Miscelánea sobre el IME-FIA en los años '60 y la probabilidad cualitativa

Enrique M. Cabaña

Seminario de Probabilidad y Estadística, viernes 1 de julio de 2016

Resumen

En esta, mi primera charla en el Seminario como dependiente del Banco de Previsión Social, intentaré adaptar su estilo y su contenido a mi nueva condición de pasividad.

Además de incluir comentarios sobre la actividad matemática en el período mencionado en el título, me referiré a un viejo trabajo que me servirá de pretexto para expresar mi homenaje y mi agradecimiento a dos de mis maestros, Cesáreo Villegas y Juan Schäffer, que me ayudaron cuando comencé a trabajar en el Instituto de Matemática y Estadística y contribuyeron de esa manera a hacer disfrutable la tarea que he continuado realizando hasta ahora.

Índice

1. Introducción

El desalojo de la oficina que ocupaba en el IESTA[1], por causa de mi jubilación, ha motivado que afloraran muchos documentos antiguos.

Para adaptar el contenido de esta exposición a mi nuevo estado de pasividad posterior a mi cese como funcionario docente activo de la Universidad de la República, he seleccionado uno de ellos, el manuscrito de "An incompatible finite qualitative probability" como eje temático, que además de dar a esta charla un tenor retrospectivo, me permite recordar a modo de homenaje a dos de mis maestros que prestaron un decisivo apoyo a mis comienzos como investigador. El manuscrito contiene el primero de mis trabajos de investigación enviado a consideración editorial, que fue rechazado por el editor que señaló que el resultado era conocido pues estaba contenido, disimulado agrego yo, en un enunciado muy general de álgebra.

Una mirada al facsímil contenido en la Figura 1, que quizá sorprenda a quienes nacieron después que el LaTeX, nos sitúa en una época, la década de los años '60, período aproximado que tomo como referencia, durante la cual se produjeron importantes cambios en el Instituto de Matemática y Estadística y en la Facultad de Ingeniería.

Los facsímiles incluidos en la Figura 2 son copias de la memoria anual del IME (actualmente IMERL) de 1962 y de un memorandum descriptivo del Instituto fechado en 1971. Ambos documentos en conjunto sirven para cuantificar el crecimiento del IME en número de docentes, entre esos años.

De la memoria de 1962 extraemos la lista de los docentes que ese año integraban el Instituto (no aparecen Gunter Lumer, Javier García de Zúñiga y Conrado Rossi, que lo habían integrado hasta poco tiempo antes, tampoco el Director, Rafael Laguardia, mencionado al comienzo del documento):

I.c.- Departamento de Matemática.

Jefe de Departamento Prof. Ing. José L. Massera
Jefe de Departamento Prof. Dr. Ing. Juan J. Schäffer (Matemática aplicada)
Jefe de Trabajos Prácticos Dr. Ing. Alfredo Jones (desde el 1º de octubre a su regreso de los EE.UU).
Jefe de Trabajos Prácticos Br. Alfredo Gandulfo.
Jefe de Trabajos Prácticos Br. Jorge Lewowicz.

Departamento de Estadística.

Jefe de Departamento Prof. Ing. Cesáreo Villegas
Jefe de Trabajos Prácticos Br. Enrique Cabaña

[1] Instituto de Estadística de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración.

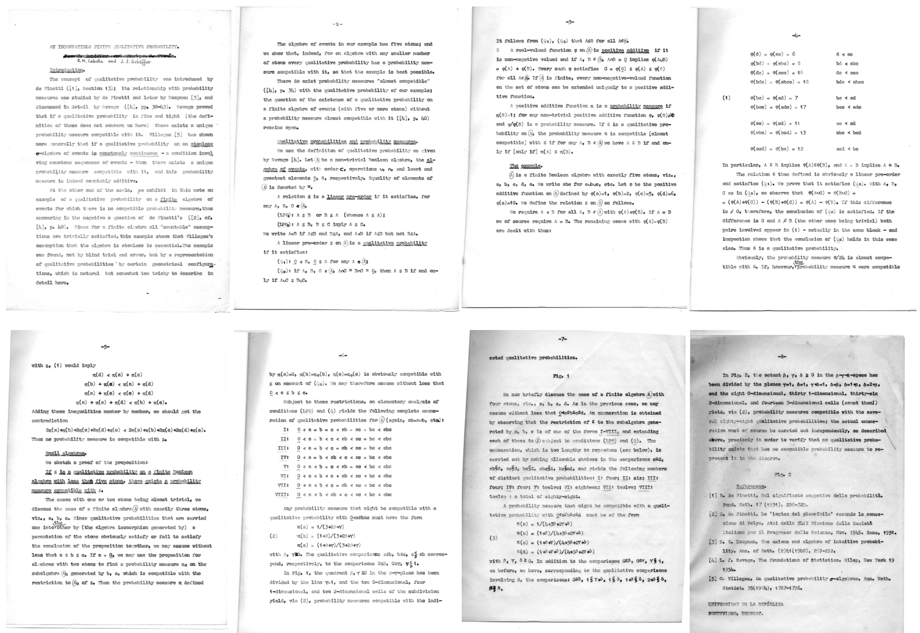

Figura 1: Manuscrito no publicado sobre una probabilidad cualitativa incompatible, incompleto porque faltan las figuras.

