x) = x^\theta - \theta x + (1-\theta)$
$\leq 0 \ \forall x \geq 0$.

Haciendo la derivada tenemos $\varphi'(x) = \theta(x^{\theta-1} - 1) \to$ positiva si $x \in (0,1)$
$\to$ negativa si $x > 1$

$\Rightarrow \varphi$ tiene máximo en $x = 1$ y $\varphi(1) = 0$.

Tomamos f, g y tenemos:

$\theta = 1/p$ (igualdad si $|f|^p$ colineal con $|g|^q$)

$$\int_X |fg| d\mu = \int_X (|f|^p)^{1/p} (|g|^q)^{1/q} d\mu \leq \frac{1}{p}\int_X |f|^p + \frac{1}{q}\int_X |g|^q < \infty \quad (*)$$

$\Rightarrow fg \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

Ahora, si $\|g\|_q = 0$ o $\|f\|_p = 0$ la desigualdad es obvia.

Si no, podemos asumir que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ y usando $(*)$ tenemos el resultado. $\blacksquare$

Ahora podemos probar que $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ es espacio vectorial y $\| \ \|_p$ una norma.

<u>Teorema</u> (Minkowski) $1 \leq p < \infty$, $f, g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow f+g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ y se cumple $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

<u>dem</u>: $p = 1$ es fácil (ejercicio)

Si $p > 1$, primero vamos a ver que $f+g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_{X_1 = \{x / |f(x)| \geq |g(x)|\}} |f+g|^p d\mu + \int_{X_2 = \{|g(x)| \geq |f(x)|\}} |f+g|^p d\mu \leq$$

$$\leq \int_{X_1} (|f|+|g|)^p d\mu + \int_{X_2} (|f|+|g|)^p \leq \int_{X_1} (2|f|)^p d\mu + \int_{X_2} (2|g|)^p d\mu$$

$$\leq 2^p \left(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu \right) < \infty.$$

Ahora, notemos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ implica: $\to 1 + \frac{p}{q} = p$

$\to (p-1)q = p$

Como $|f+g|^p$ es integrable tenemos que $|f+g|^{p-1} \in L^q(X,\mathcal{Q},\mu)$

Por otro lado $|f+g|^p \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$

Aplicando Hölder obtenemos:

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \leq \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q$$

Ahora usamos que $\|(f+g)^{p-1}\|_q = \|f+g\|_p^{p/q}$ $\left(\left(\int (|f+g|^{p-1})^q \right)^{1/q} = \left(\int |f+g|^p \right)^{1/q} \right)$

$\Rightarrow \quad \|f+g\|_p^{(p-\frac{p}{q})} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ como queríamos. $\boxtimes$

Ahora vamos a ver que $L^p(X,\mathcal{Q},\mu)$ es completo.

<u>Teorema</u> $L^p(X,\mathcal{Q},\mu)$ es completo con $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$.

<u>dem</u>: Sea $\{f_n\}$ sucesión de Cauchy. Alcanza ver que tiene subsucesión convergente.

Podemos suponer que $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$ (tomando subsucesión).

Sea $\tilde{S}_N(x) = |f_0(x)| + \sum_{i=0}^{N-1} |f_{i+1}(x) - f_i(x)|$ sucesión monótona.

$\|\tilde{S}_N\|_p \underset{\text{Mink.}}{\leq} \|f_0\|_p + \sum_{i=0}^{N-1} \|f_{i+1} - f_i\|_p < K < \infty$

Como $\tilde{S}_N$ es creciente tenemos $\tilde{S}_N(x) \to G(x) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ y por el teorema de convergencia monótona sabemos que $G \in L^p(X,\mathcal{Q},\mu)$ pues $\int |G|^p d\mu = \lim \int |\tilde{S}_N(x)|^p d\mu < K^{1/p} < \infty$.

Entonces G es finita c.t.p. con lo cual $f(x) = \lim_{N\to+\infty} S_N(x)$ esta bien def μ-ctp con $S_N(x) = f_0(x) + \sum^{N-1} f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Tenemos $|f(x)| \leq |G(x)| \Rightarrow f \in L^p$

Además $|f(x)-S_N(x)|^p \leq (2G(x))^p \; \forall x \Rightarrow$ por el Teorema de Convergencia Dominada tenemos

$$\int |f(x)-S_N(x)|^p \longrightarrow 0$$ con N probando la

completitud.

$\blacksquare$

Caso $p=\infty$:

$$L^\infty(X,\mathcal{Q},\mu)=\{ f: X\to \mathbb{K} \text{ tq } \exists M>0 \text{ con } \mu(\{x / |f(x)|>M\})=0\}/_\sim$$

Para $f\in L^\infty(X,\mathcal{Q},\mu)$ definimos $\|f\|_\infty = \inf\{M \text{ tq } \mu(\{x/|f(x)|>M\})=0\}$.

Teorema: L^∞ es un espacio vectorial y $\| \; \|_\infty$ es una norma que lo hace completo.

dem: Que es e.v. es fácil por desigualdad triangular usual. Lo mismo va para que $\| \; \|_\infty$ es norma.

Para ver que es completo notar que ser de Cauchy en $\| \; \|_\infty$ implica que es "uniformemente" de Cauchy en cada punto $\Rightarrow$ Tenemos candidato y convergencia. $\blacksquare$

Obs (Hölder) Si $f\in L^1$ y $g\in L^\infty \Rightarrow fg\in L^1$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$
(esto es trivial)

Prop: Sea $f\in L^\infty(X,\mathcal{Q},\mu)$ soportada en un conjunto de medida finita $\Rightarrow \|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

dem: Ejercicio (ver Prop 2.2 del Capítulo 1 del libro). $\blacksquare$

Otras observaciones: $\rightarrow$ Si $\mu(X)=1 \Rightarrow$ para $p_0\leq p_1$ vale $L^{p_1}\subseteq L^{p_0}$ y $\|f\|_{p_0} \leq \|f\|_{p_1}$.

$\rightarrow$ Si $X=\mathbb{Z}$ con medida de conteo y $p_0\leq p_1 \Rightarrow \ell^{p_0}\subseteq \ell^{p_1}$ y $\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_0}$

CLASE 4: ESPACIOS DE BANACH.

Def: Un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es un espacio de Banach si:

$\rightarrow \exists \|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tq:
- $\rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x \in X.$
- $\rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X.$
- $\rightarrow \|x\| \geq 0$ y es $= 0 \iff x = 0.$

$\rightarrow$ X es completo para $d(x,y) = \|x-y\|$.

(Un espacio X es normado si cumple la primera cosa nomás)

Sean X, Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal.

Def: Decimos que T es acotado si $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < \infty$ (alcanza $\|x\| \leq 1$ y $\sup \|Tx\| < \infty$)

Proposición: T es acotado $\iff$ es continuo en 0 $\iff$ es uniformemente continuo.

dem: Si T es acotado $\Rightarrow$ sea $K = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ y $\varepsilon > 0$.

Tomando $\delta < \varepsilon/K$ tenemos que $T(B_X(0,\delta)) \subseteq B_Y(0,\varepsilon) \Rightarrow T$ es continuo en 0.

Ahora, dado $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ tomando $\delta < \varepsilon/K$ de nuevo tenemos que si $\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x-x_0)\|_Y \leq K\delta < \varepsilon$
$\Rightarrow T$ es uniformemente continuo.

Por otro lado, si T es continuo en 0, fijando $\varepsilon = 1$ tenemos que $\exists \delta > 0$ tq $T(B_X(0,\delta)) \subseteq B_Y(0,1) \Rightarrow \forall x$ con $\|x\|_X < \delta$ tenemos $\|Tx\|_Y \leq 1$ con lo cual

$$\sup \frac{\|Tx\|}{} \leq 1/$$

Sean X, Y espacios normados entonces podemos definir

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ tal que } \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty\}$$ que es un e.v.

La norma $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$ es una norma (por la triangular para $\| \|_X$)

Tenemos que:

<u>Prop</u>: Si Y es de Banach $\Rightarrow$ $\mathcal{B}(X,Y)$ es de Banach.

<u>dem</u>: Sea T_n tq $\|T_n - T_m\| \to 0$ con n,m.

Podemos definir entonces $T(x) = \lim T_n(x)$ pues $\{T_n(x)\}$ es de Cauchy en Y que es de Banach.

Es fácil ver que T es lineal pues T_n son lineales y si $\|T_n\| \leq K$ $\Rightarrow \|T\| \leq K$ con lo cual $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Hay que mostrar que $\|T - T_n\| \to 0$ con n.

Para eso, fijamos $\varepsilon > 0$ y consideramos $N > 0$ tq $\|T_n - T_m\| < \varepsilon/2$ $\forall n,m > N$

Fijado $x \in X$ tenemos que si $n > N$ $\Rightarrow$

$$\|(T - T_n)x\|_Y \leq \|(T - T_m)x\|_Y + \|(T_n - T_m)x\|_Y \qquad \forall m > N$$

Sea m grande tal que $\|(T - T_m)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\|$

Obtenemos $\|(T - T_n)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|$ como queríamos.

$\blacksquare$

Podemos definir en particular $X^* = B(X, \mathbb{K})$ que llamamos <u>dual</u> de X

Notar que V^* es de Banach aunque X no lo sea.

Sirve definir $X' = \{\varphi : X \to \mathbb{K} \text{ lineal}\}$ que llamamos <u>dual algebraico</u>

<u>Prop</u> Sea $\varphi : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo $\Rightarrow$ los siguientes son equivalentes:

(i) $\operatorname{Ker}\varphi$ es cerrado

(ii) φ es continuo

(iii) $\operatorname{Ker}\varphi$ no es denso

<u>Dem</u>: (ii) $\Rightarrow$ (i) y (i) $\Rightarrow$ (iii) son obvias.

Para ver (iii) $\Rightarrow$ (ii) Sea $x_0 \in X$ tq $\varphi(x) \neq 0 \; \forall\, x \in B(x_0, \delta)$

Entonces $\forall\, y \in X$ tq $\|y\| < \delta$ tenemos $\varphi(y) \neq -\varphi(x_0)$
(si no tomando $x = y + x_0$ tenemos $x \in B(x_0, \delta)$ tq $\varphi(x) = 0$)

Afirmamos que esto implica que $\|\varphi\| < \dfrac{|\varphi(x_0)|}{\delta}$

De hecho, sea $y \in B(0, \delta)$ tq $|\varphi(y)| > |\varphi(x_0)| \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$ y $\lambda\varphi(y) = -\varphi(x_0)$

$\Rightarrow \lambda y \in B(0, \delta)$ y $\varphi(\lambda y) = -\varphi(x_0)$ lo cual es absurdo. $\blacksquare$

<u>Corolario</u>: Los subespacios de codimension uno son cerrados o densos.

<u>Ejemplos</u> $X = C^1([0,1])$ con norma del supremo $\Rightarrow \varphi : X \to \mathbb{K}$ tal que $\varphi(f) = f'(0)$ no es continuo. Se puede ver a mano que el nucleo es denso.

<u>Pregunta</u>: Por qué el dual de un espacio de Banach es no vacío?

Vamos a responder esta pregunta con el teorema de Hahn-Banach, pero de mientras vamos a ver algunos duales.

<u>Teorema</u>: Si $p \geq 1 \Rightarrow (L^p)^* = L^q$ donde $q = \infty$ si $p = 1$ o q es tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $p > 1$.

(Nota: El ~~Te~~ Teo de Riez dice que si H es de Hilbert $\Rightarrow H^* \simeq H$).

- Es falso que $(L^\infty)^* = L^1$! eso lo vamos a ver después.

Caso ℓ^p:

Idea: Dado $y \in \ell^q$ definimos $\varphi_y : \ell^p \to \mathbb{R}$ tq $\varphi_y(x) = \sum x_n y_n$ lineal y continua por Hölder. Además $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_q$

Si $\Phi : \ell^q \to (\ell^p)^*$ es tq $\Phi(y) = \varphi_y$ es lineal y continua.

Hay que ver: ① $\|\varphi_y\| = \|y\|_q$ (inyectividad es cons)

② Φ es sobreyectiva.

1) Hay que encontrar la sucesión correcta. Tenemos $x_n = \text{signo}(y_n)|y_n|^{q-1}$ funciona.

2) Si $\varphi \in (\ell^p)^*$ definimos $y_n = \varphi(e_n)$. Si probamos que $\{y_n\} \in \ell^q$ estamos pues $\varphi = \varphi_y$ en un denso.

Hay que usar un "Recíproco de Hölder".

<u>Recíproco Hölder</u>: Sean p, q tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y g medible tq $fg \in L^1(X, \mu)$ $\forall f \in L^p$ y se cumple que $M_q(g) = \sup\{\|fg\|_1 : \|f\|_p = 1\} < \infty$
$\Rightarrow g \in L^q$ y $\|g\|_q = M_q(g)$.

<u>dem</u>: $(q < \infty)$ Sea $E_n \subseteq E_{n+1}$ tq $X = \bigcup E_n$ y $\mu(E_n) < \infty$
φ_n funciones simples tq $\varphi_n \to g$ μ-ctp y $|\varphi_n| \leq |g|$ $\forall n$

Consideramos $g_n = \varphi_n \chi_{E_n}$ se cumple: $\rightarrow g_n \rightarrow g$ μ-ctp
$\rightarrow |g_n| \leq |g|$
$\rightarrow g_n \in L^p$ y L^q

Sea $f_n = \|g_n\|_q^{1-q} |g_n|^{q-1} \operatorname{sgn}(g_n) \leftarrow$ (complejo si necesario)

Entonces $\|f_n\|_p = 1$ y aplicando Fatou tenemos:

$$\|g\|_q \leq \liminf \|g_n\|_q = \liminf \int f_n g_n \leq M_q(g)$$

$\Rightarrow g \in L^q$ y por Hölder tenemos $M_q(g) \leq \|g\|_q \leq M_q(g)$ ☒

<u>Minkowski para integrales</u> Sea f medible y positiva de $X_1 \times X_2$ y $1 \leq p \leq \infty$

$$\Rightarrow \left\| \int f(x_1,x_2)\, d\mu_2 \right\|_{L^p(X_1)} \leq \int \|f(x_1,x_2)\|_{L^p(X_1)}\, d\mu_2$$

<u>dem</u>: $p=1,\infty$ facil. ($p=1$ es Tonelli)

Dado $g \in L^q$ con $\|g\|_q = 1$ tenemos

$$\int \left[\int f(x_1,x_2)\, d\mu_2\right] |g(x_1)|\, d\mu_1 \overset{\text{Tonelli}}{=} \iint f(x_1,x_2)|g(x_1)|\, d\mu_1 \times d\mu_2$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \int \|f(x_1,x_2)\|_{L^p} \cdot \|g\|_q\, d\mu_2$$

Por el converso de Hölder aplicado a $F(x_1) = \int f(x_1,x_2)\, d\mu_2$

tenemos $\|F\|_{L^p(X^1)} \leq \int \|f(x_1,x_2)\|_{L^p(X^1)}\, d\mu_2$.

Se puede generalizar...

☒

CLASE 5: DUALES

Observación: Si $X \subseteq Y$ subespacio $\Rightarrow Y^* \subseteq X^*$ ya que si $\varphi: Y \to \mathbb{K}$ es lineal y continuo $\Rightarrow \varphi|_X$ tb lo será.
Sin embargo, funcionales diferentes de Y pueden restringir al mismo.

Ejercicio: Pensar en la observación aplicada a: $\mathbb{K}^d$, ℓ^p, $L^p([0,1])$, etc...

Vamos a demostrar:

Teorema (Riesz) Si X es un e.m. compacto $\Rightarrow (C^0(X))^* \cong \mathcal{M}(X)$.

Aca denotamos $\mathcal{M}(X)$ como el e.v. de las medidas signadas (si $C^0(X)$ es de funcionales reales) o complejas (en el otro caso) de variación total finita.
Una de las importancias del Teorema es que ambos espacios aparecen naturalmente y ambos son a priori no relacionados.

Sea X un e.m. compacto y $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel. Vamos a trabajar en $\mathbb{R}$.
Definimos

$$\mathcal{M}(X) = \{ \mu \text{ medida (signada) de Borel en } X \text{ con } |\mu|(X) < \infty \}$$

Recordar que toda medida signada $\mu = \mu^+ - \mu^-$ donde μ^+ y μ^- son medidas positivas y $\mu^+ \perp \mu^-$ (i.e. $\exists C^+, C^-$ tq $C^+ \cup C^- = X$ y $\mu^+(C^-)=0, \mu^-(C^+)=0$)
Definimos $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ que es una medida positiva.

Prop $\mathcal{M}(X)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\|\mu\| = |\mu|(X)$ es una norma.

dem: Es obvio que es un $\mathbb{R}$-e.v. y que las ctes salen de la norma tb.
La desigualdad triangular se deduce de que $\mu^+ + \nu^+ \geq (\mu+\nu)^+$. (ejercicio). $\boxtimes$

Lo mismo se puede hacer para medidas complejas, pero no agrega ideas y embarra la notación.

$C^0(X) = \{ f: X \to \mathbb{R} \text{ continua} \}$ con $\|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in X \}$
Es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y es fácil ver que es de Banach.
Un corolario del Teo de Riesz va a ser que $\mathcal{M}(X)$ tb es de Banach.

Vamos a usar las siguientes propiedades de $C^0(X)$:

[Proposición: Si $A, B \subseteq X$ son cerrados disjuntos $\Rightarrow \exists f \in C^0(X)$ tq $f|_A = 1$, $f|_B = 0$ y $0 \leq f \leq 1$.

dem: $f(x) = \dfrac{d(x,B)}{d(x,B) + d(x,A)}$. ▨

[Partición de la unidad: Sean $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ abiertos de X y $f \in C^0(X)$ tal que $\text{sop}(f) = \{x \text{ tq } f(x) \neq 0\} \subseteq U = \bigcup_{i=1} U_i$. Entonces $\exists\, i_1, \ldots, i_k$ y funciones $\eta_{i_j} : X \to [0,1]$ con $\text{sop}(\eta_{i_j}) \subseteq U_{i_j}$ tal que $f = \sum_{j=1}^{k} \eta_{i_j} f$.]

dem: Igual que en Cálculo 3. ▨

Consideramos $\Phi : \mathcal{M}(X) \to (C^0(X))^*$ dada por $\Phi(\mu) = \varphi_\mu$

donde $\varphi_\mu(f) = \int f \, d\mu$. Notar que $|\varphi_\mu(f)| \leq |\mu|(X) \cdot \|f\|$

Con lo cual, además de ser Φ lineal, se cumple: $\to \varphi_\mu \in (C^0(X))^* \ \forall \mu \in \mathcal{M}$
$\to \| \Phi(\mu) \| \leq \|\mu\|$.

