7. Descripción del proyecto: "Distribución del máximo de un proceso aleatorio y aplicaciones"

A Resumen de la investigación

El presente proyecto tiene como objetivo el estudio de la distribución del máximo de un proceso aleatorio. Más precisamente, se trata de determinar aquellas clases de procesos para los cuales es posible calcular en forma exacta esta distribución, y cuando esto no es posible, estudiar formas de aproximarse a las probabilidades buscadas.

Los modelos que consideramos son tres: Campos Aleatorios (CA), Procesos Aleatorios (PA), con énfasis en ambos casos en los procesos gaussianos, y Procesos de Lévy (PL).

Los resultados esperados son, en algunos casos obtener distribuciones exactas; en otros, propiedades de la distribución, acotaciones, y comportamiento asintótico.

En cuanto a las múltiples posibles aplicaciones del tema de estudio del proyecto estamos interesados en particular en el área de la estadística, la complejidad computacional, las finanzas, y las filas de espera.

Los responsables del proyecto, Ernesto Mordecki y Mario Wschebor han publicado resultados en las cuestiones mencionadas, y plantean este proyecto como continuación del proyecto CSIC I+D "Análisis Estocástico, Campos Vectoriales Aleatorios y Aplicaciones".

El equipo del proyecto se integra además con colegas del extranjero (Jean Marc Azaïs, Francia, Alan Lewis, EUA), un estudiante de la maestría en Ingeniería Matemática (Federico De Olivera), estudiantes nucleados en el "Seminario de Estudio en Probabilidad y Estadística", en particular Federico Dalmao y Gonzalo Aniano, becarios del Proyecto CSIC "Análisis Estocástico, Campos Vectoriales Aleatorios y Aplicaciones".

La financiación solicitada esta dedicada a apoyar la formación de jóvenes investigadores, y a la compra de material bibliográfico.

B Fundamentación y antecedentes

Considérense los siguientes problemas:

1. Determinar la probabilidad de que una ola supere la altura de un dique en un puerto.
2. Determinar la probabilidad de que un precio supere un nivel prefijado en un determinado lapso de tiempo.
3. Determinar la probabilidad de que una central telefónica se sature.
4. Determinar la probabilidad de que una compañía de seguros se arruine.

Para dar respuestas a esta clase de problemas consideramos el siguiente modelo matemático: un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un conjunto de índices $\mathbf{T}$, y un proceso aleatorio $X = \{X_t : t \in \mathbf{T}\}$. La variable X_t modela, en los ejemplos mencionados, la altura del mar en el punto t, un precio de interés en el instante t, la carga de la central telefónica en el instante t, o el opuesto del capital de una compañía de seguros. Nos interesa entonces estudiar la distribución de la variable aleatoria

$$M_{\mathbf{T}} = \max\{X_t : t \in \mathbf{T}\},$$

que representa el valor máximo que registra X al variar el parámetro t, reduciendo los problemas mencionados al cálculo de la probabilidad

$$F(\mathbf{T}, u) = P(M_{\mathbf{T}} > u),$$

donde u es el nivel de interés.

El objetivo de nuestro proyecto es entonces estudiar la probablidad antes definida, es decir, la *distribución del máximo* del proceso X.

Los modelos que supondremos para X serán esencialmente tres:

(CA) Un campo aleatorio, es decir, $\mathbf{T}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, con $d > 1$.

(PA) Un proceso aleatorio, es decir $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ y también un intervalo real $\mathbf{T} = [0, T]$.

(PL) Un proceso de Lévy, es decir, un proceso con incrementos independientes y estacionarios, con $\mathbf{T} = [0, \infty)$, y también un intervalo real $\mathbf{T} = [0, T]$.

Las respuestas que intentamos dar a la pregunta formulada puede tomar las diferentes formas:

- Dar una fórmula exacta, cerrada, y calculable para la probabilidad buscada, en los casos en que esto es posible.

y en los casos en que esto no es posible, que son la gran mayoría:

- Estudiar propiedades de la función $F(\mathbf{T}, u)$, especialmente regularidad (existencia de derivadas).