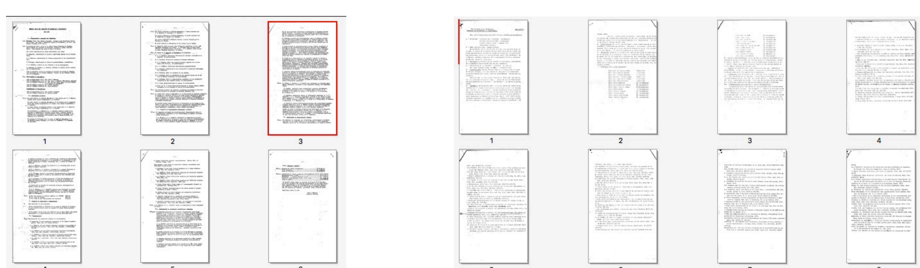

Figura 2: Memoria anual del IME correspondiente a 1962 y Memoria Descriptiva del IME correspondiente a 1971

La lista de docentes del informe de 1971 muestra un importante crecimiento:

\- Personal docente del Instituto.-

Prof. Ing. Rafael Laguardia	"full-time"
Prof. Ing. José L. Massera	"part-time"
Prof. Ing. Antonio Petracca	"part-time"
Prof. Dr. Ing. Alfredo Jones	"full-time"
Prof. Ing. Enrique M. Cabaña	"full-time"
Prof. Dr. Jorge Lewowicz	"full-time"
Prof. Mario Wschebor	30 horas/semana
Prof. Dr. Marcos Sebastiani	30 horas/semana
Prof. Cand. Juan J. Tolosa	40 horas/semana
Prof. Celiar Silva	30 horas/semana
Bach. Rodrigo Arocena	30 horas/semana
Bach. Walter Ferrer	30 horas/semana
Bach. Jorge Gerszonowicz	30 horas/semana
Bach. Roberto Markarian	30 horas/semana
Bach. Ricardo Mañé	30 horas/semana
Bach. Heber Nieto	30 horas/semana
Bach. Gonzalo Pérez	30 horas/semana
Bach. Ana Asuaga de Píriz	20 horas/semana
Agrim. Carlos Asuaga	20 horas/semana
Bach. Nelly Camporeale de Roda	20 horas/semana
Bach. Martín Cerrizuela	20 horas/semana
Bach. Daniel Genene	20 horas/semana
Bach. Néstor Bóveda	20 horas/semana
Bach. Gerardo González	20 horas/semana
Bach. Alejandro Pollak	20 horas/semana

Este último informe menciona que el Instituto edita dos series de publicaciones, las *Publicaciones del Instituto de Matemática y Estadística* y las *Publicaciones Didácticas* e incluye además una lista de 76 publicaciones de los integrantes del Instituto aparecidas desde 1960. La lista está incompleta pues falta al menos una página al final del informe.

Los dos informes mencionados y también los de 1959 y 1963 pueden verse en `https://dl.dropboxusercontent.com/u/88608805/Memorias\%20IME.pdf`

El crecimiento observado en el número de integrantes del IME se produjo acompañando cambios importantes en la Facultad de Ingeniería, que pasó, de una organización en la que coexistían con independencia los institutos y las cátedras, a incorporar a los institutos los docentes originalmente asociados a las cátedras. Como consecuencia, todas las tareas que desempeñábamos los docentes, incluyendo la enseñanza, quedaron a cargo de los institutos.

Paralelamente la preponderancia política de los docentes de baja dedicación, cuya actividad principal estaba ligada al ejercicio profesional y subsidiariamente vinculada a la docencia, cedió paso al predominio de los docentes de alta dedicación. Esto motivó un fuerte enfrentamiento entre sectores del cuerpo docente de la Facultad, iniciado antes del período de referencia, que se mantuvo durante todos esos años.

Resistencias a los cambios, especialmente cuando traen aparejada la pérdida de una cuota de poder, aunque sea pequeña, podemos encontrar a lo largo de nuestras propias historias cercanas, incluso las más recientes, y suelen adornarse con ingeniosas argucias o adquirir inusitados rasgos de ferocidad.