El Teorema de Riesz es entonces consecuencia de:

[Teorema: Φ es un isomorfismo isométrico (i.e: Φ es sobreyectivo y $\|\Phi(\mu)\| = \|\mu\|$ $\forall \mu$)

[Nota: Si consideramos $C^1(M)$ con topología C^1 en $C^0(X)$ tenemos que las medidas tb son funcionales continuos (la top. es más fuerte) pero aparecen nuevos funcionales.

dem: Vamos a mostrar primero que $\|\Phi(\mu)\| = \|\varphi_\mu\| = \|\mu\|$.

Sean C^+ y C^- tal que $X = C^+ \cup C^-$ y $\mu^+(C^-) = \mu^-(C^+) = 0$

Consideramos compactos A_n, B_n tq $A_n \subseteq C^+$, $B_n \subseteq C^-$ y tal que $\mu^+(X \setminus A_n) < 1/m$ y $\mu^-(X\setminus B_n) < 1/m$.

Podemos considerar $f_n \in C^0(X)$ tq $-1 \leq f \leq 1$ y $f|_{A_n} = 1$ $f|_{B_n} = -1$ (en part $\|f_n\| = 1$).

$$\int f_n d\mu = \int f_n d\mu^+ - \int f_n d\mu^- \geq \left[\mu^+(A_n) - \frac{1}{m}\right] + \left[\mu^-(B_n) - 1/m\right]$$
$$\geq \mu^+(X) + \mu^-(X) - \frac{4}{m} \longrightarrow |\mu|(X)$$

Por otro lado $|\varphi_\mu(f)| \leq |\mu|(X)$ $\forall f$ con $\|f\| \leq 1$.

Queremos ahora mostrar la sobreyectividad. Sea $\varphi \in (C^0(X))^*$, queremos construir $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tq $\varphi(f) = \int f d\mu$.
Lo partiremos en dos Lemas que completan la prueba.

Lema 1: $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ donde φ^+ y φ^- son positivos (i.e. $\varphi^\pm(f) \geq 0$ $\forall f: X \to [0,+\infty)$ continua)
Además, $\|\varphi\| = \varphi^+(1) + \varphi^-(1)$.

Lema 2: Sea φ una funcional lineal positiva $\Rightarrow \exists \mu$ positiva finita tq $\varphi(f) = \int f d\mu$

dem Lema 1: Para $f \geq 0$ continua definimos $\varphi^+(f) = \sup\{\varphi(g) : 0 \leq g \leq f\}$

Veamos que φ^+ es lineal en las positivas: $\rightarrow$ Multiplicar por cte positiva sale para afuera
$\rightarrow$ Si f_1, f_2 positivas: a) Si $g_1 \leq f_1$, $g_2 \leq f_2 \Rightarrow g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2 \Rightarrow \varphi^+(f_1) + \varphi^+(f_2) \leq \varphi^+(f_1+f_2)$

b) Si $0 \leq g \leq f_1 + f_2$ definimos: $\left.\begin{array}{l} g_1 = \min\{g, f_1\} \leq f_1 \\ g_2 = g - g_1 \leq f_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi^+(f_1+f_2) \leq \varphi^+(f_1) + \varphi^+(f_2)$

Extendemos $\varphi^+(f)$ a todo $C^0(X)$ usando que $\forall f \in C^0(X)\ \exists K > 0$ tal que $f + K \geq 0 \Rightarrow \varphi^+(f) := \varphi^+(f+K) - \varphi^+(K)$.

Es fácil ver que $\|\varphi^+\| = \varphi^+(1)$

~~Hacemos análogo para $\varphi^-(f) := \sup\{-\varphi(g) : 0 \leq g \leq f\}$~~

Definimos $\varphi^-(f) = \varphi^+(f) - \varphi(f)$ que también es positiva y nos da el resultado.

$\blacksquare$

dem del Lema 2: Una tal medida debería cumplir que si $f_n \to \chi_E$ puntualmente $\Rightarrow \varphi(f_n) \to \mu(E)$. Para construirla vamos a usar Caratheodory.

Definimos para U abierto $\mu^*(U) = \sup\{\varphi(f) : 0 \leq f \leq 1 \text{ y } \operatorname{sop} f \subseteq U\}$ y para $E \subseteq X$ cualquiera

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(U) : E \subseteq U \text{ abierto}\}$$

Hay que probar que μ^* es una medida exterior de Borel:

(i) $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty)$ (de hecho $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \varphi(1)]$)

(ii) Si $E' \subseteq E \Rightarrow \mu^*(E') \leq \mu^*(E)$

(iii) $\{E_n\}$ conjuntos $\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

(iv) Si A, B compactos disjuntos $\Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

(i) es trivial. (ii) es pues es ínfimo de menos cosas.

Para ver (iii) Primero lo vemos para abiertos: Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ abiertos y sea $0 \leq f \leq 1$ con $\operatorname{sop} f \subseteq U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

Tenemos que $\exists\, 0 \leq \eta_{i_k} \leq 1$ con soporte en U_{i_k} tq $\sum_{k=1}^{N} \eta_{i_k} f = f$

$\Rightarrow$ tenemos que $\varphi(f) \leq \sum_{k=1}^{N} \varphi(\eta_{i_k} f) \leq \sum_{k=1}^{N} \mu^*(U_{i_k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n)$ con lo cual $\mu^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n)$.

Ahora, para E_n cualquiera, consideramos $E_n \subseteq U_n$ abierto tq $\mu^*(U_n) < \mu^*(E_n) + \varepsilon$

entonces $\mu^*(\bigcup E_n) \leq \mu^*(\bigcup U_n) \leq \sum \mu^*(U_n) \leq \sum \mu^*(E_n) + \varepsilon$

Si A, B son compactos disjuntos, tenemos que existe U abierto de $A \cup B$ tal que $U = U_1 \cup U_2$ con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $A \subseteq U_1$, $B \subseteq U_2$

Entonces, $\forall \tilde{U}$ entorno de $A \cup B$ tenemos que $\tilde{U}_1 = \tilde{U} \cap U_1$ y $\tilde{U}_2 = \tilde{U} \cap U_2$ son entornos de A y B. Ademas, toda f con soporte en $\tilde{U}$ se puede escribir como $f_1 + f_2$ con f_i con soporte en $\tilde{U}_i$ $\Rightarrow$ sale lo deseado.

Ahora Tenemos μ medida de Borel tal que μ coincide con μ^* en los abiertos.

Queremos ver que si $f \in C^0(X) \Rightarrow \varphi(f) = \int f \, d\mu$. ~~Por densidad podemos suponer que $0 \leq f \leq 1$~~.

Dado U abierto, podemos considerar $f_n \to \chi_U$ monotonas con $f_n \in C^0(X)$

Por definición de μ tenemos que $\int \chi_U \, d\mu = \mu(U) = \sup\{\varphi(f) : 0 \leq f \leq 1 \ \operatorname{sop} f \subseteq U\}$

Por otro lado, convergencia monótona dice que
$\lim \int f_n d\mu = \int \chi_U$ $\Rightarrow$ Podemos aproximar las funciones continuas por simples y las simples por continuas y vemos que $\int f \, d\mu = \varphi(f)$ como queremos.

(Faltan detalles)

$\blacksquare$

Con esto podemos probar una versión un tanto más general:

Teo Sea X un e.m. localmente compacto y $C_0^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $\forall \{x_n\}$ sucesión sin subsucesión convergente $f(x_n) \to 0\}$ $\Rightarrow$
$(C_0^0(X))^* \cong \mathcal{M}(X)$

dem: Podemos compactificar X con un punto "∞": $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$.

Tenemos que $C_0^0(X) \cong \operatorname{Ker}(\varphi_\infty)$ donde $\varphi_\infty : C^0(\hat{X}) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi_\infty(f) = f(\infty)$.

Tenemos que $(C^0(\hat{X}))^* = \mathcal{M}(\hat{X})$ y está sobrando las funcionales que dan 0 en $C_0^0(X)$ que son δ_∞

$\blacksquare$

CLASE 6 Hahn-Banach

Abandonamos momentaneamente la Topología. Vamos a trabajar con $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

Sea $K \subseteq V$ es convexo si $\forall x, y \in K$ el conjunto $\{tx+(1-t)y \in E \mid t \in [0,1]\} \subseteq K$

Dados $v_1, \ldots, v_n \in V$ y $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ con $\sum t_i = 1$ llamamos a $v = \sum t_i v_i$ una combinación convexa de los puntos $v_1, \ldots, v_n$.

Dado $A \subseteq V$ definimos $co(A) = \{v \,/\, v$ es combinación convexa de puntos de $A\}$ y se llama: envolvente convexa

Ejercicio: $co(A) = \bigcap_{\substack{K \text{ convexo} \\ A \subseteq K}} K$ es convexo.

Def: Un conjunto $A \subseteq V$ se dice absorbente si $\forall v \in V$ existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda^{-1} v \in A$.

Prop: Sea $K \subseteq V$ un convexo absorbente y $q_K : V \to \mathbb{R}$ definida por $q_K(v) = \inf\{t > 0 : t^{-1} v \in K\}$.
Entonces, q_K es un funcional sublineal (i.e. $q_K(av) = a q_K(v)$ $\forall a > 0$ y $q_K(v+w) \leq q_K(v) + q_K(w)$)
que cumple que $q_K \leq 1$ en K.
Recíprocamente, si q es un funcional sublineal $\Rightarrow K = \{v \,/\, q(v) < 1\}$ es un convexo absorbente y $q = q_K$.

Un funcional como arriba se llama FUNCIONAL de MINKOWSKI para K.

dem: Lo "difícil" es ver $q_K(v+w) \leq q_K(v) + q_K(w)$

Sean $a > q_K(v)$ y $b > q_K(w)$ $\Rightarrow a^{-1}v, b^{-1}w \in K$ convexo $\Rightarrow \dfrac{\overbrace{a(v/a) + b(w/b)}^{v+w}}{a+b} \in K$
$\Rightarrow a + b \geq q_K(v+w)$.

Teorema (Hahn-Banach) Sea $W \subseteq V$ subespacio y $\varphi: W \to \mathbb{R}$ lineal y $p: V \to \mathbb{R}$ funcional sublineal tal que $\varphi(w) \leq p(w)$ $\forall w \in W$. Entonces, existe $\tilde{\varphi}: V \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\tilde{\varphi}|_W = \varphi$ y se cumple que $\tilde{\varphi}(v) \leq p(v)$ $\forall v \in V$.

dem: Suponemos $W \neq V$ (sino ganamos) y consideramos $v_1 \notin W$

Definimos $V_1 = \text{span}\{W, v_1\}$ y vamos a definir φ_1 en V_1 de la siguiente manera:

$$\varphi_1(\alpha v_1 + w) = \alpha \varphi_1(v_1) + \varphi(w)$$ eligiendo $\varphi_1(v_1)$ de forma tal que:

$$-p(-v_1+w') + \varphi(w') \leq \varphi_1(v_1) \leq p(v_1+w) - \varphi(w)$$

Para todo $w, w' \in W$. Esto es posible pues:

$$\varphi(w') + \varphi(w) = \varphi(w+w') \leq p(w+w') = p(w+v_1-v_1+w')$$
$$\leq p(v_1+w) + p(-v_1+w') \quad \forall w, w'$$

$$\to \quad \sup\{\varphi(w') - p(-v_1+w')\} \leq \inf\{p(v_1+w) - \varphi(w)\}$$

Para terminar usamos el Axioma de elección:

Sea $\mathcal{F} = \{(S, \varphi_S)$ subespacios de V con $\varphi_S: S \to \mathbb{R}$ que extiende a φ con las prop deseadas$\}$

Ordenamos $\mathcal{F}$ con $(S, \varphi_S) < (S', \varphi_{S'})$ si $S \subseteq S'$ y $\varphi_{S'}|_S = \varphi_S$.

Entonces $\mathcal{F}$ está en las hipótesis de Zorn (chequear) y tiene un elemento maximal. Como es posible extender si no fuese todo se demuestra el Teorema.

$\blacksquare$

Corolario: Sea X espacio normado y $x \in X$ tq $\|x\| = M \Rightarrow \exists \varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x) = M$ y $\|\varphi\| = 1$.

En el práctico hay un ejercicio que da el Corolario para X complejo.

CLASE 7

Teorema (Hahn-Banach - Convexos) Sea V un $\mathbb{R}$-e.v y A un convexo algebraicamente abierto y B un convexo disjunto $\Rightarrow \exists \varphi : V \to \mathbb{R}$ lineal tq $\varphi|_A < \varphi|_B$

Def: Un convexo es <u>algebraicamente abierto</u> si $\forall a \in A$ y $v \in V$ $\exists \varepsilon > 0$ tal que $a + t(v-a) \in A$ con $0 \le t \le \varepsilon$.

dem: Tomamos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ y definimos $C = A - B + b_0 - a_0$
$\Rightarrow$ C es algebraicamente abierto y contiene al 0 ($\Rightarrow$ es absorbente)

Sea q_C el funcional de Minkowski de C entonces tenemos que

$\exists \varphi : V \to \mathbb{R}$ lineal tq $\varphi(b_0 - a_0) = q_C(b_0 - a_0) \geq 1$ (notar $b_0 - a_0 \notin C$)
y tal que $\varphi(v) \le q_C(v)$ $\forall v \in V$.

Para $a \in A$, $b \in B$ tenemos $\varphi(a) - \varphi(b) + \varphi(b_0 - a_0) \le q_C(\overbrace{a - b + b_0 - a_0}^{\in C}) < 1$

$\Rightarrow \varphi(a) - \varphi(b) < 1 - \varphi(b_0 - a_0) \le 0$
Entonces: $\sup\{\varphi(a) : a \in A\} \le \inf\{\varphi(b) : b \in B\}$ y como A es algebraicamente abierto no alcanza el supremo y se concluye. ∎

Aplicación: $(L^\infty(\mathbb{R}))^* \neq L^1(\mathbb{R})$

Sea $C_b^0(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$ las funciones continuas acotadas: Es un subesp. cerrado. Definimos $\varphi : C_b^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineal dada por $\varphi(f) = f(0)$ que cumple $\|\varphi(f)\| \le \|f\|_\infty$ $\forall f \in C_b^0(\mathbb{R})$

Existe $\tilde{\varphi} \in (L^\infty)^*$ tal que $\|\tilde{\varphi}\| \le 1$ y $\tilde{\varphi}|_{C_b^0(\mathbb{R})} = \varphi$.

Supongamos $\exists g \in L^1$ tal que $\tilde{\varphi}(f) = \int g f \, dx$ $\forall f \in L^\infty(\mathbb{R})$.
Afirmación: $g \equiv 0$ ctp
dem: Ejercicio.

TOPOLOGÍAS LINEALES:

Def: Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, τ una topología en V, decimos que es una topología vectorial (o lineal) si:
- $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ son continuas
- Los puntos son cerrados

Un espacio vectorial V con una topología vectorial se llama: espacio vectorial topológico (e.v.t.).

Ejercicio: Probar que todo e.v.t. es Hausdorff (Práctico)
Mencionar: Metrizable $\Leftrightarrow$ base local numerable (ver Rudin)

Def: Un EVT es localmente convexo si el origen tiene una base de entornos convexos.

Un entorno A se dice balanceado si $\lambda A \subseteq A \;\; \forall |\lambda| \leq 1$. (a veces equilibrado)

Prop: Sea V un e.v.t. $\Rightarrow$ el origen tiene una base de entornos balanceados. Además, si V es localmente convexo, los podemos considerar convexos tb

dem: Sea $\mathcal{U} = \{U : U \text{ abierto y } 0 \in U\}$

$\forall U \in \mathcal{U} \;\; \exists \varepsilon > 0$ y $U' \in \mathcal{U}$ tq $\lambda U' \subseteq U \;\; \forall |\lambda| < \varepsilon$
$\Rightarrow$ si $W = \bigcup_{|\lambda| < \varepsilon} \lambda U'$ tenemos que W es balanceado $\subseteq U$

Si U' es convexo $\Rightarrow$ tb lo es $W \Rightarrow$ tenemos lo que queremos. $\square$

Def: Un conjunto $A \subseteq V$ se dice acotado si $\forall U$ entorno de 0 $\exists \lambda > 0$ tq $\lambda A \subseteq U$.
V es localmente acotado si tiene base de entornos acotados.

Teorema: Un e.v.t. es normable $\Leftrightarrow$ el origen tiene un entorno ~~[illegible]~~ convexo y aco[tado]

dem ($\Rightarrow$) Trivial

($\Leftarrow$) Un entorno convexo y acotado $\Rightarrow$ localmente convexo y localmente acotado pues $\frac{1}{n}U$ es base de entornos de 0.

Sea U entorno convexo acotado que podemos asumir tb balanceado.

Sea $q: V \to \mathbb{R}$ el funcional de Minkowski de U:

$$q(v) = \inf\{t>0 : t^{-1}v \in U\}$$

Sabemos que es funcional sublineal positivo: Falta ver. $q(\alpha v) = |\alpha| q(v)$

$\cdot\ q(v)=0 \Rightarrow v=0$.

$\cdot\ q(v)=0 \Rightarrow v=0$ Es pues U es acotado y la topología es Hsdff.
(v tiene que estar en todos los entornos del 0)

$\cdot\ q(\alpha v) = \inf\{t : t^{-1}\alpha v \in U\} = \inf\{t : t^{-1}|\alpha| v \in \frac{|\alpha|}{\alpha} U = U\} = |\alpha| q(v)$

Como las bases de entornos del cero son equivalentes $\Rightarrow$ las topologías lo son y se concluye.

