Seminario elemental de problemas de matemática. Centro de Matemática, año 2001.

Ajedrez y matemática

Presentamos una serie de problemas relacionados con al ajedrez, basicamente tomados de [Guik, 1983] [1], ver también [Gardner][2]

1. Tableros. El tablero habitual es un cuadrado con 8 filas (numeradas de 1 a 8) y 8 columnas (notadas de a a h, o también de 1 a 8), del que resultan 64 casillas, de colores alternados blanco y negro. Para el movimiento de las piezas, es interesante considerar las siguientes variantes de tablero: (a) *rectangular:* $m \times n$, (b) *tri-dimensional:* $m \times n \times k$, (c) *cilíndrico:* se pegan las columnas a y h, (d) *toroidal:* en un tablero cilíndrico se pegan las filas 1 y 8. (e) *de Möbius:* se pegan las columnas a y h luego de tornearlas, de forma que la fila 1 coincida con la 8, la 2 con la 7, etc. (Se piensa que el tablero es transparente). (f) *billar:* los bordes reflejan el movimiento de las piezas. (g) *proyectivo:* las filas, columnas y diagonales se prolongan hasta tres puntos infinitos respectivos. Por ejemplo, una torre puede salir por una fila y entrar por otra. (h) combinaciones de los anteriores, por ejemplo *toroidal y tri-dimensional.*

Se juega también ajedrez en tableros hexagonales, con casillas hexagonales, coloreadas blanco, gris y negro. Es necesario definir los movimientos de las figuras, y la posición inicial. ¿Son posibles otros tableros planos, con casillas con forma de polígonos regulares?,¿como colorearlas?

2. Figuras y valores. Notaremos mediante R al rey, D la dama, A los alfiles, C los caballos, T las torres y P los peones. Más alla del hecho bien conocido, de que el valor de una pieza depende de la posición en la partida, daremos un criterio numérico para definir el valor de cada pieza, (motivados además por los programas de ajedrez). Definimos las siguientes cantidades para una pieza x: $S(x)$ es la suma de las casillas alcanzadas por la pieza desde cada de las casillas en que se puede encontrar, $C(x)$ es la cantidad de casillas en que se puede encontrar, y el cociente $M(x) = S(x)/C(x)$ da la movilidad. Si tomamos al peón como referencia, el valor $V(x) = M(x)/M(P)$ de cada figura resulta (el caso del rey es excepcional, pero se incluye): $V(D) = 7.7$, $V(T) = 4.7$, $V(A) = 3$, $V(C) = 2.5$, $V(R) = 1.7$, $V(P) = 1$.

Un primer comentario sobre el método, es que sirve para evaluar el valor de las llamadas *piezas fantásticas*, que aparcen en la literatura ajedrecística. La primer forma de producir figuras fantásticas[3] es superponiendo movimientos de piezas: el *Maharajá* combina la dama y el caballo, el *canciller* la torre y el caballo, el *centauro* el alfil y el caballo. Otra forma es limitar la movilidad y llamaremos n-torre a una torre que a lo sumo se desplaza n casillas. Por ejemplo, una 1-dama, tiene la movilidad del rey. Una tercera forma es variar los movimientos del caballo. Este si está en (i, j) puede desplazarse a $(i \pm 1, j \pm 2)$ o $(i \pm 2, j \pm 1)$, si estas casillas están en el tablero. Cambiando el 1 y el 2 por otros valores naturales a y b, obtenemos otras caballos, que llamaremos (a, b)-caballo Observese que un $(1, 1)$-caballo es un 1-alfil, un $(0, 1)$-caballo es una 1-torre.

Un segundo comentario, es que permite observar como varía el valor relativo de las figuras en tableros no convencionales. La movilidad del peón, el caballo y el rey (piezas de *corto alcance*), depende solo del tamaño del tablero por los efectos de los bordes, y mejora en tableros 8×8 cilíndricos o toroidales, mientras que para la dama, la torre y el alfil, (piezas de *largo alcance*) les favorece el aumento de tamaño del tablero. Es interesante calcular el límite de los valores en un tablero $n \times n$ para las figuras de corto alcance, y el equivalente asintótico, para las de largo alcance. Obsérvese además, que en un tablero-billar, el alfil gana en movilidad, mientras la torre no. El caballo por su parte, puede saltar sin cambiar el color de la casilla.

[1] Ajedrez y matemática, E. Ia. Guik, Ed. Nauka, Moscú: 1983.

[2] Gardner, M: en partes de varios libros, y artículos en *Scientific American.*

[3] ¡Son tan fantásticas las nuevas figuras como las habituales!

3. Historia del ajedrez. Diremos únicamente que el juego, considerando sus variantes es muy antiguo, y referiemos a la siguiente leyenda. Un monarca, fascinado por la riqueza del juego, quiso premiar a su inventor. En el palacio, el inventor de juego, solicitó que se le entregara sencillamente granos de trigo, en cantidad tal, que en la primer casilla del tablero se encuentre un grano, en la segunda 2, en la tercera $4 = 2^2$, ..., en la casilla 64, 2^{63} granos. Sorprendido el monarca por la modestia del pedido, mandó calcular cuanto trigo era necesario, resultando una cantidad astronómica, no siendo posible satisfacer al inventor. Calcular la cantidad de granos en cuestión, y aproximarla (a) mediante logaritmos (b) utilizando que $2^{10} = 1024 \sim 10^3$.