La pugna entre "profesionalistas" y "científicos" del período que nos ocupa en la Facultad de Ingeniería, fue dirimida con ayuda de una intervención de la Facultad dispuesta por el Consejo Directivo Central, para entonces presidido por el Rector Oscar Maggiolo.

2. La probabilidad cualitativa

La mención de este tema, en el que se enmarca el contenido del manuscrito de la Figura 1, me da la oportunidad de referirme a dos de mis maestros de los años '60: Cesáreo Villegas y Juan Jorge Schäffer.

A Rafael Laguardia, mi mentor, debo el impulso inicial para que aspirara a integrar el Instituto de Matemática y Estadística, su extraordinaria construcción institucional, y allí disfrutar las múltiples satisfacciones derivadas de la actividad en matemática.

Reconocer la influencia que tuvieron Villegas y Schaffer en mi formación sin dedicar tanto o más reconocimiento a Laguardia sólo se explica porque no quiero repetir conceptos ya expresados en mi intervención durante el homenaje que le rindió la Facultad de Ingeniería en 2006 con motivo de cumplirse 100 años de su nacimiento (Cabaña [2006]), recogida casi íntegramente por Inchausti [2007].

2.1. Cesáreo Villegas

Varios años antes del período de referencia, Laguardia había querido que el IME impulsara el estudio de la probabilidad y de la estadística, y en oportunidad de encontrar a Paul Halmos en un congreso le pidió que le sugiriera a quién invitar para que viniera a estimular el desarrollo de actividades en esas áreas. Halmos se recomendó a sí mismo para desarrollar esa tarea (Halmos [1985]). Como consecuencia Laguardia le invitó, Halmos influyó muy positivamente en la formación matemática (sin sesgos estadísticos visibles) de Gunter Lumer y de Juan Schäffer, pero no ayudó a que se cumpliera el propósito inicial de Laguardia.

Fué Cesáreo quien contribuyó cabalmente a cumplirlo. Para el comienzo de la década que nos ocupa había venido a hacerse cargo de la investigación en estadística en el IME, y de su enseñanza mediante actividades extracurriculares en la Facultad de Ingeniería, y curriculares en la Facultad de Agronomía.

Era un trabajador dedicado, más bien callado, compartía generosamente su tiempo y sus conocimientos, y en las reuniones cotidianas del Instituto para tomar café lucía tan tímido como bien humorado. Era un católico practicante, y parte de sus vacaciones las pasaba con su esposa e hijos en un lugar para retiro espiritual ubicado en La Floresta.

Mi primer contacto con la probabilidad y la estadística lo debo a Cesáreo, que dictó un curso de introducción a la estadística para docentes y estudiantes de la Facultad al que asistí, aproximadamente en el segundo semestre de 1957 o el primero de 1958. A partir del segundo semestre de 1958 fue mi guía en el estudio de la estadística, y en la realización de trabajos de asesoramiento para diversos interesados externos al Instituto y frecuentemente a la Facultad y a la Universidad.

En los primeros años del período de referencia estaba interesado en los fundamentos de la probabilidad, y particularmente en la probabilidad cualitativa. En 1964 publicó un artículo en los Annals of Mathematical Statistics (Villegas [1964]) en el que introdujo el concepto de continuidad monótona en la probabilidad cualitativa y mostró que toda probabilidad cualitativa sin átomos y monótonamente continua tiene una única medida de probabilidad compatible. En §2.2 mencionamos las definiciones involucradas en este resultado.

En 1968 dejó su cargo en el Instituto y emigró a los Estados Unidos de Norte América y a Canadá, donde trabajó en Simon Fraser University hasta su deceso.

El obituario (Figura 3) firmado por Tim Swartz y Michael Stephens (coautor este último con Ralph D'Agostino de *Goodness-of-fit Techniques* (D'Agostino and Stephens [1986]) describe con agudeza el carácter de Cesáreo, que no cambió con su traslado al hemisferio norte.

2.2. Definición de probabilidad cualitativa

Tomamos del manuscrito de la Figura 1 los siguientes elementos:

- Un álgebra $\mathcal{A}$ de sucesos con orden $\subset$, operaciones $\cup$, $\cap$, y elementos mínimo y máximo o, s respectivamente. La igualdad de elementos de $\mathcal{A}$ se denota $\equiv$.
- Un **pre-orden lineal** en $\mathcal{A}$, es decir, una relación $\leq$ que satisface, para cualesquiera A, B y $C \in \mathcal{A}$;

  (LPO$_1$): $A \leq B$ o $B \leq A$ (y como consecuencia $A \leq A$);

  (LPO$_2$): $A \leq B$, $B \leq C$ implican $A \leq C$.