$\boxtimes$

Como consecuencia de Hahn-Banach (geométrico) Tenemos:

Teorema Sea V un e.v.t. localmente convexo $\Rightarrow V^*$ separa puntos
(i.e.: $\forall v, w \in V\ \exists \varphi \in V^*$ tq $\varphi(v) \neq \varphi(w)$)

Notas: $\rightarrow$ Si U es abierto $\Rightarrow$ es abierto algebraico (no vale $\Leftarrow$).
$\rightarrow$ Si V no es localmente convexo se arma lío (ver práctico)
$\rightarrow$ En dimensión finita, todo es equivalente.
$\rightarrow$ No toda métrica invariante por traslaciones da lugar a top vectorial.
$\rightarrow$ Si $T: X \to Y$ lineal y $\exists U$ entorno de 0 tq $T(U)$ es acotado $\Rightarrow$ T es continua. Si Y es localmente acotado vale recíproco.

CLASE 8:

Una seminorma $p: V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es tq: $\to$ $p(v+w) \leq p(v) + p(w)$
$\to$ $p(\alpha v) = |\alpha| p(v)$
$\to$ $p(v) \geq 0$.

(Por ejemplo, si $\varphi: V \to \mathbb{R}^n$ lineal $\Rightarrow |\varphi|$ es seminorma)

Sea $\mathcal{P} = \{p_i : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}\}_{i \in I}$ familia de seminormas.

Decimos que $\mathcal{P}$ separa puntos si $\forall x \neq 0$ $\exists p \in \mathcal{P}$ tq $p(v) \neq 0$.

Para $p \in \mathcal{P}$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U(p,n) = \{v \in V \ / \ p(v) < 1/n\}$$

Sea $\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \{$intersecciones finitas de elementos de la forma $U(p,n)\}$

Prop: $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ es base de entornos de 0 para una topología vectorial $\tau_{\mathcal{P}}$ localmente convexa. Además, $\tau_{\mathcal{P}}$ es la mínima topología que hace todas las $p \in \mathcal{P}$ continuas.

Obs: Si $\mathcal{P}$ es numerable $\Rightarrow$ la topología es metrizable mediante

$$d(x,y) = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

dem: A es abierto según $\tau_{\mathcal{P}}$ si $\forall x \in A$ $\exists p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \mathbb{R}$ tal que $x + \bigcap_{i=1}^{k} U(p_i, \varepsilon_i) \subseteq A$ es decir: $\{v : |p_i(v-x)| < \varepsilon_i\} \subseteq A$.

Es obvio que es una topología, vamos a ver que es lineal.
Veamos que la suma es cont. Sea A abierto y v_0, w_0 tq $v_0 + w_0 \in A$.
Llamamos $x = v_0 + w_0$ y sean $p_1, \dots, p_k$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ tq

$\{v \ / \ p_i(v-x) < \varepsilon_i\} \subset A$ y sean $U = \{v \ / \ p_i(v-v_0) < \varepsilon_i/2\}$ $U = \{v \ / \ p(v-w$

$\Rightarrow U_1 + U_2 \subseteq A$ probando la continuidad de $+ : V \times V \to V$.

Un argumento análogo da la continuidad de $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$.

Como $\mathcal{P}$ separa puntos $\tau_{\mathcal{P}}$ es Hausdorff.
Como son seminormas, las intersecciones finitas de $U(p, \varepsilon)$ son convexos (y balanceados) $\Rightarrow \tau_{\mathcal{P}}$ es localmente convexa.

No es difícil ver que si τ' es topología lineal que hace a los elementos de $\mathcal{P}$ continuos $\Rightarrow \tau_{\mathcal{P}} \subseteq \tau'$. (casi que por definición)

Sea τ una topología vectorial en X;

Ejercicio: Mostrar que $\varphi : X \to \mathbb{K}$ lineal es continuo $\Leftrightarrow \exists U$ entorno del 0 tal que $\varphi(U)$ es acotado.

Lema: Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ y Ψ funciones lineales de X en $\mathbb{K}$. Son equivalentes:
(i) $\exists a_1, \dots, a_k$ tq $|\varphi_i(x)| < a_i \Rightarrow |\Psi(x)| < 1$.
(ii) Ψ es combinacion lineal de $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.
(iii) $\bigcap \operatorname{Ker} \varphi_i \subseteq \operatorname{Ker} \Psi$.

dem: (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) es fácil (Para ver (iii) $\Rightarrow$ (i) Todo $x = \lambda y + z$ con $z \in \operatorname{Ker}\Psi$ y $\Psi(y) = 1$ escribimos así a cada y_i que hace eso pa φ_i y listo).

Veamos (i) $\Rightarrow$ (ii) que es el que nos interesa:
Sea $\Lambda : X \to \mathbb{R}^k$ tq $\Lambda(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$

Tenemos que $\Lambda(x) = \Lambda(y) \Rightarrow \Psi(x) = \Psi(y)$ pues si no $|\Lambda(\lambda(x-y))| < \sum |a_i| \ \forall \lambda$ pero $\Psi(\lambda(x-y))$ se haría mayor que 1.

$\Rightarrow \exists \hat{\Psi} : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}$ tq $\hat{\Psi}(\Lambda(v)) = \Psi(v)$ y $\hat{\Psi}$ lineal

$\Rightarrow \hat{\Psi}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i$ con $t = (t_1, \dots, t_n) \Rightarrow \Psi(v) = \sum a_i \varphi_i(v)$ $\blacksquare$

Proposición Sea X un espacio vectorial y $S \subseteq X'$ un subespacio que separa puntos (i.e. $\forall v \neq 0\ \exists \varphi \in S$ tq $\varphi(v) \neq 0$).
La mínima topología que hace continuos a todos los $\varphi \in S$ es una topología vectorial (localmente convexa) y $X^* = S$.

dem: Sea $\mathcal{P} = \{|\varphi| : \varphi \in S\}$ es una familia de seminormas que separa puntos $\Rightarrow \tau_{\mathcal{P}}$ es la topología lineal buscada.
Queremos ver que $X^* = S$. (sabemos $S \subseteq X^*$

Sea $\psi \in X^*$ lineal, continuo ~~para~~ con $\tau_{\mathcal{P}}$. $\Rightarrow \psi^{-1}(B_{\mathbb{K}}(0,\varepsilon))$ es abierto en particular, $\exists\ \varphi_1, \dots, \varphi_k \in S$ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ tq:

$$|\varphi_i(v)| < \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow |\psi(v)| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow \psi$ es combinación lineal de las $\varphi_i \Rightarrow \psi \in S$. ∎

Sea X un e.v.t tal que X^* separa puntos (p.ej. si X es localmente convexo) $\Rightarrow$ la topología dada por la proposición anterior la llamamos <u>topología débil</u> en X y la denotamos ω.

Para un e.v.t. X cualquiera, podemos definir X^* pero a diferencia del caso normado, no tenemos una topología a priori.
Tenemos sin embargo $J : X \to (X^*)'$ tal que $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$
Si $S = \operatorname{Im} J$ es claro que S separa puntos.

Def La topología τ_S inducida por S en X^* la llamamos topología débil-$*$ y la denotamos ω^*.

Prop: La topología ω^* en V^* es la relativa a la inclusión $V^* \subseteq \mathbb{K}^V$ con la topología producto.

dem: Casi que directo de la definición.

CLASE 9

Teorema (Banach-Alaoglu) Sea X un e.v.t. y U un entorno del 0 entonces

$$K = \{\varphi \in X^* / |\varphi(x)| \leq 1 \ \forall x \in U\}$$

es compacto para la topología débil $*$ (w^*)

Demostración: Para todo $x \in X$ existe $\alpha(x) \in \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha(x)^{-1} x \in U$
Con lo cual si $\varphi \in K \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \alpha(x) \quad \forall x$.

$$K \subseteq \{\varphi \in \mathbb{K}^X : |\varphi(x)| \leq \alpha(x) \quad \forall x \in X\} = \prod_{x \in X} \overline{B_{\mathbb{K}}(0, \alpha(x))}$$

Como $\forall x \in X$ $\overline{B_{\mathbb{K}}(0, \alpha(x))}$ es compacto tenemos por Tichonoff que

K con la topología débil$*$ está contenido en un compacto. Hay que ver que K es cerrado.

Sea $\varphi_0 \in \overline{K}$ con la topología w^* (o mejor dicho, con la topología producto en $\mathbb{K}^X$), tenemos que probar: $\rightarrow \varphi_0$ es lineal
$\rightarrow \varphi_0 \in K$.

Sean $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\varepsilon > 0$, vamos a ver que $|\varphi_0(x+\lambda y) - \varphi_0(x) - \lambda \varphi_0(y)| < \varepsilon$

Eso probaría que φ_0 es lineal. Para eso, consideramos el siguiente entorno de φ_0:

$$U = \{f \in \mathbb{K}^X \text{ tq } |f(x) - \varphi_0(x)| < \varepsilon/3,\ |f(x+\lambda y) - \varphi_0(x+\lambda y)| < \varepsilon/3 \text{ y } |f(y) - \varphi_0(y)| < \varepsilon/|\lambda| \}.$$

Sea $\varphi \in U \cap K \Rightarrow \varphi$ es lineal $\Rightarrow$

$$|\varphi_0(x+\lambda y) - \varphi_0(x) - \lambda\varphi_0(y)| = |(\varphi - \varphi_0)(x+\lambda y) - (\varphi - \varphi_0)(x) - |\lambda| (\varphi - \varphi_0)(y)| < \varepsilon.$$

Un argumento análogo muestra que si $x \in U \Rightarrow |\varphi_0(x)| \leq 1 + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

■

Corolario: Sea X normado y $B^* = \{\varphi \in X^* \text{ tq } \|\varphi\| \leq 1\}$
$\Rightarrow B^*$ es w^*-compacto.

Teorema (Banach-Alaoglu Sequencial) Sea X un e.v.t. separable y U abierto
$\Rightarrow K = \{\varphi \in X^* : |\varphi(x)| \leq 1 \ \forall x \in U\}$ es sequencialmente compacto.

dem: Los elementos de K son uniformemente acotados y uniformemente equicontinuos en U.

Tomando un subconjunto denso numerable en U vemos que converger en esos puntos alcanza para converger con lo cual toda sucesión tiene subsucesión convergente. $\square$

Nota: en general, X^* con la topología w^* puede no ser metrizable pero en realidad, vale lo siguiente que tb implica el teo anterior.

Prop Sea X un e.v.t. separable $\Rightarrow$ todo conjunto w^*-compacto es metrizable

dem: Consideramos $S \subseteq X$ numerable y denso y $\tilde{S} = J(S) \subseteq (X^*)'$

La familia de seminormas generada por $\tilde{S}$ es numerable $\Rightarrow$ la topología generada es metrizable (y es vectorial pues dos funcionales continuos que coinciden en un denso coinciden). Llamamos $\tau_{\tilde{S}}$ a la topología generada: Tenemos $\tau_{\tilde{S}} \subseteq w^*$ obviamente.

Sea K compacto para $w^* \Rightarrow Id : (K, w^*) \to (K, \tau_{\tilde{S}})$ es obviamente continua.

Como (K, w^*) es compacto $\Rightarrow (K, \tau_{\tilde{S}})$ también entonces es un homeomorfismo.

Corolario: Si X es espacio de Banach reflexivo (i.e. $J : X \to X^{**}$ es una isometría isomorfa) $\Rightarrow$ la Bola de radio 1 es debilmente compacta.

[**Def**: $K \subseteq X$ convexo, decimos que $x \in K$ es <u>extremal</u> si cada vez que escribimos $x = ty + (1-t)z$ con $y, z \in K$ se cumple que $t = 0$ o 1.

(es equivalente a decir que $K \setminus \{x\}$ es convexo)

[<u>Teorema</u> (Krein-Milman) Sea X un e.v.t. tal que X^* separa puntos y $K \subseteq X$ compacto convexo $\Rightarrow$ K es la clausura de la envolvente convexa de sus puntos extremales, o sea:

$$K = \overline{co(ext(K))}$$
]

<u>dem</u>: Sea $C = \overline{co(ext(K))} \Rightarrow C \subseteq K$, hay que mostrar $K \subseteq C$.

Supongamos existe $z \in$ ~~[illegible]~~ $K \setminus C$. (Nota, en ppio se podría tener $C = \emptyset$)

Por Hahn-Banach $\exists \varphi \in X^*$ tal que $\varphi(z) > \varphi(x) \quad \forall x \in C$.
(el hecho que φ se puede tomar continua no es completamente directo, pero está en el práctico).

Sea $\beta = \max\{\varphi(y) : y \in K\}$ como φ cont. e K compacto β está bien def

Definimos $H = \varphi^{-1}(\beta)$ que sabemos $H \cap C = \emptyset$ (en part. H no tiene puntos extremales), H es un <u>subespacio afín</u> (i.e. de la forma subespacio $+ x$)

H verifica que si S es un segmento no trivial en K con un punto interior en $H \Rightarrow S \subseteq H$.

Sea $\mathcal{F} = \{H' \subseteq H$ subespacio afín tal que $H' \cap K \neq \emptyset$ y H' tiene la propiedad de ↑ $\}$.

Tenemos que la intersección decreciente es no vacía pues intersección decreciente de compactos es no vacía. $\Rightarrow$ Por Zorn hay $M \in \mathcal{F}$ minimal
Se puede ver que M es un punto extremal pues si no podemos definir φ ~~[illegible]~~ $\in X^*$ no constante en $M \cap K$

Nota: → La sola existencia de extremales es no trivial (bola unidad de c_0)
→ La existencia de puntos extremales es propiedad algebraica y no topológica
→ Se puede adaptar la prueba para mostrar que si K es compacto, X localmente convexo $\Rightarrow K \subseteq \overline{co(ext\, K)}$

Corolario: $L^1([0,1])$ no es el dual de nadie.

dem: Si fuese $\Rightarrow \overline{B(0,1)}$ sería w^*-compacto y convexo.

$\Rightarrow$ tendría puntos extremales.

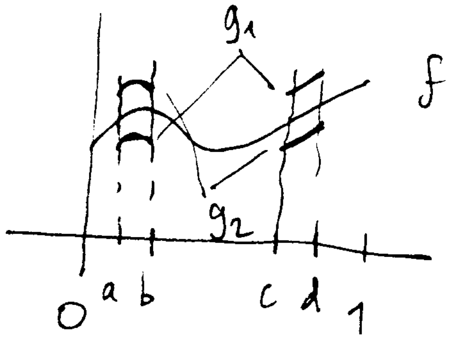
Sea $f \in L^1([0,1])$ tq $\int_0^1 |f|\,dm \leq 1$

Si f fuese extremal $\Rightarrow \int_0^1 |f|\,dm = 1$ (sino es obvio que es punto medio de un segmento de func de norma 1)

Sea $[a,b]$ y $[c,d]$ intervalos disjuntos tq $\int_a^b |f| = \int_c^d |f|$.
(podemos suponer $f > 0$ en los 2 intervalos)

Ahora consideramos g_1 tal que $g_1 = f$ fuera de $[a,b] \cup [c,d]$

y tenemos $\int_a^b |g_1| + \int_c^d |g_1| = \int_a^b |g_2| + \int_c^d |g_2| = \int_a^b |f| + \int_c^d |f|$



$\Rightarrow f = \frac{1}{2} g_1 + \frac{1}{2} g_2$ y $\|g_1\|_1 = \|g_2\|_1 = \|f\|$

CLASE 10: REPASO

Topologías débiles:

→ En $C^0([0,1])$ hay sucesiones que convergen débilmente pero no fuertemente.
→ La bola unidad en $C^0([0,1])$ no es débilmente compacta
(consecuencia: $C^0([0,1])$ no es dual de nadie)

→ Las sucesiones convergentes en ℓ^1 con topología débil son las mismas que las que convergen con $\| \ \|_1$.

Sin embargo:

Prop: Si $\dim X > \infty$ ⇒ las topologías débiles no son normables.

dem: Una topología vectorial es normable ⟺ Existe entorno convexo y acotado.

Sin embargo, todo abierto del 0 de una topología débil contiene un subespacio (→ no acotado).

$\boxtimes$

Consecuencia: Las topologías débiles en gral no son metrizables (ver por ejemplo ℓ^1).

CLASE 11

Aplicación de lo que venimos viendo:

Teorema (Stone-Weierstrass) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto $\Rightarrow$ los polinomios son densos en $C^0(S)$

f es polinomio en $\mathbb{R}^d$ si $f(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_1^{d_1^i} \cdots x_d^{d_d^i}$

Acá nos referimos a las restricciones de polinomios a S. Notar que eso depende del encaje elegido.

Claramente, los polinomios en $C^0(S)$ son un subespacio. Denotamos como $A = \overline{\text{Poly}(S)}$ su clausura que es también subespacio.

$$\text{Sea } A^\perp = \{ \varphi \in (C^0(S))^* : \varphi/_A = 0 \}$$

Por Hahn-Banach, alcanza mostrar que $A^\perp = \{0\}$ para ver que $A = C^0(S)$.

Recordar que $(C^0(S))^* = \mathcal{M}(S)$ (Riesz) con lo cual

$$A^\perp = \{ \mu \in \mathcal{M}(S) \,/\, \int f \, d\mu = 0 \ \ \forall f \in \text{Poly}(S) \}.$$

Lemma: Sea ν un punto extremal de $K = \{ \mu \in A^\perp / \|\mu\| \leq 1 \}$. Si $f \in A$ cumple $0 < f < 1 \Rightarrow f$ es constante en el soporte de ν.

dem: Sea $\mu_1(E) = \int_E f \, d\nu \qquad \mu_2(E) = \int_E (1-f) \, d\nu$

Dado $g \in A$ tenemos gf y $g(1-f) \in A \Rightarrow$ obtenemos que

$$\int_S g \, d\mu_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2 \text{ por estar } \nu \in A^\perp$$

Tenemos que $\nu = \mu_1 + \mu_2 = \|\mu_1\| \dfrac{\mu_1}{\|\mu_1\|} + \|\mu_2\| \dfrac{\mu_2}{\|\mu_2\|}$

Que es combinación convexa pues $\|\mu_1\| + \|\mu_2\| = \|\nu\| = 1$ ← pues ν extremal

↑ salvo que sea 0

Recordar que como $0 < f < 1$ vale $\mu_1 = \underbrace{\int f \, d\nu^+}_{\mu_1^+} - \underbrace{\int f \, d\nu^-}_{\mu_1^-}$

y lo mismo $\mu_2 \Rightarrow |\mu_1| + |\mu_2| = |\nu|$.