- Dar cotas para los valores posibles que pueda tomar esta probabilidad
- Estudiar el comportamiento asintótico de la probabilidad, especialmente para niveles u altos (u tiende a infinito), o también cuando el espacio de parámetros se agranda.

Los investigadores participantes ya han realizado trabajos independientes sobre estos temas, que, por su naturaleza y extensión, requieren una actividad continuada durante de un período largo. Mediante este proyecto se busca continuar la consolidación de una linea de investigación, resolver algunos de los problemas pendientes y publicar los resultados correspondientes, bajo la forma de artículos en revistas especializadas. Al mismo tiempo, el proyecto contribuiría a continuar apoyando a algunos de los investigadores jóvenes que aún están en etapas de formación.

No se conocen fórmulas cerradas para la distribución de la variable aleatoria $M_{\mathbf{T}}$ en ningún caso relevante de (CA). En cuanto a procesos de un parámetro (PA), sólo existen resultados de este tipo en un pequeño número de casos particulares. Existe una fórmula clásica para el movimiento browniano; también para ciertos procesos Gaussianos especiales, cuya deducción se deriva por métodos analíticos, más o menos complicados, de las propiedades del browniano. Una lista de trabajos - esencialmente completa - es la siguiente: Darling (1983), McKean (1963), Goldman (1971), Lachal (1991), y para procesos Gaussianos estacionarios: Slepian (1961), Shepp, (1971), Shepp y Slepian (1976), Cressie (1980), DeLong (1981).

En el caso de procesos de Lévy (PL), se conoce en algunos casos particulares también por ejemplo Baxter y Donsker (1957), Doney (1987), Mordecki (2002c, 2003), Asmussen et al. (2004).

Una contribución reciente a este tipo de problemas, en el caso de procesos aleatorio (PA), ha sido el perfeccionamiento del uso de un método clásico, basado en la llamada "serie de Rice" (Azais y Wschebor, 2001), que permite reemplazar con gran ventaja los métodos de simulación y Monte-Carlo, por un cálculo numérico esencialmente más rápido y sin las dificultades matemáticas anotadas. Las ideas subyacentes son bastante antiguas [Rice (1944-45), Longuett-Higgins (1962), Slepian (1962), Lindgren (1972), Miroshin (1974)]. El progreso consiste de dos partes: a) el establecimiento de algunos teoremas que permiten utilizar la "serie de Rice" para familias de procesos gaussianos en lugar de algunos casos particulares solamente; b) un estudio adicional que permite comprender algunos problemas analíticos intrincados y mejorar los procedimiento numéricos de cálculo efectivo. Otros métodos numéricos de buena performance han sido puestos a punto por la escuela sueca de procesos estocásticos aplicados a la oceanografía (Rychlik y otros).

En ambos terrenos existe un camino a recorrer que aparece como muy amplio:

En lo que se refiere a a), estudiaremos la extensión de estos resultados a procesos gaussianos con trayectorias no diferenciables y con parámetro d-dimensional, dos temas que parecen presentar dificultades bastante distintas entre si.

El caso típico de procesos gaussianos no diferenciables que nos proponemos estudiar es el movimiento browniano fraccionario con exponente $H, 0 < H < 1$. A pesar de su interés en la modelización de ciertos fenómenos (en Finanzas y en Física), sólo existe una fórmula exacta para la distribución del supremo en el caso $H = 1/2$ (movimiento browniano ordinario) y equivalentes asintóticos de las colas para $1/2 \leq H < 1$ (Berman, 1985; Talagrand, 1988).

Un problema crucial, que aparenta ser difícil, es la extensión práctica de estos métodos a procesos no gaussianos. Más precisamente, los teoremas básicos son válidos en un contexto no gaussiano, pero no los métodos de cálculo efectivo que justifican el interés del método.