Cesareo Villegas, 1921-2001 - Statistics and Actuarial Science - Simon Fraser University 11/6/16 15:18

SFU SIMON FRASER UNIVERSITY
ENGAGING THE WORLD

Statistics and Actuarial Science

Cesareo Villegas, 1921-2001

Cesareo Villegas, Professor Emeritus in the Department of Statistics and Actuarial Science at Simon Fraser University passed away on July 8/2001 at 80 years of age. He is survived in Canada by his wife Nellie, four children and four grandchildren, and in Uruguay by three brothers and two sisters.

Professor Villegas received the Ing Ind degree in Engineering from the U. de la Republica in Uruguay in 1953. After 20 years in faculty positions at U. de la Republica, he came to North America as a visiting Associate Professor at the University of Rochester (1968 to 1970). He joined Simon Fraser University in 1970 as an Associate Professor and was the founding statistician. From 1979 until his retirement in 1986, he served as Full Professor.

Cesareo Villegas was an expert in the foundations of Bayesian statistics, beginning his work in the days when Bayesian methods were not so fashionable. He was one of the original handful of pioneers who participated in the now wildly popular Valencia meetings that promote the Bayesian point of view.

His publications were theoretical and included amongst others, eight papers in the Annals and three in JASA. Some of his best known work involved the development of priors satisfying certain invariance properties.

Although his published work was characterized by mathematics, and in particular algebra and probability theory, Cesareo had an interest in applications. One topic which caught his fancy for a sustained period involved the possible relationship between river flows and sunspots. Professor Villegas was a scholar; he read widely, he thought long and deeply and he wrote quality papers. He was active in his retirement and maintained an NSERC grant up until the year of his death.

Cesareo was a gentle man who lived his life with dignity. Although quiet in nature, he could become animated when engaged in almost any topic, spiritual or scientific. He was generous with his time to young investigators and when it was clear that he was unable to spend his grant in 2001, he used the balance to support graduate students at SFU. He was a role model who demonstrated how to love and how to attend consistently to one's work without being overly distracted by the politics of academia. His priorities in life were firmly established, and in increasing order of importance, these included statistics, his family and his faith.

Cesareo had a slow growing prostate cancer for a number of years. The last three months he was hospitalized and was further diagnosed with a brain tumour. He lived his last months and days pain free.

He is deeply missed.

Respectfully submitted,

Tim Swartz and Michael Stephens
Department of Statistics and Actuarial Science
Simon Fraser University

https://www.stat.sfu.ca/people/faculty/history/Villegas.html Página 1 de 1

Figura 3: Nota tomada de https://www.stat.sfu.ca/people/faculty/history/Villegas.html

Escribimos $A = B$ si $A \leq B$ y $B \leq A$, y $A < B$ si $A \leq B$ pero no se cumple $B \leq A$.

Una **probabilidad cualitativa** es un pre-orden lineal con las propiedades:

(Q_1): $o < s$, $o \leq A$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$;

(Q_2): si $A, B, C \in \mathcal{A}$, $A \cap C = B \cap C = o$, entonces $A \leq B$ si y sólo si $A \cup C \leq B \cup C$.

De (Q_1), (Q_2) resulta $A \leq s$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

2.3. Compatibilidad entre probabilidades cualitativas y medidas de probabilidad

Si P es una probabilidad en $\mathcal{A}$, entonces la relación

$$A :\leq B \text{ si y sólo si } P(A) \leq P(B) \tag{1}$$

es una probabilidad cualitativa.

Cuando se cumple (1) se dice que P y $\leq$ son compatibles. La observación precedente muestra que toda medida de probabilidad tiene una probabilidad cualitativa compatible.

Hay resultados de Savage [1954 (2nd ed. 1972] y de Villegas [1964] que dan condiciones para que una probabilidad cualitativa admita una medida de probabilidad compatible:

Leonard Savage: *Si una probabilidad cualitativa es fina y tensa, existe una única medida de probabilidad compatible.*

Las definiciones de los ingredientes de este enunciado son las siguientes:

- Una probabilidad cualitativa es fina cuando para cada $A > o$ existe una partición finita de s con elementos menos probables que A.
- Dos sucesos A, B son *casi equivalentes* cuando para todo $A' > o$ y disjunto de A se cumple $B \leq A \cup A'$ y para todo $B' > o$ disjunto de B se cumple $A \leq B \cup B'$.
- Una probabilidad cualitativa es *tensa* cuando cada vez que A, B son casi equivalentes, se cumple $A = B$.