Deducimos que $\nu = \dfrac{\mu_1}{\|\mu_1\|}$ o $\nu = \dfrac{\mu_2}{\|\mu_2\|}$ pues ν es extremal (suponemos $\nu = \dfrac{\mu_1}{\|\mu_1\|}$)

Entonces, $\forall E$ medible

$$\int_E f \, d\nu = \mu_1(E) = \|\mu_1\| \, \nu(E) = \int_E \|\mu_1\| \, d\nu$$

$\Rightarrow f = \|\mu_1\|$ ctp como queríamos. ∎

Ahora, por Banach-Alaoglu sabemos que $K = \{\nu \in A^\perp / \|\nu\| \leq 1\}$ es un compacto para la topología w^*.

Por otro lado, Krein-Milman nos dice que $K = \overline{co(ext(K))}$ con lo cual, si mostramos que todo extremal de K es nulo $\Rightarrow K = \{0\} \Rightarrow A^\perp = \{0\}$ que probaría que $\overline{Poly(S)} = A = C^0(S)$.

Sea ν extremal de K y $t_0 \in Sop(\nu) = \{x \in S \text{ tq } |\nu|(U) \neq 0 \ \forall U \text{ ent. de } x\}$

Dado $s \neq t_0$ en S tenemos un polinomio f tal que: → $f(t_0) \neq f(s)$
→ $0 < f < 1$

El lema anterior implica que $s \notin Sop(\nu) \Rightarrow \nu = \alpha \delta_{t_0}$

Pero $\alpha = \int 1 \, d\nu = 0$ por ser 1 un polinomio $\Rightarrow \alpha = 0$ y se concluye la prueba.

CLASE 12 DISTRIBUCIONES

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto

Definimos $\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) \,/\, \text{sop}\,\varphi \text{ es compacto} \}$

Llamamos a las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$: FUNCIONES TEST.

TOPOLOGÍA: Recordar la topología en $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) / \text{sop}\,\varphi \subseteq K \}$

En $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ponemos la topología generada por las seminormas

$$P_N(\varphi) = \max_{x \in K} \{ \| D^\alpha \varphi(x) \| : |\alpha| \leq N \}$$

donde $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$

Consideramos entonces la siguiente base de entornos del 0 en $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\beta = \{ W \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \text{ convexo equilibrado tq } W \cap \mathcal{D}_K(\Omega) \text{ abierto para todo } K \overset{\subseteq \Omega}{} \text{ compacto} \} \text{ (balanceado)}$$

Prop β genera una topología vectorial, τ localmente convexa.

dem: τ queda definida como uniones cualquiera de conjuntos de la forma $\varphi + W$ con $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $W \in \beta$.

Es obviamente una topología. (hay que probar intersección finita pero es fácil):

Sean $V_1, V_2 \in \tau$ queremos encontrar $W \in \beta$ tal que $\exists \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\phi + W \subseteq V_1 \cap V_2$.

Tenemos W_1, W_2 y ϕ_1, ϕ_2 tq $\phi_i + W_i \subseteq V_i$ $i = 1,2$.

Sea $\phi \in V_1 \cap V_2$, podemos suponer $\phi \in (\phi_1 + W_1) \cap (\phi_2 + W_2)$.

Sea K compacto tq $\phi_1, \phi_2, \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.

Como $\mathcal{D}_K(\Omega)\cap W_i$ es abierto existen $\lambda_i\in(0,1)$ tal que

$$\phi-\phi_i\in\lambda_i W_i \quad \text{y como } W_i \text{ son convexos tenemos}$$

$$\phi-\phi_i+(1-\lambda_i)W_i \subseteq \lambda_i W_i+(1-\lambda_i)W_i = W_i$$

$\Rightarrow \quad \phi+(1-\lambda_i)W_i\subseteq \phi_i+W_i\subseteq V_i$ con lo cual $\phi+W$ con $W=(1-\lambda_1)W_1\cap(1-\lambda_2)W_2$ está contenido en $V_1\cap V_2$ mostrando que τ es topología.

Sean $\phi_1,\phi_2\in\mathcal{D}(\Omega)$ diferentes y sea $W=\{\phi\in\mathcal{D}(\Omega)/\ \|\phi\|_0<\frac{\|\phi_1-\phi_2\|}{2}$

entonces $(\phi_1+W)\cap(\phi_2+W)=\emptyset$ mostrando que es Haussdorff.

Para ver que la suma es continua fijamos $W\in\beta$ y como W es convexo si $\phi_1+\phi_2=\phi \Rightarrow$

$$\left(\phi_1+\tfrac{1}{2}W\right)+\left(\phi_2+\tfrac{1}{2}W\right)=\phi+W$$

Para el producto por escalares fijamos $\alpha_0\in\mathbb{K}$, $\phi_0\in\mathcal{D}(\Omega)\Rightarrow$

$$\alpha\phi-\alpha_0\phi_0=\alpha(\phi-\phi_0)+(\alpha-\alpha_0)\phi_0$$

Sea $W\in\beta$ y $\delta>0$ tq $\delta\phi_0\in\frac{1}{2}W$. Fijando $c>0$ tq $2c(|\alpha_0|+\delta)<1$ obtenemos

$$\alpha\phi-\alpha_0\phi_0\in W \quad \text{si} \quad |\alpha-\alpha_0|<\delta \quad \text{y} \quad \phi-\phi_0\in cW.$$

$\boxtimes$

Vamos a estudiar con un poco más de detalle la topología τ ya que las distribuciones van a ser el dual continuo de $\mathcal{D}(\Omega)$

F es una <u>distribución</u> si $F:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{K}$ lineal y continua

La topología del espacio de distribuciones $\mathcal{D}^*(\Omega)$ es la débil-$*$

<u>Prop</u>: Sea $E \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ un conjunto acotado $\Longleftrightarrow$ $\exists K \subseteq \Omega$ compacto tal que $E \subseteq \mathcal{D}_K$ y además existe una sucesión $\{a_N\}$ de reales positivos tal que

$$\|\varphi_N\| \leq a_N \qquad \forall N \geq 0.$$

<u>dem</u>: Sea E un subconjunto de $\mathcal{D}(\Omega)$ que no está contenido en ningún $\mathcal{D}_K$.

Entonces, existe $\varphi_m \in E$ y $x_m \to \partial\Omega$ (sin puntos de acumulación) sucesiones tales que

$\varphi_m(x_m) \neq 0$.

Sea ahora $W = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,/\, |\varphi(x_m)| < \frac{1}{m}|\varphi_m(x_m)|\}$

Claramente W es convexo y equilibrado y como tenemos que $\forall K$ compacto $\{x_m\}$ ~~no acumu~~ corta K en finitos puntos tenemos que $W \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$

$$\Rightarrow W \in \beta.$$

Como $\frac{1}{m} E \not\subseteq W$ vemos que E no es acotado.

Para ver la segunda parte, como sabemos $E \subseteq \mathcal{D}_K$ vamos a ver que su topología relativa es la misma que como subconjunto de $\mathcal{D}_K$ $\Rightarrow$ es acotado en $\mathcal{D}_K$ que nos da lo deseado.

Para ver eso, notar que si $V \in \tau \Rightarrow V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K \Rightarrow$ solo hay que mostrar que si $W \in \tau_K \Rightarrow \exists V \in \tau$ tq $W = V \cap \mathcal{D}_K$.

Por ser $W \in \tau_K$, $\forall \varphi \in W$ $\exists N$ y $\delta > 0$ tal que

$$W'_\varphi = \{\psi \in \mathcal{D}_K \,/\, \|\psi - \varphi\|_N < \delta\} \subseteq W$$

Sea entonces $V_\varphi = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) / \|\psi - \varphi\|_N < \delta\} \Rightarrow (\varphi + V_\varphi) \cap \mathcal{D}_K \subseteq W$

Consideramos $V = \bigcup_{\varphi \in W} (\varphi + V_\varphi)$ y cumple $V \cap \mathcal{D}_K = W$.

El recíproco es obvio de esto último pues si es acotado en $\mathcal{D}_K \Rightarrow$ lo será en $\mathcal{D}$. $\boxtimes$

Corolario 1: Si $E \subseteq D(\Omega)$ es cerrado y acotado $\Rightarrow$ toda sucesión tiene subsucesión convergente

dem: Alcanza demostrarlo en D_K pues $E \subseteq D_K$ para algún K y ahí sale como sigue:

Recordar que si $\varphi_n \in E$ tenemos $\|\varphi_n\|_N \leq a_N$.

Como para $|\alpha| \leq N$ se cumple $\|D^\alpha \varphi_n\| \leq A$
tenemos que $\{D^\beta \varphi_n\}$ son equicontinuas $\forall\ |\beta| \leq N-1$
Entonces, usando Arzelá-Ascoli y un proceso diagonal encontramos una subsucesión tal que $D^\alpha \varphi_{n_j} \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente $\forall \alpha$
lo cual da convergencia en D_K. ☒

Como consecuencias tenemos:

$\rightarrow$ Si $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \exists K$ compacto tq $\operatorname{sop}\varphi_n \subseteq K\ \forall n > n_0$
y se cumple que $\|D^\alpha \varphi_n\| \to 0$ con $n \to \infty$.

$\rightarrow$ Si φ_n es sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$ converge en $\mathcal{D}(\Omega)$.

(En part $\varphi_n(t) = \varphi_0(t) + \dots + \frac{1}{n}\varphi_0(t-n)$ no es de Cauchy).

Pero lo importante (pensando en las distribuciones) es:

Prop: Sea $T : \mathcal{D}(\Omega) \to X$ (con X localmente convexo) una transf. lineal.
Las siguientes son equivalentes: (a) T es continua
(b) Si $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T\varphi_n \to 0$ en X
(c) $T/_{D_K} : D_K \to X$ continua $\forall K \subseteq \Omega$ compacto.

dem (a)$\to$(b) Si $\varphi_n \to 0 \Rightarrow T\varphi_n \to 0$ por continuidad (vale incluso para redes)
(b)$\to$(c) Como D_K es metrizable, la continuidad está dada por sucesiones.
Como $\varphi_n \to 0$ en D_K implica $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ ✓.
(c)$\to$(a). Sea U convexo balanceado del 0 en $X \Rightarrow T^{-1}(U)$ es convexo y balanceado. Por (c) tenemos $T^{-1}(U) \cap D_K \in \tau_K\ \forall K \subseteq \Omega$ compacto
$\Rightarrow T^{-1}(U) \in \beta$ con lo cual T es continua. ☒

Este resultado nos da que:

Prop: Sea F una distribución en Ω entonces, $\forall K \subseteq \Omega$ compacto existe $N>0$ y $C<\infty$ tal que $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K$ se tiene:

$$|F(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N.$$

Def: Si existe $N>0$ tal que $\forall K \subseteq \Omega$ se puede tomar ese N en la proposición de arriba decimos que F es una distribución de <u>orden finito</u> y su <u>orden</u> es el menor tal N. Si no, decimos que es de orden infinito.

EJEMPLOS:

→ Funciones en $L^1_{loc}(\Omega)$.

→ Medidas en Ω localmente finitas (en compactos). → orden 0

→ $F(\varphi) = G(D^\alpha \varphi)$ para alguna distribución G de orden 0. → Orden $|\alpha|$.

Razón para usar soporte compacto:

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) de clase C^r

Definimos $F_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dm$ con m = Lebesgue.

$\Rightarrow D^\alpha f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) si $|\alpha| \leq r$ es continua

$$\Rightarrow F_{D^\alpha f}(\varphi) = \int_\Omega D^\alpha f \varphi \, dm \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integración} \\ \text{por partes}}}{=} \text{Restricciones de borde} + (-1)^{|\alpha|}\int f D^\alpha \varphi \, dm$$

Como φ es de soporte compacto se tiene que las restricciones se anulan.

CLASE 13:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \subseteq \Omega \\ \text{compacto}}} \mathcal{D}_K \qquad \text{con } \mathcal{D}_K = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ soporte en } K \}$$

Vimos que $\mathcal{D}_K \subseteq C^\infty(\Omega)$ es un subespacio cerrado (completo)

[Comentario (ejercicio de Cálculo 3) $\mathcal{D}(\Omega)$ es no vacío, de hecho, es denso en las funciones continuas con la norma del supremo.

Tenemos que $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ si $\exists K$ compacto tq $\operatorname{sop} \varphi_n \subseteq K$ $\forall n > n_0$ y $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}_K$ con la ~~norma~~ distancia C^∞.

Una distribución F en Ω es un funcional lineal y continuo
Vimos que la continuidad se veía como $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$ si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$

Queda que si $F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ (distribuciones) $\Rightarrow \forall K$ compacto vale que $\exists C_K$ y $N > 0$ tal que

$$|F(\varphi)| \leq C_K \|\varphi\|_N$$

Definimos $D^\alpha F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ como $D^\alpha F(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} F(D^\alpha \varphi)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.

OPERACIONES CON DISTRIBUCIONES:

→ Sea $\psi \in C^\infty(\Omega)$ y $F \in \mathcal{D}^*(\Omega) \to \psi . F(\varphi) = F(\psi \varphi)$ es también una distribución (Notar que si ψ no es C^∞ no tiene sentido).

→ Para $F \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$ definimos: → $\tau_h(F)(\varphi) = F(\tau_{-h} \varphi)$

donde $\tau_h(\varphi)(x) = \varphi(x+h)$ con $h \in \mathbb{R}^d$.

→ $F_L(\varphi) = |\det L|\, F(\varphi_{L^{-1}})$ con $\varphi_L(x) = \varphi(Lx)$

Cuando tiene sentido tb lo vamos a definir para $F \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.

CONVOLUCIÓN: Recordar que para f, g funciones, definimos:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\, dy.$$

Algunas propiedades:

→ $f * g = g * f$ (Teorema de cambio de variable)
→ $\alpha(f * g) = (\alpha f) * g$ (trivial)
→ $\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g = f * (\tau_h g)$ (Cambio de variable)

La gracia es que la convolución "suaviza" las funciones (e incluso las distribuciones) como vamos a ver ahora.

Sea $F \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$ y $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vamos a definir $F * \psi$ de dos maneras, como función y como distribución:

→ Como función $(F * \psi)(x) = F(\psi_x^\sim)$ con $\psi_x^\sim(y) = \psi(x-y)$
→ Como distibución $(F * \psi)(\varphi) = F(\psi_0^\sim * \varphi)$ como distribución.

Prop Ambas definiciones "coinciden" (i.e. la distribución inducida por $(F*\psi)$ como funcion es la distribución $(F*\psi)$) y $(F*\psi)$ como función es C^∞.

dem: Notar primero que $\psi_{x_n}^\sim \to \psi_{x_0}^\sim$ en topología C^∞ con lo cual $F(\psi_{x_n}^\sim) \to F(\psi_{x_0}^\sim)$, esto ya da que $\Gamma(x) = F(\psi_x^\sim)$ es continua.

Ahora, notar que si $\eta_r^e = \frac{1}{r}(\tau_0 - \tau_{re})$ tenemos $\eta_r F(\psi_x^\sim) = F(\eta_r \psi_x^\sim)$

$\Rightarrow D^\alpha \Gamma(x) = (-1)^{|\alpha|} F(D^\alpha \psi_x^\sim) = D^\alpha F(\psi_x^\sim)$
$\Rightarrow \Gamma(x)$ es C^∞ y $\Gamma(x) = D^\alpha F(\psi_x^\sim) = F((D^\alpha \psi)^\sim)$

ahora queremos ver que las definiciones coinciden:

$$\int F(\Psi_x^{\sim})\varphi(x)\,dx = F(\Psi_0^{\sim} * \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Tenemos que

$$(\Psi_0^{\sim} * \varphi)(x) = \int \Psi_0^{\sim}(x-y)\varphi(y)\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon)(x)$$

Donde $S(\varepsilon)(x) = \varepsilon^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \Psi_0^{\sim}(x - n\varepsilon)\varphi(n\varepsilon)$ y se cumple que la convergencia de las sumas de Riemann $S(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} (\Psi_0^{\sim} * \varphi)$ es en $\mathcal{D}$.

Para ver esto último notar que $\Psi_0^{\sim}$ y φ son C^∞ de soporte acotado con lo cual todos los resultados de intercambiar límites e integrales valen y las convergencias son todas uniformes.

Aproximaciones de la identidad: Sea $\Psi \in \mathcal{D}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x)\,dx = 1$

y sea $\Psi_n(x) = n^d\,\Psi(nx)$ con lo cual $\int_{\mathbb{R}^d} \Psi_n\,dx = 1$.

Ademas $\operatorname{sop}\Psi_n \subseteq \frac{1}{n}\operatorname{sop}\Psi$

Sea $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow (\varphi * \Psi_n)(x) \longrightarrow \varphi(x)$ uniformemente en x:

Esto último pues

$$\int \varphi(x-y)\Psi_n(y)\,dy = \int \varphi(x-y)\,n^d\,\Psi(ny)\,dy =$$

$$= \int \underbrace{\varphi\left(x - \frac{z}{n}\right)}_{\sim\, cte}\Psi(z)\,dz \cong \varphi(x)\int \Psi(z)$$

Como $D^\alpha(\varphi * \Psi_n) = (D^\alpha\varphi) * \Psi_n$ tenemos que $(\varphi * \Psi_n) \to \varphi$ en $\mathcal{D}$.

<u>Corolario</u>: $F \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d) \Rightarrow (F * \Psi_n)(\varphi) \to F(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

Esto motiva: Denotamos $F_n \to F$ en $\mathcal{D}^*$ si y solo si

$$F_n(\varphi) \to F(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (\text{topología débil } *).$$

Corolario: Las funciones $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ son densas en $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Notar tb que $F_n \to F \Rightarrow D^\alpha F_n \to D^\alpha F \ \forall \alpha$.