En lo que se refiere a b) existe un conjunto importante de problemas abiertos que también figuran en nuestra agenda, relativos a una mejor comprensión de las funciones de Rice, aún en el caso de procesos gaussianos.

En cuanto respecta a procesos de Lévy, se planta la continuación del estudio de la distribución del máximo para procesos con distribuciones de saltos positivos especificados, continuando los primeros pasos dados en Mordecki (2002c, 2003). Se abre el objetivo de estudiar comportamientos asintóticos en casos más generales, continuar con las aplicaciones en finanzas, y comenzar con una nueva aplicación en filas de espera.

B.1 Antecedentes del equipo de investigación

Los antecedentes del equipo de investigación en la temática que desarrolla el proyecto propuesto, han dado lugar a las publicaciones que se detallan.

Azaïs, J-M; Wschebor, M. (1997). Une formule pour calculer la distribution du maximum d'un processus stochastique. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 324, Série I, pp. 225-230, 1997.

Azaïs, J-M; Wschebor, M. (1999). Régularité de la loi du maximum de processus gaussiens réguliers, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris, t. 328, Série I, pp. 333-336, 1999.

Azaïs, J-M; Wschebor, M. (2001a). On the Regularity of the Distribution of the Maximum of one-parameter Gaussian Processes, Probability Theory and Related Fields, 119, 70-98.

Azaïs, J-M; Wschebor, M. (2002). The Distribution of the Maximum of a Gaussian Process: Rice Method Revisited, en *In and out of equilibrium: probability with a physical flavour*, serie "Progress in Probability", pp 321-348, ed. Birkhaser, 2002.

Azaïs, J-M; Wschebor, M. (2004a). Upper and Lower Bounds for the Tails of the Distribution of the Condition Number of a Gaussian Matrix" aceptado por SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 2004.

Azaïs, J-M; Wschebor, M. (2004b). On the roots of a random system of equations. The Shub-Smale theorem and some extensions aceptado por Foundations of Computational Mathematics, 2004.

Azaïs, J-M; Wschebor, M. (2004c). Extrema of random processes and crossing problems (libro en preparación).

Azaïs, J-M; Wschebor, M. (2004d). On the Distribution of the Maximum of a Gaussian Field with d Parameters. aceptado por Annals of Applied Probability.

Azaïs, J-M; Bardet, J-M; Wschebor, M. (2002). On the tails of the distribution of the maximum of a stationary Gaussian process, ESAIM Probability and Statistics, Vol. 6, pp 177-184, 2002.

Cucker, F., Wschebor, M. (2003). On the Expected Condition Number of Linear Programming Problems, Numerische Mathematik, 94, 3, 419-478.

Cuesta-Albertos J., Wschebor M. (2003). Some Remarks on the Condition Number of a Real Random Square Matrix Journal of Complexity, Vol. 19, 4, 548-554.

Cuesta-Albertos J., Wschebor M. (2004). Condition Numbers and Extrema of Random Fields aceptado para publicación en IV Ascona Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, Progress in Probability, Birkhaser.

Kramkov, D.O., Mordecki, E. (1994). Integral options, Theor. Probab. Aplic., **1** 201-210.

Kramkov, D.O, Mordecki, E. (1999). Optimal Stopping and Maximal Inequalities for Poisson Processes. *Publicaciones Matemáticas del Uruguay.* 8, 153-178.

Mordecki E., (1997). *Ruin Probabilities and Optimal Stopping for a Diffusion with jumps.* In *Actas del IV Congreso Monteiro* (Fernandez Stacco E.L. et al. eds.) 39–48. Bahia Blanca, Argentina.

Mordecki, E. (1998). Optimal stopping for a compound poisson process with exponential jumps. *Publicaciones Matemáticas del Uruguay*, **7** 55–66.

Mordecki, E. (1999a). Optimal stopping for a diffusion with jumps. *Finance and Stochastics*, 3 (2) 227–236

Mordecki E., (1999b). Optimal stopping, ruin probabilities and prophet inequalities for Lévy processes. Pre-Mat 2000/38.