Cesáreo Villegas:

- *Toda probabilidad cualitativa sin átomos monótonamente continua en una σ-álgebra tiene una única medida de probabilidad compatible.*
- *Toda probabilidad cualitativa sin átomos es fina y tensa.*
- *Toda probabilidad fina y tensa admite una extensión a una probabilidad monótonamente continua en una σ-àlgebra*

La probabilidad cualitativa $\leq$ definida en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ es monótonamente continua cuando $A_n \uparrow A$, $A_n \leq B$ implican $A \leq B$.

2.4. Juan Schäffer y la búsqueda de un contraejemplo

De los resultados de la sección anterior surge que las probabilidades cualitativas no atómicas tienen medidas de probabilidad compatibles.

¿Es posible que una probabilidad cualitativa en una σ-álgebra atómica no admita ninguna medida de probabilidad compatible? Esta pregunta me la planteó Cesáreo y me tuvo pensando y haciendo innumerables diagramas que representaban probabilidades durante largo tiempo.

Juan Schäffer se interesó por saber qué preocupación motivaba tantos diagramas, y me dio la oportunidad de discutir con él mis progresos y mis retrocesos. De no ser por su estímulo quizá no hubiera persistido en el empeño. Contar con el apoyo de Juan fue para mi en esa instancia como haber obtenido una beca de iniciación a la investigación.

Después de fracasar en encontrar contraejemplos en álgebras de tres y cuatro átomos logré construir uno en un álgebra de cinco, pero ¿cómo describir ese enmarañado proceso?

Para eso a la ayuda que me habían proporcionado las discusiones con Juan se agregó su participación decisiva en la escritura del manuscrito. Su estilo riguroso en la formulación matemática y su sólido manejo del idioma inglés están claramente presentes en el resultado.

Le convencí de que firmáramos ambos el manuscrito, pero no aceptó ser el primer autor como yo entendía en aquél momento que correspondía a su jerarquía académica. Aprendí entonces a colocar los autores en orden alfabético, práctica usual entre los matemáticos, aunque diferente a la que se usa en otras disciplinas.

Había conocido a Juan no mucho tiempo antes de estas actuaciones, cuando regresó de Suiza con dos doctorados, uno en Ingeniería Eléctrica y otro en Matemática, luego de lo cual obtuvo el título de Licenciado en Matemática de nuestra Facultad de Humanidades y Ciencias, por reválida. Era inquieto, ingenioso, le gustaban los desafíos intelectuales, y apreciaba y respetaba las cuestiones formales.

Comenzó a colaborar con Massera en el estudio de problemas en los que el análisis funcional aportaba elementos para dar respuesta a problemas de las ecuaciones diferenciales. Tenían caracteres muy diferentes. Massera era más flexible, como era de esperar de un político. Schäffer era más estricto, incapaz de aceptar un desliz ético. Le temblaban los bigotes cuando recorría las oficinas anunciando "Coloquio!" o bien "Café!", y agitaba los brazos con varias cartas en cada mano cuando volaba hacia el correo que estaba bajando poco más de 100 metros por Herrera y Reissig.

No mucho después del frustrado intento de publicar nuestro artículo, fue el principal gestor en favor de que yo fuera invitado a The Rockefeller University en New York como Research Associate de Henry P. McKean Jr. Durante esa estancia en New York, fui guiado por McKean para redactar mi primera publicación en una revista de circulación internacional. *Please cut off all these Bourbakisms* escribió una vez en rojo sobre uno de mis borradores, gracias a lo cual la redacción resultante tuvo menos formalismos que la del trabajo rechazado y la del que le siguió, aparecido en las PMU. También me sugirió que aplicara la integración estocástica en espacios de Hilbert al estudio de las vibraciones de una cuerda sometida a ruido, cosa que hice luego de mi regreso a Montevideo. Al igual que Villegas, Schäffer emigró a los Estados Unidos de Norte América.

Desde hace cuarenta y ocho años ha sido profesor (y en algún período Decano de estudios) en la Carnegie Mellon University, en Pittsburgh, donde continúa activo con ochenta y seis años de edad.

Además del libro sobre ecuaciones diferenciales y análisis funcional del que es coautor con Massera (Massera and Schäffer [1966]), ha escrito al menos otros tres, *Geometry of spheres in normed spaces* (Schaffer [1976]), *Linear Algebra* (Schäffer [2014a]) y *Basic Language of Mathematics.* (Schäffer [2014b]).

La Figura 4 lo muestra junto a Cesáreo presenciando atentamente una conferencia en la Facultad de Ingeniería.