Soporte de una distribución

Decimos que F se anula en U (abierto) si $F(\varphi)=0 \ \forall \varphi$ con $\operatorname{sop}\varphi \subseteq U$

Definimos $\operatorname{sop} F = \{ x \text{ tq } F \text{ se anula en un entorno de } x \}^c$

Obs: Si F se anula en abiertos $\{U_i\} \Rightarrow F$ se anula en $U = \bigcup U_i$ (ejercicio: partición de la unidad) con lo cual $\operatorname{sop} F$ está bien definido.

Tenemos:

Prop Sea $F \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$ con soporte C_1 y $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ con soporte C_2
$\Rightarrow \operatorname{sop}(F * \psi) \subseteq C_1 + C_2$.

dem: De hecho, si $\operatorname{sop} F \cap \operatorname{sop} \tilde{\psi}_x = \emptyset \Rightarrow F(\tilde{\psi}_x) = 0$

El soporte de $\tilde{\psi}_x$ es $x - C_2$ con lo cual

$y \in \operatorname{sop}(F * \psi) \Rightarrow \exists z \in C_1 \cap (y - C_2) \Rightarrow z = v \in C_1$
$z = y - w$ con $w \in C_2$

$\Rightarrow y = v + w \Rightarrow y \in C_1 + C_2$.

■

Podemos definir $F * G$ si G tiene soporte compacto como $(F*G)(\varphi) = F(\tilde{G} * \varphi)$ con $\tilde{G}(\varphi) = G(\tilde{\varphi}_0)$ porque $\tilde{G} * \varphi \in \mathcal{D}$.

Obs: δ de dirac es la identidad.

CLASE 14: TRANSFORMADA DE FOURIER.

Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, cuando tiene sentido (p.ej. $f\in L^1$) definimos $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

como $$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-2\pi i \xi x}\,dx \qquad (\text{a veces notamos } \hat{f}=\mathcal{F}(f))$$

Obs Si $f\in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}\in C^0(\mathbb{R})$ (aunque puede no ser integrable): Ejercicio.
Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ y es continua $\Rightarrow \hat{f}(\xi)\to 0$ con $|\xi|\to+\infty$.

Definimos $$\mathcal{S}(\mathbb{R})=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}) \,/\, \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k|f^{(\ell)}(x)|<\infty \quad \forall k,\ell\geq 0\}$$

Tenemos que $\mathcal{S}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y si $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow P(x)f^{(\ell)}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todo polinomio P y $\ell\geq 0$.

Ejemplos: $\to \mathcal{D}(\mathbb{R})\subseteq\mathcal{S}$
$\to f(x)=e^{-ax^2}$ con $a>0$. (o $Re(a)>0$)

Proposición: Si $f\in\mathcal{S}\Rightarrow$
(i) $f(x+h)\longmapsto \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi h}$ $\quad\forall h\in\mathbb{R}$.
(ii) $e^{-2\pi i x h}f(x)\longmapsto \hat{f}(\xi+h)$ $\quad\forall h\in\mathbb{R}$.
(iii) $f(\delta x)\longmapsto \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$ $\quad\forall\delta>0$
(iv) $f'(x)\longmapsto (2\pi i\xi)\hat{f}(\xi)$
(v) $(-2\pi i x)f(x)\longmapsto \hat{f}'(\xi)$.

dem: de (i)-(iii) son bien directas de la definición.

(iv) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-2\pi i x\xi}dx \stackrel{\text{partes}}{=} \underbrace{\left[f(x)e^{-2\pi i x\xi}\right]\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i\xi)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

(v) $$\left|\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} - \left(\widehat{(-2\pi i x)f}\right)(\xi)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\left[\frac{e^{-2\pi i x h}-1}{h}+2\pi i x\right]dx\right|$$

Tomamos $N>0$ tq $\int_{|x|\geq N}|f|dx$ y $\int_{|x|>N}|x||f(x)|dx$ son $<\varepsilon$

Fijado $N>0$ existe h_0 tq si $|h|<h_0 \Rightarrow \left|\frac{e^{-2\pi i x h}-1}{h}-2\pi i x\right|<\varepsilon/N$ ∎

<u>Corolario</u>: Si $f \in S \Rightarrow \hat{f} \in S$.

§ <u>GAUSSINAS</u>: Recordar (calculo 2) que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$.

<u>Teorema</u>: Si $f(x) = e^{-\pi x^2} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$

<u>dem</u>: $\hat{f}(0) = 1$ por lo de arriba.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx$$

$$\frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\pi x^2}(-2\pi i x)}_{i f'(x)} e^{-2\pi i x \xi} dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = i(2\pi i \xi)\hat{f}(\xi)$$

$\Rightarrow \dfrac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi) = -2\pi \xi \hat{f}(\xi)$ con $\hat{f}(0) = 1$ tenemos $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi x^2}$.

<u>Corolario</u> Si $\delta > 0$ y $K_\delta(x) = \delta^{1/2} e^{\frac{-\pi x^2}{\delta}} \Rightarrow \hat{K}_\delta(\xi) = e^{-\pi \delta \xi^2}$

Obtenemos que: $\rightarrow \int_{-\infty} K_\delta(x) dx = 1$ y $K_\delta \geq 0$

$\rightarrow \forall \eta > 0$ tenemos $\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx \rightarrow 0$ con $\delta \rightarrow 0$

[Es decir: $K_{1/n}$ es una "identidad aproximada"]

Deducimos:

<u>Teorema</u> Sea $f \in S \rightarrow (f * K_\delta)(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente en x con $\delta \rightarrow 0$.

<u>dem</u>: Igual a las identidades aproximadas pero acotando la parte de los $|x| > \eta$.

<u>Prop</u> Si $f, g \in S \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) g(y)\,dy$.

<u>dem</u>: Vamos a usar Fubini (notar que como $f, g \in S$ todo converge bien)

Sea $F(x,y) = f(x) g(y) e^{-2\pi i x y}$

$F_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,dy = f(x)\hat{g}(x)$, $F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,dx = \hat{f}(y) g(y)$

$\Rightarrow \int F_1 = \int F_2 = \iint F$ como queríamos. ☒

§ <u>INVERSIÓN</u>: Si $f \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow f(x) = \int_{-\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}\,d\xi$.

<u>dem</u>: Mostramos primero que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,d\xi$

Sea $G_\delta(x) = e^{-\pi \delta x^2} \Rightarrow G_\delta(x) \rightarrow 1$ uniforme en compactos si $\delta \rightarrow 0$

Se ve que $\hat{G}_\delta(\xi) = K_\delta(\xi) \Rightarrow$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K_\delta(x)\,dx}_{\downarrow \delta\to 0 \;\; f(0)} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) G_\delta(\xi)\,d\xi}_{\downarrow \delta \to 0 \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,d\xi}$$

como queríamos.

En general, sea $F(y) = f(x+y) \Rightarrow f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\xi)\,d\xi$.

Pero $\hat{F}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$ lo cual concluye. ☒

Obtenemos $\mathcal{F}: S \rightarrow S$ tq $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\,dx$

$\mathcal{F}^*: S \rightarrow S$ tq $\mathcal{F}^*(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi i x \xi}\,dx$

Se deducen que $\mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = Id_S$ (vimos $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = Id$, pero notando

$\rightarrow \mathcal{F}$ ... $\mathcal{F}^*(f)(y) = \mathcal{F}(f)(-y)$ se ve la

<u>Prop</u> Sean $f, g \in S \Rightarrow$ (i) $f * g \in S$
(ii) $f * g = g * f$
(iii) $\widehat{(f * g)} = \hat{f}\,\hat{g}$

<u>dem</u>: (i) y (ii) fáciles
(iii)

Definimos $F(x,y) = f(y)\, g(x-y)\, e^{-2\pi i x \xi}$

$$\left.\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,dy = (f*g)(x)\, e^{-2\pi i x \xi} \\ F_2(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,dx = f(y)\, \hat{g}(\xi)\, e^{-2\pi i y \xi} \end{aligned}\right\} \underset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} \widehat{(f*g)} = \hat{f}\,\hat{g}.$$

$\boxtimes$

Vamos a considerar en S la norma:

$$\| f \|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dx \right)^{1/2}$$

<u>Teorema</u> (Plancherel) Si $f \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \| f \| = \| \hat{f} \|$

<u>dem</u>: Sea $f \in S(\mathbb{R})$, definimos $f^b(x) = \overline{f(-x)}$

Entonces $\widehat{f^b}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$

Consideramos $h = f * f^b \Rightarrow \hat{h}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2$

Obtenemos $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\xi)\, d\xi = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$

$\boxtimes$

Por lo tanto $\mathcal{F}$ se extiende a una isometría isométrica de $L^2(\mathbb{R})$.

CLASE 15:

$$S(\mathbb{R}^d) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ tq } \|f\|_N = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d \\ |\alpha|,|\beta|\leq N}} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty \ \forall N \}$$

Dotamos a $S(\mathbb{R}^d)$ con una topología vectorial (espacio de Frechet)

$$\varphi_n \to \varphi \text{ en } S \quad \text{sii} \quad \|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0 \quad \forall N$$

Decimos que F es una <u>distribución</u> <u>temperada</u> si es un funcional lineal y continuo de S en $\mathbb{K}$.

<u>Notar</u>: $S^*(\mathbb{R}^d) \subseteq D^*(\mathbb{R}^d)$ (estrictamente pues $e^{|x|^2} \notin S^*$)

<u>Obs</u> Si $F \in S^* \Rightarrow \exists N > 0$ y $c > 0$ tq $|F(\varphi)| \leq c\|\varphi\|_N \ \forall \varphi \in S$.

<u>dem</u>: Si no, $\exists \psi_n$ con $\|\psi_n\|_n = 1$ y $|F(\psi_n)| > a_n$ con $a_n \to +\infty$

Sea $\varphi_n = \psi_n / a_n \Rightarrow \|\varphi_n\|_N < \|\varphi_n\|_{n} = \frac{1}{a_n}$ con $n > N \Rightarrow \varphi_n \to 0$

sin embargo $|F(\varphi_n)| \geq 1$ violando la continuidad.

Dado $F \in S^*$ y $\psi \in S$ definimos $(F * \psi)(x) = F(\psi_x^\sim)$ que es C^∞ y da lugar a una distribución temperada tq:

$$(F*\psi)(\varphi) = F(\psi_0^\sim * \varphi)$$

<u>Nota</u>: Si F distribución cualquiera y G es distr. de soporte compacto tiene sentido

$$(F*G)(\varphi) = F(G^\sim * \varphi) \quad \text{con} \quad G^\sim(\varphi) = G(\varphi_0^\sim)$$

pues $G^\sim * \varphi$ es de soporte compacto. Si F es <u>temperada</u> también lo es $F*G$ (práctico).

Si $F \in S^*$ podemos definir $\hat{F} \in S^*$ como

$$\hat{F}(\varphi) = F(\hat{\varphi}) \qquad \left(\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \right)$$

Si $\varphi \mapsto \varphi^{\vee}$ es la inversa $\left(\varphi^{\vee}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \right)$

tenemos $(F^{\wedge})^{\vee} = F$

<u>Prop</u>: 1) $\widehat{(D^{\alpha} F)} = (2\pi i \xi)^{\alpha} \hat{F}$

2) $\widehat{((-2\pi i x)^{\alpha} F)} = D^{\alpha} \hat{F}$

3) $\hat{\delta} = 1$

4) $\widehat{(F * \psi)} = \hat{F} \hat{\psi}$ (en particular tiene sentido)

Para 4) hay que notar que $(\hat{\psi})^{\wedge} = \psi_0^{\sim}$.

<u>Ejemplo</u>: $\widehat{(e^{2\pi i x a})} = \delta_a$

$$\widehat{\cos(2\pi x a)} = \frac{\delta_a + \delta_{-a}}{2}$$

CLASE 16: Sea $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ un operador diferencial

Una solución fundamental de L es una distribución F tal que

$$L(F) = \delta$$

Si existe una tal solución fundamental, tenemos que $\forall f \in S$ vale que si queremos resolver $L(u) = f \Rightarrow u = F * f$ sirve de solución.

Supongamos ahora en más que a_α son constantes (no funciones).
En dicho caso obtenemos que si F es una distribución cualquiera (temperada)
$\Rightarrow$

$$(LF)^\wedge = P(\xi)\,\hat{F}(\xi)$$

donde $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} (2\pi i \xi)^\alpha$ y $\hat{F}(\xi)$ se escribe así para "indicar" la "variable".

Una solución fundamental tiene que cumplir que $(LF)^\wedge = 1 \Rightarrow$ que $\hat{F} = 1/P(\xi)$ por lo tanto, la solución fundamental, si es que tiene sentido sería de la forma:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{2\pi i \langle x, \xi\rangle}}{P(\xi)}\, d\xi .$$

§ LAPLACIANO: Vamos a ver el siguiente ejemplo $\Delta = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$ en $\mathbb{R}^d$

Nos interesa resolver $\Delta u = f$ (ecuación de Poisson)

Notar que el polinomio característico de Δ es $P_\Delta(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2$.

Se cumple que $1/P_\Delta(\xi) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ sii $d \geq 3$

(Recordar que $\int \varphi(x)\,dx = \int \int^{+\infty} \varphi(r,\theta)\, r^{d-1}\, dr\, d\theta$)

Vamos a ver el siguiente resultado con $d \geq 3$:

Teorema Para $d \geq 3$ $\exists C_d$ tq $F(x) = C_d |x|^{-d+2}$ es una solución fundamental para Δ. Además, se cumple que
$$C_d = -\frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{d/2}}$$

Recordar $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt$ $\left(\overset{\text{interpola}}{\overset{\shortparallel}{\text{generaliza}}} \text{ el factorial}\right)$

dem: Vamos a usar la gaussiana para ver que la transformada de Fourier de $|x|^{-d+2}$ es un múltiplo de $|\xi|^{-2}$.

Sea $\psi(x) = e^{-\pi|x|^2} \Rightarrow \hat{\psi} = \psi$ y $\widehat{\psi(\delta x)} = \delta^{-d}\psi(\delta^{-1}\xi)$

Entonces: $\left(e^{-\pi t|x|^2}\right)^\wedge = t^{-d/2} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t}}$

Sea $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ cualquiera y tenemos que:
$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t|x|^2}\hat{\varphi}(x)\,dx}_{A} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t}}\varphi(\xi)\,d\xi}_{B}.$$

~~Vamos a multiplicar ambos lados por $t^{-\frac{d}{2}}$ e integrar en $(0,\infty)$~~

$$\cancel{A \to \int_0^\infty t^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t|x|^2}\hat{\varphi}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(x)\underbrace{\int_0^\infty t^{-\frac{d}{2}} e^{-\pi t|x|^2}\,dt}_{A'}}$$

$$\cancel{\text{con } A' = \int_0^\infty \left(\frac{u}{\pi|x|^2}\right)^{-\frac{d}{2}} e^{u}\frac{du}{\pi|x|^2} = \pi^{\frac{d}{2}}\cdot|x|^{d-2}\,\Gamma}$$

$\cancel{\text{CV: } u = \pi t|x|^2,\ du = \pi|x|^2 dt}$

Vamos a calcular:

$$\int_0^\infty A\,dt = \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t|x|^2}\hat{\varphi}(x)\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(x)\int_0^\infty e^{-\pi t|x|^2}dt\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{\varphi}(x)\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\pi|x|^2}\,du\,dx$$

$$= \pi^{-1}\Gamma(1)\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{-2}\hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$\int_0^\infty B\,dt = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\xi)\underbrace{\int_0^\infty t^{-d/2}e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{t}}dt}_{C}\,d\xi \qquad CV:\ u=\frac{1}{t}$$

$$C = \int_0^\infty u^{d/2}e^{-\pi u|\xi|^2}\frac{1}{u^2}du = \int_0^\infty\left(\frac{v}{\pi|\xi|^2}\right)^{\frac{d}{2}-2}e^{-v}dv = \pi^{-\frac{d}{2}+1}|\xi|^{-d+2}\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty B\,dt = \pi^{-\frac{d}{2}+1}\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{-d+2}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Como $\int_0^\infty A\,dt = \int_0^\infty B\,dt$ obtenemos que la transformada de Fourier de $|x|^{-2}$ es algo por $|\xi|^{-d+2}$

El resto de las cuentas no aporta mucho más.

Obs: Notar que F cumple $\Delta F = \delta$, eso significa que $|x|^{-d+2}$ es armónica fuera de 0 (lo cual se chequea fácil) lo difícil es ver como se va a infinito en 0 para que el $\Delta F=\delta$.

Obtuvimos que dada $f\in S$ podemos obtener una solución de $\Delta u = f$ como $u = F * f$ y además esta solución será única.

Se puede aplicar esto para encontrar soluciones a $\Delta u = f$ en $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ abierto? Pensar como ejercicio.

Acerca de la unicidad:

Supongamos que u y v cumplen $\Delta u = \Delta v = f$

Entonces, $\Delta(u-v) = 0$ con lo cual queremos resolver $\Delta u = 0$

Para resolver $\Delta u = 0$ necesitamos que $\hat{u}$ cumpla que:

$|x|^2 \hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u}$ esta soportada en 0 y no puede tener derivadas de orden mayor que 1. (ver práctica 6)

$\Rightarrow$ u es un polinomio armónico.

(nota: $e^x \cos y$ es solución pero no es temperada!)

Algunos resultados más que no vamos a probar:

Teorema: Cuando $d=2$ la solución fundamental de Δ es $F(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|$

Para EDP's generales se cumple el siguiente teorema:

Teorema Toda EDP lineal a coeficientes constantes $Lu = f$ tiene una solución fundamental

<u>CLASE 17</u>: Decimos que una distribución F <u>coincide</u> con una función f en un abierto U si se cumple que $\forall \varphi$ soportada en U vale que

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi \, dx .$$

Dado L un operador diferencial, una <u>parametriz</u> para L es una distribución Q tal que

$$LQ = \delta + r \quad \text{con} \quad r \in S.$$

Decimos que Q es una <u>parametriz regular</u> si Q es C^∞ fuera de 0 (es decir, coincide con una función C^∞ fuera de 0 i.e $\mathbb{R}^d - \{0\}$).

Si L admite una <u>parametriz regular</u> decimos que L es <u>hipoelíptica</u> (ejemplo $L = \Delta$ vimos que lo es, pero $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ el operador de calor también lo es).