Mordecki, E. (2000). Elementary Proofs on Optimal Stopping. Prepublicaciones Matemáticas del Uruguay - PreMat 2000/40

Mordecki, E., Moreira, W. (2001). Russian Options for a diffusion negative with jumps. *Publicaciones Matemáticas del Uruguay*, **9** 37–52

Mordecki E. (2002a) Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes. *Finance and Stochastics*, Volume VI, issue 4, 473–493

Mordecki, E. (2002b). Perpetual options for Lévy processes in the Bachelier *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, Vol. 237, 256–264

Mordecki, E. (2002c) The distribution of the maximum of a Lévy processes with positive jumps of phase-type. Theory of Stochastic Processes, 8(24), N3-4, pp. 309-316.

Mordecki, E., Moreira, W. (2001). Russian Options for a diffusion negative with jumps. *Publicaciones Matemáticas del Uruguay*, **9** (2001) 37–52

Mordecki, E. (2002) The distribution of the maximum of a Lévy processes with positive jumps of phase-type. Theory of Stochastic Processes, 8(24), N3-4, pp. 309-316.

Mordecki E. (2003). Ruin probabilities for a Lévy process with mixed exponential negative jumps. *Theory of Probability and its Applications*, **48**, 2003, 188-194.

Nualart, D.; Wschebor, M. (1991). Intégration par parties dans l'espace de Wiener et approximation du temps local. *Prob. Th. Rel. Fields*, 90, 83-109.

V. Petrov, E. Mordecki (2002). Teoría de Probabilidades. Editorial URSS, Moscú. 268 pp.

Wschebor, M. (1985). Surfaces aléatoires. Mesure géometrique des ensembles de niveau.*Lecture Notes in Mathematics*, 1147, Springer-Verlag.

Wschebor, M. (1997) Distribución del máximo de un proceso gaussiano. El método de Rice. Curso en el IV Congreso de Matemtica Dr. Antonio Monteiro, ed. INMABB-CONICET, Bahia Blanca.

Wschebor, M. (2000). Sur la loi du sup de certains processus Gaussiens non bornés. *C.R. Acad. Sci. Paris,* t. 331, Sér. I, *823-826.*

Wschebor, M. (2001). One-parameter Gaussian Processes: Lectures on the Distribution of the Maximum. Notas de curso. Mérida, Asociación Venezolana de Matemáticos.

Wschebor, M. (2004) Smoothed analysis of $K(A)$, Journal of Complexity, Vol. 20, 1, 97-107, 2004.

C Objetivos generales y específicos

Los objetivos generales de la investigación se centran en la profundización del conocimiento de de la distribución del máximo de un proceso aleatorio, tanto en un intervalo de tiempo finito unidimensional, multidimensional, o, para procesos con parámetro real positivo, en todos los valores del parámetro, para campos aleatorios, procesos aleatorios, y en particular procesos de Lévy.

Como objetivos específicos, detallamos objetivos teóricos y aplicaciones:

Objetivos teóricos

En el caso de los campos aleatorios proponemos extender a los campos vectoriales aleatorios a valores reales, es decir, a las funciones aleatorias de d variables, los resultados sobre la regularidad de la distribución del supremo probados en Azaïs y Wschebor (2001a)) en el caso $d = 1$. Esto conduce naturalmente a la necesidad de la generalización de las fórmulas de Rice a variedades riemannianas e introduce en la cuestión dificultades geométricas considerables, que esperamos poder afrontar durante la ejecución del proyecto presente.

El interés por la regularidad de la función $u \rightsquigarrow F(T, u)$ y la obtención de fórmulas (implícitas) para sus derivadas sucesivas, deriva de dos fuentes: por una parte, la dificultad del problema, que genera técnicas que son interesantes en si mismas, como en el caso $d = 1$; por otra parte, los mismos métodos permiten deducir desigualdades de mayoración-minoración para las derivadas sucesivas de $F(T, .)$ que a su vez son instrumentos nuevos para estimar los valores de la propia función.