2.5. Un ambiente intranquilo y la Aguja de Buffon

No es casual que Cesáreo y Juan se fueran a continuar sus vidas y su trabajo en otra parte, en esos años ásperos, que hacían presagiar futuros años aún más ásperos. El trabajo matemático, como tantos otros trabajos, se vuelve difícil en ambientes de intranquilidad y hasta de peligro. Así era el ambiente que nos rodeaba a fines de los años '60 y principios de los '70, y así lo describimos en un comentario contenido en nuestro informe sobre actividades matemáticas en Uruguay, para la III Conferencia Interamericana de Educación Matemática que se realizó en Bahía Blanca a fines de 1972. El editor local, que reunió las contribuciones de los países, tachó ostensiblemente en rojo ese comentario, que no disimulaba la participación de los represores en causar el estado de intranquilidad, cuando envió los materiales para ser publicados por la Oficina Regional de Unesco que funcionaba en Montevideo.

El Director de la Oficina, un español llamado Antonio de Veciana, me llamó para preguntarme si el tachado era mío o si, en caso que no lo fuera,

Figura 4: José luis Massera, Fernando Forteza, Cesáreo Villegas, Juan Schaffer, Günter Lumer y Rafael Laguardia, en la primera fila. En la segunda están Gerardo Rodríguez y Alfredo Jones. En la tercera, Carlos Infantozzi. Fotografía tomada del archivo del IMERL, incluida en el Suplemento al Volumen 7 de las Publicaciones Matemáticas del Uruguay.

lo aceptaba. Como mi informe había sido aprobado por la Comisión del Instituto, le respondí que ya no me pertenecía y que en consecuencia no aceptaba la eliminación de parte del texto. Le sugerí que diera el informe por no presentado.

El Director de Veciana estuvo de acuerdo, pero decidió además no publicar ninguno de los informes de los otros países. Supongo que el editor local, Lluis Santaló, matemático catalán radicado en Argentina, geómetra integral de primer nivel reconocido mundialmente, principal organizador de la Conferencia, habrá llegado a conocer el resultado no deseado de su incomprensible tachadura. Quizá se haya preguntado, como aún hoy me lo pregunto, si la decisión de censurar la publicación de todos los informes adoptada por de Veciana fue para no discriminar negativamente a Uruguay o para castigarle por su inconsulta tachadura.

Esta anécdota, traída a colación en un ambiente probabilístico y estadístico, sugiere recordar la hermosa solución al bien conocido Problema de la Aguja de Buffon, cuyo enunciado omito por archiconocido, dada por Santaló [1989.]: Si la distancia entre líneas es $2a$ y la longitud de la aguja es $2l < 2a$, la probabilidad de que la aguja corte una línea es igual a la esperanza E del número de cortes. Esta es proporcional a la longitud de la aguja, $E = 2lk$ y es independiente de su forma. Por lo tanto cuando la aguja se curva hasta formar una circunferencia de radio a, que tiene longitud $2\pi a$, el número de cortes es 2, con probabilidad uno, y lo mismo vale la esperanza. De $2 = 2\pi ak$ resulta $k = 1/\pi a$ y entonces la probabilidad de que la aguja de longitud $2l$ corte una de las líneas distantes $2a$ es $2l/\pi a$.

2.6. El contraejemplo

En $\mathcal{A} = 2^s$, $s = \{a, b, c, d, e\}$ consideramos la probabilidad π que asigna a cada átomo las probabilidades $\pi(a) = 1/24$, $\pi(b) = 2/24$, $\pi(c) = 5/24$, $\pi(d) = 6/24$ y $\pi(d) = 10/24$.

En lo que sigue simplificamos la notación denotando las uniones de átomos de $\mathcal{A}$ sin el símbolo $\cup$, por ejemplo, $a \cup b \cup d = abd$.

Introducimos la relación $\leq$ definida de la manera siguiente:

- Si $\pi(A) < \pi(B)$, entonces $A < B$
- En cada uno de los restantes casos, cuando $\pi(A) = \pi(B)$, definimos

$$
\begin{array}{ll}
\varphi(d) = \varphi(ac) = 6/24 & d < ac \\
\varphi(bd) = \varphi(abc) = 8/24 & bd < abc \\
\varphi(de) = \varphi(ace) = 16/24 & de < ace \\
\varphi(bde) = \varphi(abce) = 18/24 & bde < abce \\
& \\
\varphi(bc) = \varphi(ad) = 7/24 & bc < ad \\
\varphi(bce) = \varphi(ade) = 17/24 & bce < ade \\
& \\
\varphi(ae) = \varphi(cd) = 11/24 & ae < cd \\
\varphi(abe) = \varphi(bcd) = 13/24 & abe < bcd \\
& \\
\varphi(acd) = \varphi(be) = 12/24 & acd < be
\end{array}
$$

Los grupos están separados en la enumeración precedente para facilitar la verificación de que la propiedad (Q_2) se cumple. Las restantes propiedades son casi inmediatas.

