RIGIDITÉ DE RÉGULARITÉ POUR LES REPRESENTATIONS DE HITCHIN

(avec A. SAMBARINO)

Soit $i_d : PSL(2,\mathbb{R}) \to PSL(d,\mathbb{R})$ la seul (modulo conjugaison) representation irreductible ($PSL(2,\mathbb{R})$ aggissant dans les polynomes homogenes à 2 variables et degree $d-1$)

Soit $\varphi : \pi_1(\Sigma) = \Gamma \to PSL(2,\mathbb{R})$ (n'importe quel) representation Fuchsienne

(Σ surface de genre $g \geq 2$)

Thm (Hitchin) La composante conexe de $i_d \circ \varphi$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma, PSL(d,\mathbb{R}))/PSL(d,\mathbb{R})$ est un boule de dimension $\underbrace{(2g-2)}_{\chi(\Sigma)}\underbrace{(d^2-1)}_{\dim PSL(d,\mathbb{R})}$

On appel cette composante, la composante de Hitchin et on la denote par $\mathcal{H}_d(\Sigma)$

Thm (Labourie) $\forall \rho \in \mathcal{H}_d(\Sigma)$ on a que ρ est fidele et discret, et, $\forall \gamma \in \Gamma$ on a que $\rho(\gamma)$ est (uniformement) loxodromique.

La preuve utilise la notion (introduit par Labourie) de 'representation d'Anosov' et passe par demontrer que, $\forall \rho \in \mathcal{H}_d(\Sigma)$, la representation ρ est d'Anosov dans le sens suivante :

$$\exists\, \xi : \partial\Gamma \overset{\sim S^1}{\longrightarrow} \mathcal{F} = \{\text{drapeaux complets de } \mathbb{R}^d\} = \{E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{d-1} \text{ sousespaces de } \mathbb{R}^d\}$$

telle que: $\to$ ξ es continue (Hölder) et equivariante (i.e. $\xi(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma)\xi(x)$)

$\to$ Si $x \neq y \rightsquigarrow \xi(x) \pitchfork \xi(y)$ (i.e. $\xi_i(x) \oplus \xi_{d-i}(y) = \mathbb{R}^d \quad \forall i$)

$\to$ un propriete de contraction/expantion (c'est toujours satisfaite si, par example, ρ est irreductible - GW)

$\Downarrow$

ca fait la courbe unique.

Remarques: • Etre Anosov est un propriete ouvert, mais typiquement elle n'est pas fermee (pour $\pi_1(\Sigma)$, voir e.g: Barbot a $SL(3,\mathbb{R})$ ou QF a $SL(2,\mathbb{C})$)

• Le drapeaux $\xi(\gamma^+)$ pour $\gamma \in \Gamma$ correspond aux valeurs propres 'plus grandes' (en module) de $\rho(\gamma)$.

Les representations d'~~Anosov~~ Hitchin verifient un propriete encore plus forte qui permet montrer que c'est un propriete fermée (Labourie) et qui de plus las caracterise (Guichard).

Pour tout $\rho \in \mathcal{H}_d(\Sigma)$ la courbe ξ est FRENET:

$$\forall (x_1, \dots, x_k) \xrightarrow{\text{differents}} x \quad \text{et} \quad d_1 + \dots + d_k = n \leq d \quad \text{on a:}$$

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \xi_{d_i}(x_i) \dashrightarrow \xi_n(x).$$

(ATTENTION: mais pas les ξ_i !!)

Cette condition implique immediatement que la trace de ξ_1 est de classe C^1 (Labourie) (même si la courbe n'est plus que Hölder comme application) parce que la droite qui joins $\xi_1(y)$ et $\xi_1(x)$ (correspond a $\mathbb{P}(\xi_1(y) \oplus \xi_1(x))$ [redacted]) converge uniformement dès que $y \to x$ vers $\xi_2(x)$.

Remarque: En dynamique, le phenomene d'hiperbolicite normale est liée a ca: un objet peut rester lisse apres perturbation, mais la conjugaison n'est plus que Hölder.

Quand $d=3$, $\mathcal{H}_3(\Sigma)$ correspond aux structures projectives convexes sur Σ (Choi-Goldman) et c'est un cas particulier des 'convexes divisibles' (Benoist)

Dans cette contexte, il est bien connu, d'après Benoist, que si l'image de ξ_1 dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ est un courbe C^2, alors la representation est Fuchsienne (i.e. conjuguee a $i_d \circ \varphi$)

Thm (avec A. Sambarino) $\forall \rho \in \mathcal{H}_d(\Sigma)$, si la trace de ξ_1 es un courbe lisse, alors, ρ est Fuchsienne.

Remarque: Etant donne $\varphi: \Gamma \to PSL(2,\mathbb{R})$ Fuchsienne, ca induit un structure differentiable en $\partial\Gamma$. Même si la trace de ξ_1 est lisse, ξ_1 peut être que Holder. Il suit des travaux de A. Sambarino que si ξ_1 es Lipschitz (par rapport a la structure défini par φ) alors ρ es Fuchsienne et conjugue al $i_d \circ \varphi$. Le type de resultat est pourtant de nature diferent.