<u>Prop</u>: Si L admite una parametriz regular $Q \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ existe una parametriz regular Q_ε soportada en $B_\varepsilon(0)$ y tal que $LQ_\varepsilon = \delta + r_\varepsilon$ con r_ε soportada en $B_\varepsilon(0)$.

<u>dem</u>: Sea $\eta_\varepsilon \in \mathcal{D}$ tal que $\operatorname{sop} \eta_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(0)$ y $\eta_\varepsilon \equiv 1$ en $B_{\varepsilon/2}(0)$

Sea $Q_\varepsilon = \eta_\varepsilon Q$; si $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \Rightarrow$

$$\to L(\eta_\varepsilon Q)(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (\eta_\varepsilon Q)(D^\alpha \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha Q(\eta_\varepsilon D^\alpha \varphi)$$

$$\to \eta_\varepsilon L(Q)(\varphi) = L(Q)(\eta_\varepsilon \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha Q(D^\alpha(\eta_\varepsilon \varphi))$$

Entonces, $L(\eta_\varepsilon Q) - \eta_\varepsilon L(Q)$ es 0 donde las derivadas de η_ε es localmente cte ($\Rightarrow \operatorname{sop}(L(\eta_\varepsilon Q) - \eta_\varepsilon L(Q)) \subseteq B_\varepsilon(0) \setminus B_{\varepsilon/2}(0)$)

Como <u>Q es C^∞</u> tenemos que $L(\eta_\varepsilon Q) - \eta_\varepsilon L(Q)$ es una función C^∞ soportada en $B_\varepsilon(0) \setminus B_{\varepsilon/2}(0)$.

Por otro lado, $\eta_\varepsilon L(Q) = \eta_\varepsilon(\delta + r) = \delta + \eta_\varepsilon r$

con lo cual $L(\eta_\varepsilon Q)$ necesariamente es $\delta + r_\varepsilon$ con $\operatorname{sop} r_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(0)$

$\boxtimes$

Nota: Si Q no es C^∞ esta proposición no es clara!.
- No usamos que los a_α sean constantes.

Teorema Sea L un operador diferencial hipoelíptico y sea $U \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $LU = f$ con $f \in C^\infty(\Omega)$. Entonces U coincide con una función $C^\infty(\Omega)$.

dem: Alcanza mostrar que U coincide con una función C^∞ en cualquier bola B con $\overline{B} \subseteq \Omega$.
Fijamos una tal bola y $\varepsilon > 0$ tal que si B_ε es un ε-entorno de $\overline{B}$ $\Rightarrow \overline{B_\varepsilon} \subseteq \Omega$.

Sea $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\eta = 1$ en un entorno de $\overline{B_\varepsilon}$.

Definimos $U_1 = \eta U \Rightarrow U_1$ y $L(U_1) = F_1$ son de soporte compacto en $\mathbb{R}^d$

Además, F_1 coincide con f en un entorno de $\overline{B_\varepsilon}$. Cortando con un chichon podemos suponer que F_1 coincide con una función de $\mathcal{D}(\Omega)$ f_1 en un entorno (quizás más pequeño) de $\overline{B_\varepsilon}$.

Sea Q_ε la parametriz regular soportada en $B_\varepsilon(0) \Rightarrow$ por un lado:

$$Q_\varepsilon * L(U_1) = L(Q_\varepsilon) * U_1 = (\delta + r_\varepsilon) * U_1 = U_1 + r_\varepsilon * U_1.$$

por otro

$$Q_\varepsilon * L(U_1) = Q_\varepsilon * F_1 = Q_\varepsilon * f_1 + Q_\varepsilon * (F_1 - f_1)$$

Entonces: $$U_1 = Q_\varepsilon * f_1 + Q_\varepsilon * (F_1 - f_1) - r_\varepsilon * U_1$$

y Tenemos que tanto $U * r_\varepsilon$ como $Q_\varepsilon * f_1$ son funciones C^∞ y como $sop(F_1 - f_1) \cap \overline{B_\varepsilon} = \emptyset$ y el soporte de una convolución es la suma de los soportes, tenemos que:

$$Q_\varepsilon * (F_1 - f_1) = 0 \text{ en } \overline{B}$$

$\Rightarrow U_1$ es C^∞ en $\overline{B}$ $\Rightarrow U$ es C^∞ en $\overline{B}$.

Sea $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ un operador a coeficientes constantes.

Decimos que L es <u>elíptico</u> si su polinomio característico verifica que $|P(\xi)| \geq c|\xi|^m$ donde m es el mayor $|\alpha|$ tq algún $a_\alpha \neq 0$.

Esto es equivalente a que la <u>parte principal</u> $\left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha \right)$ se anula solo en 0.

<u>Teorema</u> Todo operador elíptico es hipoelíptico (tiene parametriz regular)

<u>dem</u>: Supongamos que $\forall |\xi| > A \geq 0$ tenemos $|P(\xi)| > c|\xi|^m$

Consideramos $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\gamma(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \geq 3A \\ 0 & \text{si } |\xi| \leq 2A. \end{cases}$

Entonces, como $P(\xi)$ no se anula en $|\xi| > 2A$ tenemos que la funcion $\frac{\gamma(\xi)}{P(\xi)}$ es C^∞ y acotada. ($\Rightarrow$ define distr. temperada)

Denotamos por $Q = \left(\frac{\gamma(\xi)}{P(\xi)} \right)^\vee$ la antitransformada de Fourier

Tenemos:

$$(LQ)^\wedge = P(\xi) \left(\frac{\gamma(\xi)}{P(\xi)} \right) = \gamma(\xi) = 1 + [\gamma(\xi) - 1]$$

$\Rightarrow$ $LQ = \delta + [\gamma(\xi) - 1]^\vee$ pero como $\gamma(\xi) - 1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq S$ tenemos que $[\gamma(\xi) - 1]^\vee \in S(\mathbb{R}^d)$

Esto quiere decir en particular que Q es efectivamente una parametriz.

Falta ver que es regular, es decir, coincide con una función C^∞ fuera de O.

Sea β un multiíndice cualquiera, entonces:

$$\left((-4\pi^2|x|^2)^N D^\beta Q \right)^\wedge = \Delta^N \left[(2\pi i \xi)^\beta \left(\frac{\gamma(\xi)}{P(\xi)} \right) \right]$$

Afirmamos que la elipticidad de P implica que (*)

$$\Delta^N \left[(2\pi i \xi)^\beta \left(\frac{\gamma(\xi)}{P(\xi)} \right) \right] \leq A_\beta \, |\xi|^{-m-2N+|\beta|} \quad \text{para } |\xi| \text{ grandes.}$$

Como además está acotado para $|\xi|$ chicos por ser C^∞ tenemos que si $2N+m-|\beta| > d \Rightarrow$ la función es integrable si N fue elegido suficientemente grande $\Rightarrow$

su antitransformada $(-4\pi^2|x|^2)^N D^\beta Q$ es continuo en $\mathbb{R}^d$

$\Rightarrow D^\beta Q$ es continuo en $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y esto vale $\forall \beta \Rightarrow \checkmark$

(*) En realidad, nos alcanza saber que aplicando Δ suficientes veces se tiene que las derivadas van a cero como $1/|\xi|^{d+1}$ al menos

Pero derivar un cociente de polinomios siempre hace que el de abajo quede al cuadrado y a lo de arriba le baja el grado.

Eso significa que esto puede perfectamente quedar como ejercicio.

CLASES 18 a 24: APLICACIONES DEL TEOREMA DE BAIRE

Teo (Baire) Sea X un espacio métrico completo $\Rightarrow$ la intersección numerable de conjuntos abiertos y densos en X es densa.
Equivalentemente, la unión numerable de cerrados con interior vacío tiene complemento denso.

Def: Un conjunto $\mathcal{R} \subseteq X$ se dice residual si contiene una intersección numerable de abiertos densos. (tb se dicen de segunda categoría)
Un conjunto $\mathcal{M}$ se dice magro si está contenido en la unión numerable de cerrados con interior vacío. (tb se dicen de primera categoría)

Teorema (Acotación uniforme ó Banach-Steinhaus)
Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{L} \subseteq X^*$ una familia de funcionales lineales y continuos. Entonces, si $\exists \mathcal{R} \subseteq X$ residual tal que

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{L}} |\varphi(x)| < \infty \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Entonces
$$\sup_{\varphi \in \mathcal{L}} \|\varphi\| < \infty$$

Nota: Esto es interesante incluso si la hipótesis fuera $\sup_{\varphi \in \mathcal{L}} |\varphi(x)| < \infty \ \forall x \in X$

dem: Sea $E_M = \{ x \in X$ tal que $\sup_{\varphi \in \mathcal{L}} |\varphi(x)| \leq M \}$ con $M \in \mathbb{N}$.

La hipótesis nos dice que $\mathcal{R} \subseteq \bigcup_{M=1}^{\infty} E_M$

Por otro lado, $E_M = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{L}} \{ x \ / \ |\varphi(x)| \leq M \}$ es cerrado pues $\forall \varphi \in \mathcal{L}$ es continua

$\Rightarrow \exists M_0 > 0$ tal que E_{M_0} tiene interior no vacío (sino $\bigcup E_M$ es magro)
$\Rightarrow \exists x_0 \in E_{M_0}$ tal que $\exists \varepsilon > 0$ con $\|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow x \in E_{M_0}$.

$\Rightarrow \ |\varphi(x)| \leq M_0 \ \ \forall \varphi \in \mathcal{L}$

Para $\|y\| < \varepsilon$ tenemos que si $\varphi \in \mathcal{L}$

$$\Rightarrow |\varphi(y)| \leq |\varphi(y+x_0)| + |\varphi(-x_0)| \leq 2M_0$$

$$\Rightarrow \|\varphi\| \leq \frac{2M_0}{\varepsilon} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{L}.$$

$\blacksquare$

Nota: El teorema es más general (por ejemplo, si X es de Frechét funciona)

Aplicación: SERIES DE FOURIER

Sea $X = C^0([-\pi,\pi])$ con la norma del supremo (a valores complejos)

Para $f \in X$ definimos $\quad a_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Sea $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ la N-ésima suma de Fourier.

Sabemos que $S_N(f) \xrightarrow[N\to\infty]{} f$ en L^2.

No es difícil ver que $\quad S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$

donde $\quad D_N = \sum_{i=-N}^{N} e^{inx} \quad \left(f*g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy \right)$

Teorema Hay un residual $\mathcal{R} \subseteq X$ de funciones tal que $S_N(f)(x)$ diverge para un conjunto denso $G \subseteq [-\pi,\pi]$.

Obs De hecho, para cada denso numerable G $\exists\, \mathcal{R}_G \subseteq X$ residual tq diverge ahí.

dem: Fijamos $x \in [-\pi,\pi]$ y definimos $\varphi_N(f) = S_N(f)(x)$ que es un funcional lineal de X en $\mathbb{C}$.

Notar que si $L_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|\,dy$ entonces φ_N es continua y $\|\varphi_N\| = L_N$. (acá hay detall[illegible]

Por otro lado, sabemos que $L_N \to \infty$ y esto se puede hacer acotando la integral y viendo que $L_N \geq C \log N$.

Ahora, el Teorema de Acotación uniforme nos dice que si

$$\sup_N |\varphi_N(f)| < \infty \quad \text{para un residual de } f \in X$$

$$\Rightarrow \quad \sup_N \|\varphi_N\| < \infty \quad \text{pero sabemos que no es así.}$$

Entonces, $\exists\, \mathcal{R}_x \subseteq X$ residual tal que si $f \in \mathcal{R}_x \Rightarrow S_N(f)(x)$ diverge.

Considerando $G \subseteq [-\pi, \pi]$ denso numerable se tiene que $\bigcap_{x \in G} \mathcal{R}_x = \mathcal{G}$ es un residual donde las series divergen en todo punto de G.
~~Por otro lado~~

$\boxtimes$

<u>Obs</u>: Que $S_N(f)(x)$ diverja es G_δ: Es decir, los $x \in [-\pi, \pi]$ tales que $S_N(f)(x)$ diverge es una intersección numerable de abiertos $\Rightarrow$ si es denso es automaticamente residual.

Esto contrasta con un célebre teorema de Carlesson que afirma que la serie de fourier de una función continua converge Lebesgue-ctp.

APLICACIÓN ABIERTA & GRÁFICO CERRADO

<u>Teorema</u> (Aplicación abierta) Sean X, Y espacios de Banach y $T: X \to Y$ una transf. lineal y continua tal que $T(X) = Y$ entonces $T(U)$ es abierto $\forall\, U \subseteq X$ abierto.

<u>dem</u>: Como T es lineal alcanza mostrar que $T(B^X(0,1))$ contiene una bola centrada en el origen de Y:

De hecho, si U es abierto y queremos ver que $T(U)$ es abierto, tomamos $y \in T(U)$ tq $y = T(x) \Rightarrow U - x$ contiene una bola de $0 \Rightarrow T(U) - y$ también y se prueba que $T(U)$ es abierto.

Primero vamos a ver que $\overline{T(B^X(0,1))}$ contiene una bola del origen de Y.

Como $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B^X(0,n))}$ el Teorema de Baire garantiza que $\exists n_0$ tal que $\overline{T(B^X(0,n_0))}$ tiene interior no vacío.

Por linealidad, $\overline{T(B^X(0,1))}$ también tiene interior (pero a priori 0 no está en el interior).

Sea $y_0 \in int(\overline{T(B^X(0,1))})$ y $\varepsilon > 0$ tq $\forall y \in Y$ con $\|y - y_0\| < \varepsilon$ tenemos $y \in \overline{T(B^X(0,1))}$.

$\Rightarrow \exists y_1 \in T(B^X(0,1))$ tal que si $y \in Y$ y $\|y - y_1\| < \varepsilon/2 \Rightarrow y \in \overline{T(B^X(0,1))}$

Sea x_1 tq $T(x_1) = y_1$ y $z \in B^Y(0, \varepsilon/2)$

$\Rightarrow$ $z = T(x_1) + z - y_1$ y como $z - y_1 \in \overline{T(B^X(0,1))}$ obtenemos $x_n \in B^X(0,1)$ tal que $T(x_n) \to z - y_1$

Entonces $T(x_1 + x_n) \to z \Rightarrow z \in \overline{T(B^X(0,2))}$

Concluimos $B^Y_{\varepsilon/4}(0) \subseteq \overline{T(B^X(0,1))}$ por linealidad.

Pero entonces, (*) $B^Y(0, \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2^{-k}) \subseteq \overline{T(B^X(0,2^{-k}))}$ $\forall k \geq 1$.

Sea $y_0 \in B^Y(0, \varepsilon/8)$ elegimos inductivamente x_k con $\|x_k\| < 2^{-k}$ y tal que $y_0 - T(x_1) - \dots - T(x_k) \in B^Y(0, \varepsilon/4\, 2^{-k})$ que se logra por (*)

Como X es de Banach obtenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge a $x \in B^X(0,1)$ y concluimos la prueba.

$\boxtimes$

<u>Nota</u>: Alcanza pedir que $T(X)$ sea residual en Y (la sobreyectividad sale de consecuencia.

<u>Corolario</u>: Sean X, Y espacios de Banach y $T: X \to Y$ continuo y biyectivo $\Rightarrow T^{-1}$ es continuo, en particular, $\exists\, 0<c<C$ tal que:

$$c\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

<u>dem</u>: Continua y biyectiva + abierta $\Rightarrow$ homeo.

<u>Corolario</u>: Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach y $\|\cdot\|'$ una norma en X que lo hace completo y tal que $\|x\|' \leq C\|x\|$ para algún $C > \forall x \in X$ $\Rightarrow \| \, \|$ y $\| \, \|'$ son equivalentes.

Sea $T: X \to Y$ un mapa lineal, denotamos

$$Graf(T) = \{(x,y) \in X \times Y \,/\, y = T(x)\}.$$

<u>Teorema</u> (Gráfico Cerrado) Sean X, Y espacios de Banach y $T: X \to Y$ lineal tal que $Graf(T)$ es cerrado (i.e: si $x_n \in X$ y se tiene $x_n \to x$, $T(x_n) \to y \Rightarrow y = T(x)$) Entonces T es continuo.

<u>dem</u> $Graf(T)$ es un subespacio de $X \times Y$ que es un espacio de Banach con la norma $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Si $Graf(T)$ es cerrado $\Rightarrow$ es de Banach

Sean $P_X: Graf(T) \to X$ y $P_Y: Graf(T) \to Y$ las proyecciones que son lineales y continuas (por ser restricciones de mapas lineales y continuas).

Por ser T función, P_X es biyectiva $\Rightarrow$ por el Teo de aplicación abierta es un homeo $\Rightarrow$

$$T = P_Y \circ P_X^{-1} \text{ es continua como queríamos}$$

TEOREMA ESPECTRAL

Consideramos H espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, la razón es que vale

Prop Sea $T \in \mathcal{B}(H) = \{$operadores lineales y continuos de H en $H\}$ tal que $\langle Tx, x\rangle = 0 \ \forall x \in H \Rightarrow T \equiv 0$.

dem: Sean $x, y \in H$, Tenemos:

$$0 = \langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle$$

Entonces $\quad \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0 \quad \forall x, y$

Similarmente (tomando $x+iy$) Tenemos $\quad -i\langle Tx, y\rangle + i\langle Ty, x\rangle = 0 \quad \forall x, y$

$$\Rightarrow \quad 2i\langle Ty, x\rangle = 0 \quad \forall x, y \ \Rightarrow T \equiv 0.$$

$\blacksquare$

Nota: Esto es falso en $\mathbb{R}$ (pensar la rotación de $90°$ en $\mathbb{R}^2$).

Dado $T \in \mathcal{B}(H)$ definimos $T^* \in \mathcal{B}(H)$ como el operador definido por

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \qquad \forall x, y \in H$$

(Por Riesz esto determina T^*).

Se prueba fácil que (como en Álgebra lineal 2):

Prop:
- $(T+S)^* = T^* + S^*$
- $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
- $(TS)^* = S^* T^*$
- $(T^*)^* = T$
- $\|T^*\| = \|T\|$. en part. T^* es continuo.

Dado $T \in \mathcal{B}(H)$ definimos $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda Id$ no es invertible$\}$ que llamamos <u>espectro</u> de T

Notar que $T - \lambda Id$ no invertible no implica que $Ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}$.