Finalmente se verifica que si π fuera una probabilidad compatible con $\leq$, se cumpliría

$$\pi(d) < \pi(a) + \pi(c)$$
$$\pi(b) + \pi(c) < \pi(a) + \pi(d)$$
$$\pi(a) + \pi(e) < \pi(c) + \pi(d)$$
$$\pi(a) + \pi(c) + \pi(d) < \pi(b) + \pi(e).$$

y se observa que la suma de estas desigualdades conduce a una contradicción.

En resumen: *La probabilidad cualitativa en estos casos excepcionales de álgebras atómicas, si bien no aporta una medida de cuán diferentes son las probabilidades de dos sucesos, permite una discriminación mayor que la probabilidad "cuantitativa".*

2.7. Álgebras pequeñas

El artículo tiene como complemento la demostración de que en álgebras con menos de cinco átomos no hay probabilidades cualitativas incompatibles.

Una vez que se observa que no se pierde generalidad en suponer que todos los átomos son más probables que el mínimo o del álgebra, porque si así no fuera el problema se reduce a considerar el álgebra en que los estados igualmente probables con o se identifican con este último, se enumeran las probabilidades cualitativas y las clases de equivalencia de las medidas de probabilidad que inducen la misma probabilidad cualitativa, y se observa que ambas enumeraciones están en correspondencia, a diferencia de lo que ocurre con el contraejemplo.

Las enumeraciones para álgebras de uno y dos átomos son triviales.

2.7.1. Álgebras de tres átomos

Consideremos el álgebra con átomos a, b, c, para los que puede suponerse sin pérdida de generalidad $a \leq b \leq c$ y en correspondencia $\pi(a) = \alpha$, $\pi(b) = \alpha(1+\beta)$ y $\pi(c) = \alpha(1+\beta+\gamma)$ con $0 \leq \beta \leq \gamma$.

Las regiones del cuadrante $\beta \geq 0, \gamma \geq 0$ indicadas I a $VIII$ en el diagrama de la figura 5 tienen la propiedad de que dos puntos de la misma región son compatibles con una misma probabilidad cualitativa, y puntos de diferentes regiones son compatibles con diferentes probabilidades cualitativas. Encontramos dos regiones de dimensión cero, cuatro de dimensión uno y dos de dimensión dos, en total: ocho.

La matriz de la Figura 6, por su parte, sirve de guía para enumerar las probabilidades cualitativas en la misma álgebra. La suposición de que $o \leq a \leq b \leq c$ impone las comparaciones que se indican en la matriz.

Hay tres comparaciones que pueden elegirse de más de una manera, y en total resultan $2 \times 2 \times 3 = 12$ doce combinaciones de igualdades o desigualdades. Los casilleros que indican parejas entre paréntesis tienen

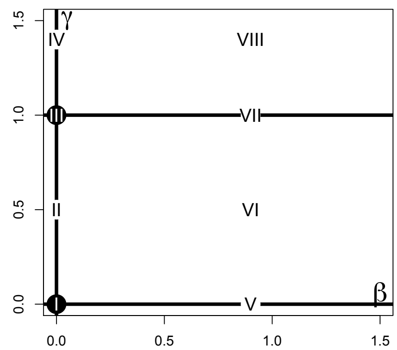

Figura 5: Enumeración de las clases de medidas de probabilidad en $\mathcal{A} = 2^{\{a,b,c\}}$

	o	a	b	ab	c	ac	bc	abc
o	$=$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$
a		$=$	$\overset{\leq}{=}$	$<$	$(a,b),(b,c)$	$<$	$<$	$<$
b			$=$	$<$	$\overset{\leq}{=}$	$<$	$<$	$<$
ab				$=$	$\begin{smallmatrix}\leq\\=\\>\end{smallmatrix}$	(b,c)	$(a,b),(b,c)$	$<$
c					$=$	$<$	$<$	$<$
ac						$=$	(a,b)	$<$
bc							$=$	$<$
abc								$=$

Figura 6: Enumeración de las probabilidades cualitativas en $\mathcal{A} = 2^{\{a,b,c\}}$

la relación determinada una vez que se han fijado las comparaciones que indican los paréntesis.

De las doce combinaciones posibles, hay cuatro que son incompatibles, a saber

- $a = b = c$ implica $ab > c$ y por lo tanto se descartan los casos $a = b = c = ab$ y $a = b = c > ab$
- $a < b = c$ implica también $ab > c$ y se descartan los casos $a < b = c = ab$ y $a < b = c > ab$

Quedan ocho casos que no hemos descartado, que necesariamente corresponden a las ocho probabilidades enumeradas anteriormente.

