Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I
Licenciatura de Física
Primer semestre 2011

Práctico 3

1. (∗) Resolver:

$$\text{a) } x' = x\log x, \quad \text{b) } x' = (1+x)(1+t), \quad \text{c) } x' = -\frac{x}{t} - \frac{x^2}{t^2}, \quad \text{d) } (1+t^2)xx' = e^t,\ x(0) = 1.$$

2. Resolver:

$$a)\ \ x' + 2xt = t, \quad \text{b) } x' + x = te^t,\ x(0) = 1, \quad \text{c) } tx' - 2x = t^5,\ x(1) = 1,$$

$$\text{d) } x' - x = cos(t),\ x(0) = 0, \quad \text{e) } x' - x\tan t = \cos t.$$

3. Hallar la solución general de la ecuación diferencial $x' + x - tx^3 = 0$ efectuando el cambio $x = \frac{1}{\sqrt{u}}$.

4. (∗) Resolver:

   (a) $x'' - 3x' + 2x = 0,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 3.$
   (b) $x'' + 2x' + x = 0,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 1.$
   (c) $x'' + 2x' + 5x = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$
   (d) $x'' - 9x = 0,\ x(0) = 3,\ x'(0) = 15.$
   (e) $x''' - 13x' - 12x' = 0.$

5. En los siguientes casos, resolver completamente la ecuación dada, verificando que la funci'on f es una solución.

   (a) $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{t^2},\ f(t) = -\log te^{-t}.$.
   (b) $x'' - 2x' + x = -2t\cos t,\ f(t) = t\cos t.$

6. *Ecuación de Bernoulli*

   (a) Probar que el cambio de variable $y = x^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli $x' = a(t)x^n + b(t)x,\ n > 1$ a una ecuación diferencial lineal.
   (b) Resolver: a) $tx' + x = t^4x^3$ y b) $-2x' = tx^3 + x$.

7. *Ecuación de Ricatti.* Consideremos la ecuación $x' = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$ en donde a, b, c son funciones continuas en $\mathbb{R}$. Supongamos que x_p es una solución particular de la ecuación. Mostrar que, mediante el cambio de variable $x = x_p + \frac{1}{u}$ la ecuación se transforma en:

$$u' + (b + 2cx_p)u = -c$$

   Resolver:

   (a) $x' = 1 + t^2 - 2tx + x^2$, a partir de la solución particular $x_p(t) = t$.

(b) $x' = 1 - t^2 + x^2$, sabiendo que tiene una solución polinómica.

8. ($*$) *Oscilador armónico-Sistema Masa-Resorte.* Un sistema masa-resorte responde a la ecuación diferencial:

$$mx'' = -kx - bx'$$

Donde m denota la masa, k la constante del resorte y b el coeficiente de rozamiento (todos son números positivos). Cuando existe una fuerza externa F que fuerza el sistema, este responde a la ecuación:

$$mx'' = -kx - bx' + F(t)$$

(a) (*Oscilador armónico*) Resolver la ecuación de movimiento en el caso que no hay rozamiento ni fuerza externa ($b = 0$).

(b) (*Paracaidista*) Resolver la ecuación en el caso que no haya resorte ($k = 0$), el rozamiento es positivo y la fuerza externa es constante (e igual a mg, la gravedad). Esta ecuación se puede pensar como la ecuación que responde la caida de un paracaidista. Hallar un valor de b para que la caida de un paracaidista de 80kg que abre el paracaidas a 4.000 metros a una velocidad de 100km/h caiga al piso a una velocidad menor a 10km/h. ¿El peso del paracaidista influye en el valor de b?.

(c) (*Forzamiento sinusoidal*) Halle la solucion general de la ecuacion con $k, b \geq 0$ y $F(t) = A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t)$.

(d) (Opcional) Leer el articulo de wikipedia sobre el Oscilador Armónico para ver otras combinaciones con interés físico.

9. ($*$) *Sistemas RLC.* La carga en un capacitor de sistema eléctrico con una fuente de voltaje $V(t)$ que tiene conectados resistencias, bobinas y capacitores cuyas constantes acumuladas denotamos R, L y C responde a la ecuación:

$$V(t) = Rq' + Lq'' + \frac{q}{C}$$

(a) (*Corriente continua*) Resolver el sistema cuando se comienza con una fuente de corriente continua de 9 volts ($V(t) = 9$) y los valores de las constantes son $R = 100\Omega$, $L = 50H$ y $C = 15mF$. El sistema comienza con el capacitor cargado con 300 coulombs y la corriente por la fuente es de 5 amperes.

(b) (*Corriente alterna*) Resolver el sistema con los mismos valores que en la parte (a) pero con la fuente de voltaje de corriente alterna a 220 volts y 50hertz de frecuencia.

Nota:

- Armando el práctico priorizamos ofrecer muchos ejercicios sobre mantenerlo en un tamaño razonable. Es preferible ir al día en los temas que hacer todos los ejercicios del práctico. Los ejercicios que resulten escenciales, serán marcados con un asterisco ($*$), si el ejercicio consiste de varios ejercicios de cálculo independientes, el asterisco significará que es importante hacer algunos.