Ejemplo: $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\geq 0} : \sum |x_n|^2 < \infty\}$

$T: \ell^2(\mathbb{N}) \circlearrowleft$ (Shift). $\quad T(\{x_n\}) = \{y_n\}$ tq: $y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ x_{n-1} & \text{si } n\geq 1 \end{cases}$

Tenemos que T no es invertible pero $Ker(T) = \{0\}$. pues T es injectivo.

Definimos $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / Ker(T - \lambda Id) \neq \{0\}\}$ el espectro puntual de T.

Se cumple $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$

Decimos que T es autoadjunto si $T = T^*$

Lema Sea T autoadjunto y $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ tq $\lambda \neq \bar{\mu} \Rightarrow Ker(T-\lambda I) \perp Ker(T-\mu I)$

dem: Sea $x \in Ker(T-\lambda I)$ e $y \in Ker(T-\mu I)$ entonces:

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, \mu y\rangle$$
$$= \bar{\mu}\langle x,y\rangle \Longrightarrow \langle x,y\rangle = 0.$$

■

En realidad los conjugados no es necesario pues:

Prop T es autoadjunta $\Leftrightarrow \langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R} \ \forall v \in H$
En particular, si T es autoadjunta y $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

dem $(\Rightarrow)$ $\langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle = \overline{\langle Tv, v\rangle} \Rightarrow \langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R} \ \forall v \in H$.
$(\Leftarrow)$ Si $\langle Tv,v\rangle \in \mathbb{R} \ \forall v \in H \Rightarrow \langle (T-T^*)v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle - \langle v, Tv\rangle = 0$
$\Rightarrow T - T^* = 0$ como queríamos

■

Prop Sea T autoadjunto $\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$ (Pensar en $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para contraejemplo si no es autoadj) dem: $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, Tx\rangle^{1/2} = M$

$\Rightarrow |\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\| \, \|x\| \, \|x\| \leq M\|x\|^2 \left(= M \text{ si } \|x\|=1\right)$

$\Rightarrow L = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \leq M$

Sean $\|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow$

$$\langle T(x+y), x+y\rangle \leq L\|x+y\|^2$$
$$\langle T(x-y), x-y\rangle \leq L\|x-y\|^2$$

$\Rightarrow 4\,\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle \leq \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)L \leq 2L\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 4L$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle \leq L \quad \forall x,y \Rightarrow M \leq L.$ ∎

Decimos que $T: H \to H$ es compacto si $\overline{T(B(0,1))}$ es compacto para la norma (esto implica en particular acotado, por ende continuo).

[Ejemplo Si $\mathrm{Im}\,T$ es de dimensión finita $\Rightarrow$ es compacto.]

[Prop. Si T compacto y S continuo $\Rightarrow$ TS y ST son compactos.
- Si $\{T_n\}$ compactos y $\|T_n - T\| \to 0 \Rightarrow T$ es compacto.
- Si T es compacto, existen T_n de rango finito tq $\|T_n - T\| \to 0$
- T es compacto $\Leftrightarrow$ T^* es compacto]

dem Lo primero es trivial. Lo segundo es un proceso diagonal estandar. Para lo tercero, notar primero que un espacio métrico compacto es separable $\Rightarrow \overline{T(B(0,1))}$ genera un Hilbert separable y sea $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base de Hilbert de $H' \subseteq H$ tq $\overline{T(B(0,1))} \subseteq H'$.

Sea $Q_n: H \to H$ la proyección ortogonal en $\mathrm{span}\langle\{e_k\}_{k=1}^{n}\rangle$ $\Rightarrow T_n = Q_n T$ es de rango finito y queremos ver que $\|T_n - T\| \to 0$

si no fuera así, tendríamos $c>0$ y $x_n \in B(0,1)$ tal que

$\| Q_n T(x_n) - T(x_n) \| \geq c$ donde $Q_n T(x_n) - T(x_n) = -\sum_{k \geq n} a_k^n e_k$
y $T(x_n) = \sum_{k \geq 0} a_k^n e_k$.

Como T es compacto existe x_{n_j} tal que $T(x_{n_j}) \to y$.

Entonces, para n suficientemente grande vale que $\| Q_n y - y \| \geq c/2$ lo cual es absurdo dado que $Q_n y \to y$.

Lo último queda de ejercicio (Sugerencia: Aproximar T por $T_n \stackrel{=Q_nT}{}$ de rango finito y mostrar que T_n^* es compacto). ☒

<u>Ejemplo</u> Sea $K \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ podemos definir $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ como

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y) dy$$

Si $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$ se puede ver que $\{\varphi_k(x)\varphi_l(y)\}_{k,l}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ (ortonormales es Fubini, el hecho que es base queda como ejercicio).

Entonces $K(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \varphi_k(x)\varphi_l(y)$ con $\sum_{k,l} |a_{k,l}|^2 < \infty$

Definimos $T_n : H \to H$ como

$$T_n(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_n(x,y) f(y) dy \quad \text{donde}$$

$K_n(x,y) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \varphi_k(x)\varphi_l(y)$ Entonces tenemos que $Im(T_n) \subseteq span(\{\varphi_i\}_{i=1}^{n})$

y además $\| K - K_n \|_2^2 = \sum_{\substack{k \geq n \text{ o} \\ l \geq n}} |a_{kl}|^2 \longrightarrow 0 \quad n \to \infty$

Por otro lado $\| (T_n - T)(f) \|_2 \leq \int |K_n - K| |f| dy \stackrel{CS}{\leq} \underbrace{\left(\int |K_n - K|^2 dy \right)^{1/2}}_{g(x)} \| f \|_2 \; \forall x$

Integrando respecto a x vemos que

$$\|(T_n - T)(f)\|_2^2 \leq \|K_n - K\|_2^2 \|f\|_2^2 \quad \forall f$$

$\Rightarrow \|T_n - T\| \to 0$ y concluimos que T es compacto.

Vamos a denotar $T_K(f)(x) = \int K(x,y) f(y) dy$

Llamamos $K'(x,y) = \overline{K(y,x)}$ entonces, una aplicación directa de Fubini nos da que

$$(T_K)^* = T_{K'}$$

Consecuencia: Si K cumple que $K(x,y) = \overline{K(y,x)} \Rightarrow T_K$ es compacto y autoadjunto. //

§TEOREMA ESPECTRAL

Sea H_n una sucesión de subespacios cerrados y ortogonales 2 a 2 de H entonces, definimos

$$\bigoplus H_n = \overline{\text{span}\langle \cup H_n \rangle}$$

Es decir $\bigoplus H_n = \{ x \in H \text{ tq } x = \sum x_n \text{ con } x_n \in H_n \text{ y } \sum |x_n|^2 < \infty \}$

Si $P_n : H \to H_n$ es la proyección ortogonal entonces $\sum_{n=1}^{N} P_n$ converge puntualmente a $P_{\oplus H_n}$.

Teorema (Espectral) Sea T un operador compacto y autoadjunto de H. Entonces, $H = \operatorname{Ker} T \oplus \bigoplus_{\lambda_n \in \sigma_p(T)} \operatorname{Ker}(T - \lambda_n Id)$ y si $P_n : H \to \operatorname{Ker}(T - \lambda_n I)$ son las proyecciones ortogonales tenemos que $T = \sum_{\lambda_n \in \sigma_p(T)} \lambda_n P_n$ donde la suma refiere a convergencia en norma.

La prueba tiene 2 etapas: → Mostrar que $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$ es de dim finita y hay numerables valores propios
→ Mostrar que hay valores propios!

Lema Si T es compacto ~~autoadjunto~~ $\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(T-\lambda I))$ es finita para todo $\lambda \neq 0$

dem: Sea $\{x_n\} \in \operatorname{Ker}(T-\lambda I)$ sucesión ortonormal

$\Rightarrow Tx_n = \lambda x_n$ tiene subsucesión convergente pues T es compacto pero si $x_n \neq x_m \Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 = 2$ con lo cual $\{x_n\}$ es finito. ∎

La misma idea permite mostrar

Lema Si T es compacto y autoadjunto $\Rightarrow \forall c > 0$ hay finitos $\lambda \in \sigma_p(T)$ tal que $|\lambda| > c$. En particular, $\sigma_p(T)$ es a lo sumo numerable.

dem Como T es autoadjunto los espacios propios son ortogonales

Sea $\lambda_n \in \sigma_p(T)$ tq $|\lambda_n| \geq c$ y sean x_n vectores propios de norma 1.

Tenemos $T(x_n) = \lambda_n x_n$ y $\|x_n - x_m\|_2^2 = 2 \quad \forall n \neq m$

Como T es compacto $\{\lambda_n x_n\}$ tiene subsucesión convergente pero
$$\|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 \geq \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geq 2c^2 > 0.$$
∎

Lema Sea T compacto y autoadjunto entonces $\|T\|$ o $-\|T\|$ es valor propio de T.

dem: Tenemos que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}$
esto vale pues T es autoadjunto (lo probamos en una Proposición previa)
Podemos asumir, módulo considerar $-\|T\|$ que

$$\lambda = \|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \quad \text{pues } \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \ \forall x.$$

Además $\lambda > 0$ o $T \equiv 0$ (y no hay nada que probar)

Vamos a probar que $\lambda \in \sigma_p(T)$

Sea $x_n \in H$ con $\|x_n\|=1$ tal que $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda$

Como T es compacto, módulo subsucesión, podemos suponer que $Tx_n \to y \in H$. Queremos ver que $Ty=\lambda y$ y $y\neq 0$.

$$\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Tx_n\| - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2\|x_n\|^2 \leq$$

$$\leq \|T\|^2\|x_n\|^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2\|x_n\|^2 =$$

$$= 2\lambda^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1} - 2\lambda \underbrace{\langle Tx_n, x_n\rangle}_{\downarrow \lambda} \to 0$$

Como $Tx_n \to y$ deducimos que $\lambda x_n \to y$ y por continuidad deducimos que

$$\left.\begin{array}{l} T(\lambda x_n) = \lambda T(x_n) \to \lambda y \\ T(\lambda x_n) \to T(y) \end{array}\right\} \Rightarrow T(y) = \lambda y$$

como queríamos.

Por otro lado, $y \neq 0$ pues si no $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$ y $\|T\|=0 \Downarrow T=0$.

[Observación: Hay otra manera de rematar esta prueba usando que la bola de radio 1 es débilmente compacta.
De esa forma se encuentra que $x_n \xrightarrow{w} z \in H$ y se puede mostrar que $z = y/\lambda$ y $T(z)=y$.]

dem (del Teorema Espectral) Sea $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\} \subseteq \sigma_p(T)$ los v.p. y $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|$ (la igualdad no se da 2 veces seguidas, solo si $\lambda_i = -\lambda_{i+1}$)

Sea $H' = \left(\operatorname{Ker} T \oplus \bigoplus_n \operatorname{Ker}(T-\lambda_n I)\right)^\perp$ espacio de Hilbert y tenemos que $T/_{H'} : H' \to H$ tiene imagen en H' $\Rightarrow \exists |\lambda| = \|T/_{H'}\|$ v.p. $\Rightarrow \lambda$ es 0 y $H' \subseteq \operatorname{Ker} T$ absurdo. $\Rightarrow H = \operatorname{Ker} T \oplus \bigoplus \operatorname{Ker}(T-\lambda_n I)$.

ahora, dado x de norma 1 tenemos

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{con} \quad x_n \in \text{Ker}(T-\lambda_n I),\ x_0 \in \text{Ker}(T).$$

y se cumple $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 = 1$

Se cumple que $Tx = \sum \lambda_n x_n$ y tenemos

$$\| Tx - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n x \|^2 = \| \sum_{N+1}^{\infty} \lambda_n x_n \|^2 \leq \max_{n>N} \{|\lambda_n|\} \sum_{N+1}^{\infty} \|x_n\|^2 \longrightarrow 0$$

▨

<u>Ejemplo no compacto</u>: (Shift) $T: \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ definido como

$$T(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{tal que} \quad y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ x_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Tenemos que T es <u>unitaria</u> (i.e. $\|Tx\| = \|x\| \ \forall x \in \ell^2(\mathbb{N})$)

Esto implica que si $|\lambda| \neq 1 \Rightarrow T - \lambda I$ es invertible

Para ver eso, primero notar que $\text{Ker}(T-\lambda I) = \{0\}\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ (si $|\lambda| \neq 1$ es trivial pues $\|Tx\| \neq \|\lambda x\|$)

eso se ve pues si $\left.\begin{array}{l} Tx = \lambda x \\ \text{con } \{x_n\} = x \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \ldots$ (esto para $\lambda \neq 0$) ~~...~~

Si $|\lambda| \neq 1$ entonces $T - \lambda I$ es sobreyectiva tb: Sea $\{y_n\} \in \ell^2(\mathbb{N})$

Como ~~...~~ $(T - \lambda \text{Id})(\{x_n\}) = \{z_n\}$ tq $\quad z_n = \begin{cases} \lambda x_0 & \text{si } n=0 \\ x_{n-1} - \lambda x_n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

Tenemos que podemos definir x_n recursivamente para que $T(\{x_n\}) = \{y_n\}$ formalmente.

Si $|\lambda| \neq 1$ se cumple que $\{x_n\} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y se prueba la sobreyectividad

<u>Ejercicio</u>: Demostrar que $\sigma(T) = S^1$.

CLASE 25: REPASO DISTRIBUCIONES

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, $\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega)$ de soporte compacto$\}$

$\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega) \iff \begin{cases} \exists K \text{ compacto tq } sop(\varphi_m) \subseteq K \ \forall n \\ \varphi_n \to \varphi \text{ en la topología } C^\infty. \end{cases}$

Consideramos $\mathcal{D}^*(\Omega) = \{F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineal tq $F(\varphi_n) \to F(\varphi)$ si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}\}$

Decimos que F coincide con una función f en un abierto $U \subseteq \Omega$ si tenemos que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con soporte en U se cumple que

$$F(\varphi) = \int_\Omega f \varphi \, dm.$$

Propiedades importantes: → Tiene sentido tomar derivadas de todos los ordenes
→ Con la topología débil en $\mathcal{D}^*(\Omega)$ (i.e. $F_n \to F$ si $F_n(\varphi) \to F_m(\varphi)\ \forall \varphi$) se cumple que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $\mathcal{D}^*(\Omega)$ y $D^\alpha F_m \to D^\alpha F$ si $F_m \to F$.

La transformada de Fourier es una buena herramienta para observar la regularidad de funciones. Esta definida en todo $\mathbb{R}^d$ pero a veces hay trucos para salvar eso.

Para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definimos
$$\hat{f}(\xi) = f^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$$
$$f^\vee(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx.$$

Se cumple:

[Prop: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}, f^\vee$ son continuas en $\mathbb{R}^d$.

Consideramos $S(\mathbb{R}^d) = \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \ / \ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^\beta D^\alpha \varphi(x) < \infty \ \forall \alpha, \beta\}$

Se cumple que $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ vale que $(\varphi^\wedge)^\vee = (\varphi^\vee)^\wedge = \varphi$

pero más aún:

Teorema (Plancherel) $\|\varphi\|_2 = \|\hat{\varphi}\|_2 = \|\varphi^{\vee}\|_2$ con $\|\psi\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x)|^2 dm\right)^{1/2}$

En particular la transformada de Fourier se extiende a un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{R}^d)$ que se puede ver coincide con $\hat{f}$ en $L^1 \cap L^2$.

Algunas propiedades notables son:

- $f(x+v) \longmapsto \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle \xi, v\rangle}$ $\quad \forall v \in \mathbb{R}^d$ (y viceversa)
- $f(Lx) \longmapsto |\det L|^{-1} \hat{f}(L^{-1}\xi)$ $\quad \forall L \in GL(d,\mathbb{R})$ (y viceversa) — teo c.v.
- $D^{\alpha} f \longmapsto (2\pi i \xi)^{\alpha} \hat{f}(\xi)$ $\quad \forall \alpha$ multiíndice (y viceversa) ← "partes"
- $f * g \longmapsto \hat{f}\hat{g}$ ⇝ recordar que la convolución "regulariza".
- $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$. ← "Fubini".

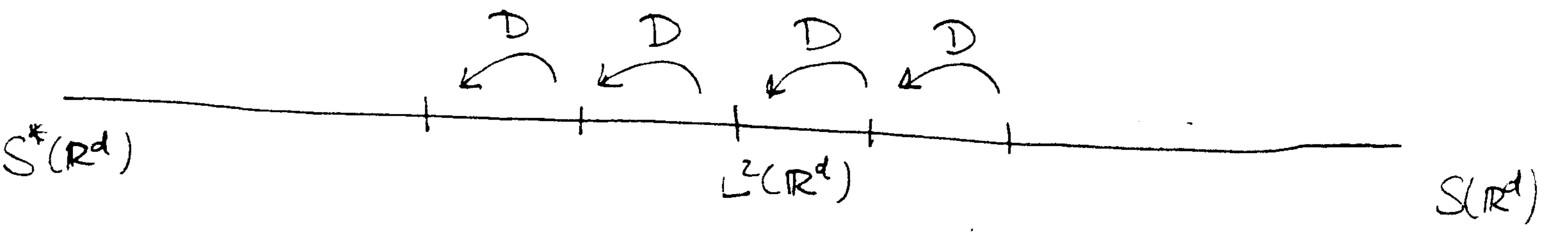
Consecuencia: Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tal que $\forall |\alpha| \leq p$ vale que $\xi^{\alpha} \hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d)$
$\Rightarrow f$ coincide ctp con una función de clase $C^{(p)}$.

Una de las utilidades es que podemos extender la noción de transformada de Fourier por dualidad a $S^*(\mathbb{R}^d)$, que si bien es más pequeño que $D^*(\mathbb{R}^d)$ (no permite irse a infinito muy "rápido") tiene "suficiente" para trabajar.

Recordar: Si $F \in S^*(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow \hat{F}(\varphi) = F(\hat{\varphi})$.

Ejercicio: Si $F \in S^*(\mathbb{R}^d)$ coincide con una función periódica $\Rightarrow \hat{F}$ son deltas de dirac equiespaciadas que dan lugar a la serie de Fourier de la función.