Una enumeración de las probabilidades cualitativas puede realizarse mediante un programa en el que cada probabilidad en un álgebra de N átomos se representa mediante una matriz de $n \times n$, $n = 2^N$. Cada índice i de fila o columna corresponde a uno de los sucesos, A_i del álgebra. El elemento de la fila i y columna j es uno si $A_i \leq A_j$ y en caso contrario es cero.

Las siguientes matrices representan las ocho probabilidades cualitativas en álgebras de tres átomos:

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

El orden de los 8 elementos del álgebra es $o, a, b, ab, c, ac, bc, abc$.

2.7.2. Álgebras de cuatro átomos

La verificación para álgebras de cuatro átomos es similar, pero en vez de existir ocho probabilidades cualitativas, hay ochenta y ocho. La Figura 7 ayuda a enumerar las (88) clases de equivalencia de probabilidades. De acuerdo a la dimensión, asociada al número de igualdades que las definen, se clasifican como indica la tabla siguiente:

Dimensión	número de sub-regiones
0	8
1	30
2	36
3	14

El programa para la enumeración de las probabilidades cualitativas mencionado en relación con las álgebras de tres átomos puede aplicarse en este caso. Consta de dos secciones. En la primera, dada un álgebra

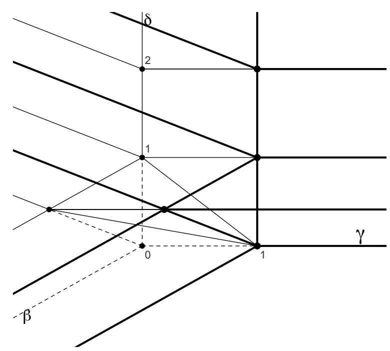

Figura 7: Enumeración de las clases de medidas de probabilidad en $\mathcal{A} = 2^{\{a,b,c,d\}}$

de N átomos, a cada una de las N álgebras que se obtienen quitando cada uno de los átomos se asocia una de las probabilidades cualitativas en álgebras de $N-1$ átomos. Se seleccionan aquéllas que no conducen a incoherencias, y se agregan los unos que corresponden al orden supuesto de los estados, y a que son todos más probables que o y corresponden a un pre-orden lineal.

En una segunda sección se completan de todas las maneras posibles los lugares aún no determinados de las matrices que provee la primera sección, y se rechazan las que no corresponden a una probabilidad cualitativa.

La tabla siguiente indica los tiempos de procesamiento (en una iMac16,2 con procesador Intel Core i5 a 3,1 GHz) para obtener las probabilidades cualitativas en un álgebra de cuatro átomos, y una estimación del tiempo que requeriría obtenerlas para un álgebra de cinco átomos con el mismo programa, seguramente mejorable, utilizado en los otros casos.

Átomos	Candidatos	tiempo	Probabilidades	tiempo
2	1	0.00662 segs	2	0.00108 segs
3	8	0.00186 segs	8	0.450 segs
4	236	0.579 segs	88	41.13 mins
5	1344	1.679 mins	?	103.528 días

Referencias

Enrique M. Cabaña, december 2006. URL `https://sites.google.com/site/emcabana/home/algunos-documentos-1`.

Ralph B D'Agostino and Michael A Stephens, editors. *Goodness-of-fit Techniques*. Marcel Dekker, Inc., New York, NY, USA, 1986.

Paul R. Halmos. *I want to be a mathematician. An automathography.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.

Martha Inchausti, editor. *Una vida dedicada a la matemática, documentos del Archivo Laguardi*, volume III of *Archivos Privados en el AGU*. Universidad de la República, 2007.

José Luis Massera and Juan Jorge Schäffer. *Linear differential equations and function spaces*, volume 21 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York-London, 1966.

L. A. Santaló. Las secciones indiscretas. *Ciencia Hoy*, 1(2), Febrero/Marzo 1989.

Leonard Savage. *The Foundations of Statistic*. Dover Publications, INC., NEW YORK, 1954 (2nd ed. 1972).

Juan Jorge Schaffer. *Geometry of spheres in normed spaces*, volume 20 of *Lecture notes in pure and applied mathematics*. M. Dekker, New York, 1976.

Juan Jorge Schäffer. *Linear Algebra*. World Scientific Publishing Company Pte Limited, 2014a. URL `https://books.google.com.uy/books?id=rqHsoAEACAAJ`.

Juan Jorge Schäffer. *Basic Language of Mathematics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2014b.

Cesáreo Villegas. On qualitative probability /sigma-algebras. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35(4):1787–1796, December 1964.