Una parte de la extensión de los resultados de regularidad para procesos Gaussianos con parámetro en dimensión 1, ha sido llevada a cabo por Azaïs y Wschebor en el artículo que aparecerá en 2004 en el Annals of Applied Probability. Pero todavía el conocimiento está lejos de lo que se requiere para las aplicaciones potenciales y las dificultades técnicas que aparecen son considerables, incluyendo el estudio de una nueva clase de procesos (los procesos tipo "hélice"), que presentan singularidades especiales en algunos puntos e introducen nuevos problemas en la teoría.

En el caso de procesos aleatorios, publicaciones recientes por Elliot y Chan (2004) sobre problemas resueltos en forma exacta para el movimiento Browniano fraccionario permiten pensar en la factibilidad de obtener fórmulas para la distribución del máximo del movimiento Browniano fraccionario, o por lo menos, en obtener ecuaciones en derivadas parciales para esta distribución.

El objetivo general en el caso de los procesos de Lévy es continuar obteniendo distribuciones exactas para familias cada vez más generales, relacionar los diferentes resultados entre sí continuar con las aplicaciones en finanzas, y comenzar con aplicaciones en filas de espera.

Aplicaciones en estadística

Un aspecto al cual atribuímos mucha importancia es la implementación de estos métodos para su aplicación a algunos problemas de Estadística Asintótica. Existen ejemplos muy sencillos de pruebas de hipótesis en modelos con parámetros molestos ("nuisance parameters"), como por ejemplo los modelos lineales - o ARMA - con cadenas de Markov escondidas, o la Estadística cuyo propósito es estimar el tamaño de un modelo (número de poblaciones que intervienen en una mezcla, orden de un modelo lineal o de un modelo ARMA) en los que la aplicación de los métodos clásicos de máxima verosimilitud conduce, cuando el tamaño muestral tiende a infinito, a que el estadístico relevante para la construcción de la región crítica sea el supremo de un proceso gaussiano con trayectorias regulares o, por lo menos, canónicamente relacionado con un proceso gaussiano. En estas situaciones, la práctica habitual (probablemente el ejemplo más común de aplicación es la Econometría) es simular el proceso límite para estimar la distribución de su supremo por Monte-Carlo. Este método presenta varios inconvenientes: es muy pobre desde el punto de vista teórico; requiere un gran número de operaciones elementales para simular procesos estocásticos de parámetro continuo; y depende de la calidad del generador de números aleatorios utilizado. Esto motiva que una de las finalidades de nuestro trabajo próximo sea la implementación de nuestro método para estos casos, lo cual requiere trabajo matemático adicional.

Aplicaciones en complejidad de algoritmos

Un aspecto nuevo al cual atribuimos trascendencia y que parece ser un área de gran desarrollo futuro, es la aplicación de los métodos de extremos de campos vectoriales aleatorios al estudio de la complejidad de algoritmos. Un primer trabajo en esta dirección es Cucker F. y Wschebor M. (2003). El punto central es que los números de condición que miden la dificultad de ciertos problemas con respecto al error de redondeo, están asociados al mínimo de ciertos campos vectoriales a valores reales y aparece entonces una conexión estrecha entre ambos temas.

En la bibliografía se indican trabajos recientes del equipo del proyecto en este tipo de aplicaciones, que constituyen un área de investigación muy activa en la matemática actual, con puntos de contacto con la computación algebraica y con el análisis numérico (Cuesta y Wschebor (2003, 2004), Azaïs y Wschebor (2004a, 2004b), Wschebor (2004)).

Aplicaciones en Finanzas

Otra aplicación de la distribución del máximo, en el caso de los procesos de Lévy, se da en el área de la parada óptima de un proceso aleatorio, problema que consiste en elegir el momento en el cual detenerlo de forma de maximizar un funcional dependiente de éste y calcular el valor de dicho funcional correspondiente a esta elección óptima. Esta vinculación se obtuvo en Mordecki (2002a).