Remarque (Labourie) Si la trace de ξ_1 est lisse, alors la trace de ξ aussi et on a

$$\xi_i(x) = \xi_1(x) \oplus \xi_1'(x) \oplus \dots \oplus \xi_1^{(i-1)}(x)$$

(dérivé par rapport à la structure lisse de l'image)

Le but de cette exposé c'est de presenter les outils de la preuve qui ont aussi servi pour montrer un resultat de rigidité pour l'exposante critique des repr. de Hitchin.

On considere :

$$l_i : \partial\Gamma \times \partial\Gamma \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \quad \text{definit par.}$$

$$l_i(x,y) := \xi_i(x) \cap \xi_{d-i+1}(y)$$

Remarque: Pour $\gamma \in \Gamma$, l'espace $l_i(\gamma^-, \gamma^+)$ correspond au direction propre du i-eme valeur propre de $\rho(\gamma)$ en module. On denote cette module $\lambda_i(\rho(\gamma))$

On veut montrer l'existence des 'resonances' (relations algebriques) entre les valeurs propres qui sont independents de $\gamma \in \Gamma$. D'apres resultats de Benoist ça va a impliquer que l'adherence de Zariski de $\rho(\Gamma)$ es plus petit d'ou la rigidite. (On ne va pas se concentrer sur ça).

2 etapes avec strategie similaire:

1) Sous certaines conditiones on peut construire un flot d'Anosov ϕ_i avec distributions stable et instable lisses, liées aux espaces l_{i-1}, l_i, l_{i+1} dont on peut 'lire' les valeurs propres des elements $\rho(\gamma)$.

2) Definir des flots d'Anosov en utilisant le fait que ξ est lisse pour montrer que les conditions dans 1) sont toujours satisfaites.

Flot d'Anosov: $\Phi_t : M \longrightarrow M$ de classe (au moins) C^1 et telle que

$$TM = E^s \oplus \mathbb{R}\frac{\partial\phi_t}{\partial t} \oplus E^u \quad \text{dec. cont} \quad D\phi_t\text{-invariante telle que}$$

→ les vecteurs dans E^s sont unif. contractées par $D\phi_t$.

→ les vecteurs dans E^u sont unif contractées par $D\phi_{-t}$.

§ FLOTS D'ANOSOV AVEC DISTRIBUTIONS LISSES (Ghys)

Soit $\phi_t : M \to M$ flot d'Anosov dont :
- M est un 3-variete fermée
- ϕ_t est de classe C^2 et les distributions stable E^s et instable E^u sont aussi C^2.

Ghys a demontree que dans ces conditions, le flot ϕ_t est lissement conjuguees a un flot d'Anosov algebrique.

On va juste utiliser la remarque suivante qui est sont point de depart.

Proposition: Si ϕ_t n'est pas un suspention, alors ϕ_t preserve un forme de contacte (alors, preserve le volume).

Idée: Soit α la 1-forme definit par :
$$\rightarrow \alpha\left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}\right) = 1$$
$$\rightarrow \operatorname{Ker} \alpha = E^s \oplus E^u$$

Alors, α est C^1 et $D\phi_t$-invariante.

Donc, $\alpha \wedge d\alpha$ c'est aussi $D\phi_t$-invariante :

Cas 1 : $\alpha \wedge d\alpha \not\equiv 0$ dans un point $x \in M$. Alors, ϕ_t preserve un mesure qui est positive dans un ouvert. Pour ϕ_t-Anosov ca implique q'uelle est positive partout, et donc α est de contact. ($\Rightarrow \phi_t$ preserve le volume)

Cas 2 : $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$: un resultat classique de Plante entraîne que dans ce cas ϕ_t est un suspension.

L'importance de preserver un volume pour notres buts est que :

Thm (Livsic-Sinai) ϕ_t flot d'Anosov preserve le volume $\Leftrightarrow$ $\forall p$ pointe periodique de periode τ_p on a que $\log \det D_p\phi_{\tau_p}/_{E^u} = -\log \det D_p\phi_{\tau_p}/_{E^s}$

On va utiliser juste la directe qui est un exercise assez simple.

(il faut savoir que si m est un volume preserve, alors ca densité es positive partout.)