Problema: Se puede trabajar bien con cosas lineales, producto (p.ej) es problema.



CLASE 26: LEMA DE SOBOLEV.

Teorema Sean $d, p, r \geq 0$ enteros tq $r > p + d/2$ y sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que se cumple que

$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f$ como distribución coincide con una función $L^2_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leq i \leq d$, $0 \leq k \leq r$.

Entonces f coincide con una función de clase C^p (m-ctp).

Es decir, se puede cambiar f en un conjunto de medida nula para que sea de clase C^p.

Obs: Notar que no se requieren derivadas cruzadas, estas vienen "gratis".

CASO BEBE: $d=1$, $p=0 \Rightarrow r=1$.

Tenemos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx.$$ Esto debería implicar que f es continua

Primero vamos a localizar el problema: Para ver que f es continua en un punto nos interesa f en un entorno.

Sea ψ_n una función en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\psi_n \equiv 1$ en $[-n,n]$.

Definimos $F_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) f(x) & \text{si } x \in \operatorname{sop}\psi_n \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

Se cumple que DF_n como distribución es $DF_n = (D\psi_n) f + \psi_n g$

Como ψ_n es soporte compacto tenemos que $DF_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$

También vale que $F_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Por Plancherel tenemos que si $\hat{F}_n$ es la transformada de Fourier se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{F}_n|^2 < \infty \quad \text{y también} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \xi^2 |\hat{F}_n(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

Entonces no solo $\{\hat{F}_n\} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pero

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)|\hat{F}_n(x)|^2 < \infty.$$ Queremos ver que $\hat{F}_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$

Vamos a usar que $(1+|x|)^2 \leq K(1+|x|^2)$ con lo cual

$$A = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^2 |\hat{F}_n(x)|^2 dx < \infty.$$

Entonces, por Cauchy-Schwartz aplicado a $(1+|x|)|\hat{F}_n(x)|$ y $\frac{1}{1+|x|}$

obtenemos $$\left(\int |\hat{F}_n(x)|\, dx\right)^2 \leq A \cdot \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^2 dx < \infty.$$

Con lo cual $\hat{F}_n \in L^1(\mathbb{R})$ y entonces F_n es continua.

<u>Caso general</u>: Sean $g_{ik} \in L^2_{loc}(\Omega)$ tal que se cumple:

$$\int_\Omega g_{ik} \varphi \, dm = (-1)^k \int_\Omega f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k \varphi \, dm \qquad \forall\, 1 \leq i \leq d,\ 0 \leq k \leq r$$

Sea $U \subseteq \Omega$ abierto tq $\overline{U} \subseteq \Omega$ compacto. Sea $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\psi \equiv 1$ en $\overline{U}$ y definimos:

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x) f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Se cumple que $F(x) \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$.

Se cumple $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k F = \sum \binom{k}{s} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k-s} \psi \ldots \quad \forall\, 1 \leq i \leq d,\ 0 \leq k \leq r$

con lo cual $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k F \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^d)$

Aplicando Plancherel obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{F}|^2 dm < \infty \quad \text{y tb:} \quad \int_{\mathbb{R}^d} x_i^{2r} |\hat{F}(x)|^2 dx \quad (1 \leq i \leq n)$$

Como vale que $\underbrace{(1+|y|)^{2r}}_{(y_1^2+\dots+y_d^2)^{1/2}} \leq (2d+2)(1+y_1^{2r}+\dots+y_d^{2r})$

Obtenemos que:

$$A = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|y|)^{2r} |\hat{F}(y)|^2 dy < \infty$$

Entonces:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|y|)^p |\hat{F}(y)| dy\right)^2 \overset{CS.}{\leq} A \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} (1+|y|)^{2p-2r} dy}_{\text{Si } 2p-2r+d<0 \text{ es finito}}$$

Obtenemos que $(1+|y|)^p |\hat{F}(y)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$\Longrightarrow F$ es $C^p(\mathbb{R}^d)$.

$\blacksquare$

CLASE 27: ESPACIOS DE SOBOLEV

Sea $s \in \mathbb{N}$, queremos definir H^s como el espacio de funciones en $L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\forall |\alpha| \leq s$ vale que $D^\alpha f$ como distribución es una función en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

En H^s así definido se puede poner un producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^d} (D^\alpha f)\overline{(D^\alpha g)}\, dm$$ que hace H^s un esp. de Hilbert.

Para poder generalizar mejor vamos a poner otro p.i. equivalente

Notar que $f \in H^s \iff \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \forall |\alpha| \leq s$

Se puede ver que $\exists\, C_1, C_2 > 0$ tq:

$$C_1 (1+|\xi|^2)^s \leq \sum_{|\alpha| \leq s} |\xi^\alpha|^2 \leq C_2 (1+|\xi|^2)^s$$

Con lo cual $f \in H^s \iff (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)$

y la norma $\|f\|_s = \|(1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f}\|_2$ es equivalente a la anterior

Esta última definición tiene la ventaja que hace sentido $\forall s \in \mathbb{R}$.

Fijado $s \in \mathbb{R}$ definimos $\Delta^s : S^*(\mathbb{R}^d) \to S^*(\mathbb{R}^d)$ dado por

$$\Delta^s(f) = \left((1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \right)^\vee.$$

<u>Lema</u>: $\Delta^s : S^*(\mathbb{R}^d) \circlearrowleft$ es lineal y continuo e inversible con $(\Delta^s)^{-1} = \Delta^{-s}$.

<u>dem</u>: $(\Delta^s)^{-1} = \Delta^{-s}$ es una computación inmediato y linealidad es obvia.
$f \mapsto \hat{f}$ y $f \mapsto f^\vee$ son continuos en S^* $\Rightarrow$ alcanza ver que $f \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2} f$ ...

Sea $f_n \to f$ (i.e. $f_n(\varphi) \to f(\varphi)$ $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$)

Entonces $(1+|\xi|^2)^{s/2} f_n(\varphi) = f_n(\underbrace{(1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi}_{\in S}) \to f((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi)$ ▨

Definimos $H^s = \{ f \in S^*(\mathbb{R}^d) \,/\, \Delta^s f \in L^2(\mathbb{R}^d) \}$

En H^s definimos: $\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta^s(f)\overline{\Delta^s(g)}\,dm$. $(\|f\|_s = \|\Delta^s f\|_2)$

<u>Consecuencias:</u> $\to$ $\mathcal{F}: H^s \to L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$ es un isomorfismo isométrico, en particular H^s es un esp. de Hilbert.

$\to$ $S(\mathbb{R}^d)$ es denso en H^s (con la norma puesta) pues es denso en $L^2(\mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s d\xi)$ y S es invariante por $\mathcal{F}^{-1}$.

(Nota: $\mathcal{F}: S^*(\mathbb{R}^d) \to S^*(\mathbb{R})$ denota la transf de Fourier: $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$)

Algunas propiedades fáciles son:

<u>Prop</u>: (i) Si $s > t \Rightarrow H^s \subseteq H^t$ y H^s es denso en H^t y vale que $\| \ \|_t \le \| \ \|_s$.

(ii) Δ^t es un isomorfismo isométrico entre H^s y H^{s-t} $\forall s,t$.

(iii) $H^0 \cong L^2(\mathbb{R}^d)$

(iv) $D^\alpha : H^s \to H^{s-|\alpha|}$ es lineal y continuo.

<u>dem</u>: Ejercicio.

▨

Lo que probamos la otra vez se extiende a:

<u>Lema</u> (Encaje de Sobolev) Si $s > p + d/2 \Rightarrow H^s \subseteq C_0^p(\mathbb{R}^d)$

<u>dem</u>: Alcanza mostrar que $\forall |\alpha| \le p$ vale que $(D^\alpha f)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^d)$

(notar que como $p < s \Rightarrow D^\alpha f$ ...

Tenemos
Si $|\alpha|\le p$:

$$\int |(D^\alpha f)^\wedge(\xi)|\,d\xi \approx \int |\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|\,d\xi \le C\int (1+|\xi|^2)^{p/2}|\hat{f}(\xi)|\,d\xi \le$$

$$\underset{\uparrow\, CS}{\le} C\Big[\underbrace{\int (1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi}_{\|f\|_s}\Big]^{1/2}\Big[\underbrace{\int (1+|\xi|^2)^{p-s} d\xi}_{\text{finito si } s>p+d/2}\Big]^{1/2}$$

$\blacksquare$

Vamos a ver el siguiente resultado técnico que será útil

Prop: Sea $\varphi\in S(\mathbb{R}^d) \Rightarrow M_\varphi: H^s\to H^s$ dada por $f\mapsto \varphi f$ es lineal y continua.

dem: Alcanza ver que $\Delta^s M_\varphi \Delta^{-s}: L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)$ es lineal y continua.

Dado $f\in H^s$ tenemos $(\Delta^s M_\varphi \Delta^{-s} f)^\wedge(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}\left[\hat{\varphi} * (\Delta^{-s}f)^\wedge\right](\xi)$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\eta|^2)^{-s/2}\hat{\varphi}(\xi-\eta)}_{h(\xi,\eta)}\hat{f}(\eta)\,d\eta$$

Usando que $(1+|\xi|^2)^s(1+|\eta|^2)^s \le C(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}$ tenemos $\int |h(\xi,\eta)|\,d\xi < C' \ \forall\eta$.

Entonces (usando algo "à la" Minkowski pa integrales) tenemos $\|(\Delta^s M_\varphi \Delta^{-s} f)^\wedge\|_2 < C''\|\hat{f}\|_2$

$\Rightarrow$ por Plancherel obtenemos la continuidad.

$\blacksquare$

Dado $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ abierto, definimos $H^s_{loc}(\Omega) = \{f\in D^*(\Omega) \,/\, \forall U$ ab con $\bar{U}\subseteq\Omega\ \exists g\in H^s$ tq f y g *coinciden en $U\}$.

Prop: $f\in H^s_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \forall\varphi\in D(\Omega)$ se cumple $\varphi f\in H^s$.

dem: ($\Rightarrow$) $f\in H^s_{loc}(\Omega)$ y $\varphi\in D(\Omega) \Rightarrow \exists g\in H^s$ tq f y g coinciden en un entorno de sop φ $\Rightarrow \varphi f = \varphi g\in H^s$.

($\Leftarrow$) Sea U abierto tq $\overline{U} \subseteq \Omega$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq $\varphi|_{\overline{U}} = 1$

$\Rightarrow \varphi f \in H^s$ y coincide con f en U. ∎

Teorema (Compacidad) Sea $\{f_k\} \subseteq H^s$ sucesión tal que $\sup_k \|f\|_s < \infty$ y tal que $\operatorname{sop}\{f_k\} \subseteq K$ compacto fijo.
Entonces, $\exists$ subsucesion f_{k_j} que converge en H^t $\forall t < s$.

dem: No lo vamos a demostrar, solo hacemos algunos comentarios:

→ Similar a: sucesión con $\| \ \|_{C^1}$ acotada tiene subsucesión convergente en C^0 (lo mismo vale con normas Hölder que dan equicontinuidad).

→ Arzelá-Ascoli en este caso no se aplica directamente pero si se aplica a las transformadas de Fourier obteniendo $\hat{f}_{n_j} \to h$ unif en compactos.

→ Después se aplica el truco de partir la integral en $|\xi| > R$ y $|\xi| < R$. Fijado $\varepsilon > 0$, como $t < s$ acotas lo de afuera por algo de la forma $(1+R)^{t-s} \| f_{k_j} - f_{k_{j+1}} \|_s^2$ que lo haces $< \varepsilon/2$ y lo otro sale de la conv. unif en compactos.

∎

CLASE 28-30 REGULARIDAD ELÍPTICA

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, $N>0$ y $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ $\forall |\alpha| \leq N$

Denotamos $L = \sum_{|\alpha|\leq N} f_\alpha D^\alpha$ y llamamos operador de orden N

si para algun α con $|\alpha| = N$ vale que $f_\alpha \neq 0$.

El operador L actúa en $\mathcal{D}^*(\Omega)$ como

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leq N} f_\alpha D^\alpha u$$

El polinomio característico de L es $P_L(x,y) = \sum_{|\alpha|=N} f_\alpha(x) y^\alpha$ $(x\in\Omega, y\in\mathbb{R}^d)$

Decimos que L es elíptico si $P_L(x,y) = 0 \implies y = 0$.

Heurísticamente esto dice que L es de orden N en todas las direcciones.

Lema: L es elíptico si y solo si $\forall x$ existen C_x, R_x (continuas) tal que $\left|\sum_{|\alpha|\leq N} f_\alpha(x) y^\alpha\right| > C_x |y|^N$ con $|y| > R_x$.

dem: Si L es elíptico consideramos $C_1^x = \min_{y\in S^{d-1}} \left|\overbrace{\sum_{|\alpha|=N} f_\alpha(x) y^\alpha}^{P_L(x,y)}\right| > 0$

Como el polinomio ese es homogeneo tenemos $\left|\sum_{|\alpha|=N} f_\alpha(x) y^\alpha\right| > C_1^x |y|^N$

Por otro lado $\sum_{|\alpha|\leq N} f_\alpha(x) y^\alpha - P_L(x,y)$ es de grdo $< N$, $\exists R_x$ como deseado.

Claramente C^x y R_x varían continuamente. El recíproco es obvio. ∎

Obs: Si para $|\alpha| = N$ los f_α son ctes $\implies C_x$ se puede tomar constante (pero R_x no!).

Teorema (Regularidad elíptica) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y $L = \sum_{|\alpha| \le N} f_\alpha D^\alpha$ un operador elíptico de orden N tq $\forall |\alpha| = N$ vale que f_α es cte. Supongamos que $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ es tal que $Lu = v$ con $v \in H^s_{loc}(\Omega)$, entonces $u \in H^{s+N}_{loc}(\Omega)$

(la hipótesis de coef ctes de orden N no es necesario pero simplifica)

Primero vamos a ver un caso bebe para alimentar la heurística.

Lema Si L es elíptico de orden N con coeficientes constantes y tenemos $u \in H^s$ tal que $Lu \in H^s \Rightarrow u \in H^{s+N}$.

dem: Por hipótesis tenemos $(1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}(Lu)^\wedge \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

Pero $(Lu)^\wedge = \underbrace{\left(\sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha\right)}_{\geq C|\xi|^N \text{ si } |\xi| > R.} \hat{u}$

$$\Rightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2} \cdot |\xi|^N\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow (1+|\xi|^2)^{\frac{s+N}{2}}\,\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

$\blacksquare$

Dem (del Teorema) Fijamos $x \in \Omega$ y $B_0 \subseteq \Omega$ una bola cerrada centrada en x. Sea $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_0|_{B_0} = 1$.

Como $\varphi_0 u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ es de soporte compacto se cumple que $\varphi_0 u \in H^t$ para algun $t \in \mathbb{R}$ (Recordar que se podía definir el "orden" de una distribución en cada compacto y eso da que su transf crece como un polinomio de ese orden, por otro lado es C^∞ por ser $\varphi_0 u$ de sop. compacto; al final damos una prueba formal).

Podemos asumir (achicando t si es necesario) que $t = s+N-k$ con $k \in \mathbb{N}$

Elegimos bolas

$$B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq \cdots \supsetneq B_k \text{ centradas en } x \text{ y}$$

"chichones" $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ tq $\varphi_i = 1$ en B_i y $\operatorname{sop}\varphi_i \subseteq B_{i-1}$.

Vamos a probar que $\varphi_1 u \in H^{t+1}, \dots, \varphi_k u \in H^{t+k}$ y eso concluye porque entonces $u \in H^{t+k}_{loc}(\Omega)$ y $t+k = s+N$.

Alcanza probar el siguiente lema:

Lema: En las hipotesis del Teorema, si $\Psi u \in H^t$ para $t \leq s+N-1$ y alguna $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\Psi = 1$ en $\operatorname{sop}\varphi$ con $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\Longrightarrow \varphi u \in H^{t+1}$.

dem: Por el Lema que mostramos antes, nos alcanza mostrar que $L(\varphi u) \in H^{t-N+1}$ pues como $\varphi u \in H^t \subseteq H^{t-N+1}$ vamos a obtener que en realidad $\varphi u \in H^{t+1}$.

Consideramos $F = L(\varphi u) - \varphi L u = L(\varphi u) - \varphi v$

Como $\operatorname{sop} F \subseteq \operatorname{sop}\varphi$ podemos multiplicar u por Ψu sin cambiar nada:

$$F = L(\varphi \Psi u) - \varphi L(\Psi u) = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha \cdot \left[D^\alpha(\varphi\Psi u) - \varphi D^\alpha(\Psi u)\right]$$

Notar que las derivadas de orden $|\alpha| = N$ de Ψu se cancelan por la regla de Leibnitz y obtenemos que

F es combinación lineal (con coef en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$) de derivadas de orden $N-1$ o menor de Ψu. Esto implica que $F \in H^{t-N+1}$.

Por otro lado $L(\varphi u) = L(\varphi \Psi u) = F + \varphi v$ pero $\varphi v \in H^s$ por hipótesis $\Rightarrow \varphi v \in H^{t-N+1}$ y obtenemos lo deseado.

Nos quedo demostrar lo siguiente:

Prop Toda $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$ de soporte compacto pertenece a algún H^t.

dem: Para ver que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ notar que

$$f = \varphi f \quad \text{con} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \text{ tq } \varphi = 1 \text{ en sop} f.$$

Entonces, $\hat{f} = \hat{\varphi} * \hat{f}$ pero $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}$ es C^∞.

Por otro lado, sabemos que si K es un compacto que contiene el soporte de $f \Rightarrow$

$f: \mathcal{D}_K \to \mathbb{C}$ es continua donde $\mathcal{D}_K$ tiene la top relativa a $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Eso significa que $\exists N > 0$ tal que

$$|f(\varphi)| < C\left(\|\varphi\|_N\right) \quad \text{donde} \quad \|\varphi\|_N = \sup_{x \in K}\{|D^\alpha \varphi| \ |\alpha| \leq N\}$$

Se puede ver que eso implica que fuera de un compacto vale que

$$|\hat{f}(\xi)| < C(1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}} \quad \text{si } |\xi| > R.$$

Esto da que $f \in H^t$ para $t < N+1-d/2$ (o algo así).

$\blacksquare$