4. Finitud del juego. Se plantea la siguiente pregunta: ¿es finita la cantidad de partidas de ajedrez? En caso afirmativo, obtener una acotación del número de partidas posibles. Recordemos algunas reglas relevantes con respecto a la pregunta: Un jugador puede solicitar tablas: (a) luego de la tercer repetición consecutiva de movimientos. (b) luego de la tercer repetición de una posición en el tablero. (c) luego de 50 jugadas sin adelantar un peón o comer una pieza.

Con (a) se puede producir una partida infinita (encontrarla). Aplicando (b) y (c) se puede acotar la cantidad de partidas. Una primer cota se obtiene considerando que en cada casilla pude encontrarse una de doce piezas, o estar vacía. Obtenemos a lo sumo $a = 64^{13}$ configuraciones, que dan un máximo de $2a + 1$ partidas, según (b). De la regla (c) se deduce que una partida no puede tener más de $5900 = 50 \times 118$ jugadas. Fundamentar la acotación, encontrar una cota para el número máximo de partidas, y comparar las cotas obtenidas. Encontrar cotas mejores, teniendo en cuenta las reglas del juego (en las filas 1 y 8 nunca hay peones, en una casilla hay un único alfil de un color). Utilizar las aproximaciones de **3**.

En este sentido, el ajedrez es un juego finito. Por lo tanto, es teóricamente posible decidir de antemano en cada situación quien gana (similar al juego de cruces y ceros, que tiene 9! partidas.)

5. Independencia y dominación. Un conjunto muy interesante de problemas surge de considerar los siguientes dos problemas combinatiorios. (I) Determinar la mayor cantidad posible de figuras de un mismo tipo (damas, torres, alfiles, caballos o reyes) de forma que no se ataquen mutuamente. Las denominaremos *independientes*, notando $I_n(x)$ la cantidad para la figura x en un tablero $n \times n$. (II) Determinar la menor cantidad posible de figuras de un mismo tipo, que colocadas en el tablero ataquen todas las casillas libres, notando $D_n(x)$ la cantidad para la figura x en un tablero $n \times n$.

Un complemento a estos problemas, es calcular la cantidad distinta de formas en que se pueden disponer las I_n o D_n figuras en el tablero, notando $CI_n(x)$ y $CD_n(x)$ la cantidad de combinaciones posibles respectiva.

De la gran cantidad de problemas que se plantean, con grados de dificultad muy diversos, distiguimos algunos. (a) Demostrar que $I_8(C) = 32$, con $CI_8(C) = 2$. (b) Hallar $I_n(C)$, $CI_n(C)$. (c) Demostrar que $I_n(T) = n$ con $CI_n(T) = n!$. (d) Demostrar que $I_n(D) = n$ si $n \geq 4$, $CI_8(D) = 92$ (Problema de Gauss) $D_8(D) = 5$ (e) Demostrar que en un tablero cilíndrico no se pueden ubicar 8 damas independientes. (f) Es interesante el hecho, de que no se concen (referido al año 1983) muchas de las cantidades referidas, como por ejemplo $CD_n(C)$, $CI_n(D)$, $CI_n(R)$.

6. Problema del caballo. ¿Es posible recorrer todo el tablero a paso de caballo, visitando una sola vez cada casilla? (Respuesta: si). ¿En caso de ser posible, cuantas formas hay de hacerlo? (Respuesta: No se sabe). Diversos matemáticos prestaron atención a este problema, entre ellos L. Euler. Es interesante una regla (debido a Warnsdorff): Se debe ir a la casilla desde la cual se alcancen menos casillas en el siguiente paso. En caso de empate, se elije al azar. Esta regla, propuesta hace mas de 150 años se consideraba infalible. Las computadoras mostraron que la segunda parte de la regla a veces falla. ¿No se podría en caso de empate, iterar la regla, para ir a la casilla desde la cual en dos pasos se accede a la mínima cantidad de casillas? Algunas variantes:

(a) ¿Es posible salir de $a1$ y llegar, luego de 63 saltos a $h8$?, (b) ¿Existen soluciones cíclicas? (es decir, de la casilla visitada en el último paso se va al primero).

Variaciones: (1) El problema puede plantearse en un tablero $m \times n$ con un (a, b) caballo. (2) ¿Para que valores de (a, b) un (a, b)-caballo puede ir (en un tablero infinito, si es necesario) de un punto dado a cualquier otro? (3) ¿ En cuantas casillas de un tablero infinito se puede encontrar el caballo luego de p pasos?

7. Programas. Una primera aproximacón para elaborar un programa que juege al ajedrez, es construir una función, que para cada posición posible de como resultado un número real, que indique la ventaja de las blancas sobre las negras (esta método fue propuesto por el matemático Claude Shannon, 30/4/1916-24/02/2001). Basados en una tal función, la computadora evalúa esta función en todas las posiciones resultantes de un árbol a partir de la posición actual, con una cierta profundidad (en 1983 era posible recorrer entre 3 y 4 jugadas para cada bando) y elegir la de mayor puntaje. Es interesante, pero requiere conocimientos de ajedrez, construir una función que evalúe las posiciones. El primer campeonato del mundo entre computadoras tuvo lugar en 1974 en Estocolmo.