§ LE PREMIER FLOT

Soit $M^i_\rho(x,y) = \{v \in l_i(x,y) \setminus \{0\}\}/_{v \sim -v}$ qui définit un fibrée en lignes :

$$M^i_\rho \longrightarrow \widetilde{F}^i_\rho \longrightarrow L^i_\rho = \mathrm{Im}(l_i) \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$$

Dans $\widetilde{F}^i_\rho$ on considère le flot $\widetilde{\phi}^i_t(v) = e^{-t} v$

Le groupe Γ agis dans $\widetilde{F}^i_\rho$: $\gamma \cdot (l_i(x,y), v) = (l_i(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y), \rho(\gamma) v)$

Remarque: l'action est bien défini car l_i est Γ-equivariante.
(De tout façon, si $i \neq 1, \frac{d+1}{2}, d-1$, on demontre que l_i est injective)

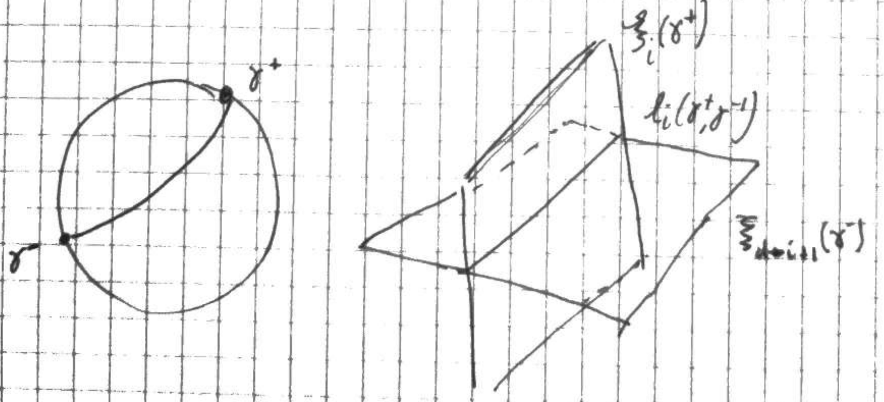
Nottons que l'action de Γ commute avec le flot $\widetilde{\phi}^i_t$.

c.f. Ledrappier; Sambarino

Théorème ⊛ (de reparametrisation) S'il existe $\varepsilon > 0$ telle que $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$ on a que $\log \lambda_i(\rho(\gamma)) > \varepsilon\, l(\gamma)$ ($\leftarrow$ long. de translation) alors, l'action de Γ sur $\widetilde{F}^i_\rho$ est libre, proprement discontinue, et cocompacte.

De plus, $\widetilde{\phi}^i$ projet sur un flot d'Anosov ϕ^i dont le relevé de ses distributions stable/instable sont $E^s_{(x,y)} = \mathrm{Hom}(l_i(x,y), l_{i+1}(x,y))$ $E^u(x,y) = \mathrm{Hom}(\xi(x,y), l_{i-1}(x,y))$

Pour $\gamma \in \Gamma$



On obtient que, pour $\gamma \in \Gamma$, $\log |D\phi_{p(\gamma)}/E^u| = \log \lambda_{i-1}(\rho(\gamma)) - \log \lambda_i(\rho(\gamma))$

$$\log |D\phi_{p(\gamma)}/E^s| = \log \lambda_{i+1}(\rho(\gamma)) - \log \lambda_i(\rho(\gamma))$$

Si on arrive a appliquer le Theoreme(*) pour assez des flots ϕ^i en utilisant que les distributions sont lisses et ~~avec~~ la remarque de Ghys, on obtient la rigiditée. (Il suffit $2 \leq i < \frac{d+1}{2}$).

§ LE DEUXIEME FLOT

Proposition: Si l'image de ξ_1 est lisse, alors, $\forall j \in \{1, \ldots, d\}$ on a que

$$\log \lambda_j(\rho(\gamma)) = - \log \lambda_{d-j}(\rho(\gamma)) \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Comme $\sum_{j=1}^{d} \log \lambda_j(\rho(\gamma)) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$ (parce que $\rho(\gamma) \in PSL(d, \mathbb{R})$)

et comme ρ est Anosov, ca permet montrer que les hipotheses del Theorem(*) sont satisfaites pour les i qu'on veut.

Preuve: (Idee) $\Lambda^i \rho : \Gamma \longrightarrow PSL(\Lambda^i \mathbb{R}^d)$ est 'Anosov' ('projectivement Anosov')

La courbe equivariante etant: $\hat{\xi}$ "=" ξ_i et $\hat{\xi}^*$ "=" ξ_{d-i}

On ecrive $\quad \hat{\xi}(x) = \mathbb{R}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_i) \quad$ avec $\quad v_j \in \xi_1^{(j)}(x)$

alors, $\quad \hat{\xi}'(x) = \mathbb{R}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1})$ (a cause de cancellations)

(Similaire pour $\hat{\xi}^*$)

On peut alors construire un flot d'Anosov avec $E^u = \mathrm{Hom}(\hat{\xi}(x), \hat{\xi}'(x))$

$$E^s = \mathrm{Hom}(\hat{\xi}^*(x), \hat{\xi}'(x))$$

Les distributions sont aussi lisses et donc, on obtient les resonances suivantes

$$\log \lambda_i(\rho(\gamma)) - \log \lambda_{i+1}(\rho(\gamma)) = \log \lambda_{d-i}(\rho(\gamma)) - \log \lambda_{d-i-1}(\rho(\gamma))$$

et ca pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $i = 1, \ldots, d-1$.

Ca permet de conclure. ∎