Dichos problemas encuentran aplicación directa en los problemas de valuación de opciones americanas, parte de la teoría estocástica de las finanzas. El eje de innovación de los problemas estudiados, que conforman el principal antecedente de la propuesta, es la generalización de los resultados conocidos para el modelo de Black-Scholes (1973) (que presentan evolución continua en el tiempo) al caso en que se registran cambios bruscos en la evolución de los activos primarios, modelados mediante procesos de trayectorias discontinuas. Las publicaciones de Mordecki (1999), (1999a), (2000), (2000a), (2000b), Kramkov y Mordecki (1999) y Mordecki y Moreira (2001) refieren a problemas resueltos de esta naturaleza. En Mordecki (2002) se vincula la solución del problema de parada óptima para procesos de Lévy con el cálculo de probabilidades de ruina para la misma clase de procesos, y se dan fórmulas cerradas para la solución de problemas de parada óptima en base a los resultados obtenidos para la distribución del máximo (o el problema de la ruina del proceso opuesto) obtenidos en (1999b).

Las referencias generales en esta temática, son por un lado las relativas al cálculo estocástico, como Jacod y Shiryaev (1987). La problemática de los procesos de Lévy esta tratada en dos monografías recientes, Bertoin (1996) y Sato (1999). Los problemas de parada óptima de procesos estocásticos están expuestos en Shiryaev (1978)

D Especificación de las preguntas que busca responder el proyecto

1. Obtener desigualdades para $F(T, u)$.

   Existen los resultados clásicos y bien conocidos para martingalas (desigualdades de Doob y sus extensiones en Análisis Estocástico). La teoría clásica mayor ha sido desarrollada en el caso de los procesos gaussianos y son ejemplos de una extensa gama de resultados fundamentales, las desigualdades de D. Slepian, C. Borell y R.M. Dudley. Los métodos para la obtención de estas desigualdades son diversos, incluyendo las desigualdades isoperimétricas y sus generalizaciones, a partir del artículo fundacional de Landau y Shepp. Referencias generales para estos temas y sus extensiones a procesos no gaussianos, son los libros de Michel Ledoux (1996, 2001) y el artículo de Michel Talagrand (1996). Contribuciones recientes de gran importancia están incluídas en los trabajos de Li y Shao, que mejoran sustancialmente las desigualdades clásicas de Slepian, Gordon y Berman, y son instrumentos poderosos en una variedad de aplicaciones

2. Describir el comportamiento de $F(T, u)$ bajo diversas asintóticas, especialmente cuando $u \to +\infty$, o en las casos usuales en que T es un subconjunto de $\mathcal{R}^d$, cuando T se dilata indefinidamente, de acuerdo a una cierta ley. Algunas referencias son las siguientes, para el caso de los procesos gaussianos: Qualls and Watanabe (1973); Piterbarg (1981, 1996); Leadbetter, Lingren and Rootzén (1983); Berman (1985a, b, 1992); Talagrand (1988); Berman y Kôno (1992) ; Sun (1993); Wschebor (2000); Azaïs,Bardet and Wschebor (2001). Nuevos refinamientos del comportamiento asintótico están contenidos en los trabajos recientes de Piterbarg y, especialmente, de Adler y Taylor, en los cuales se relaciona la geometría del dominio $\mathbf{T}$ con el comportamiento asintótico de los campos Gaussianos definidos en él.

3. Estudiar la regularidad de la función $F(T, u)$. En esta materia, después del trabajo precursor de Ylvisaker (1968) lo fundamental ha sido el artículo de Tsirelson (1975) acerca de la diferenciabilidad de la distribución del supremo de procesos gaussianos, que ha sido objeto de algunas mejoras

ulteriormente. Hemos hecho referencia más arriba a las extensiones parciales a campos Gaussianos (Azaïs y Wschebor (2004a)).

4. Determinar, mediante el cálculo estocástico fraccionario, una ecucación que rige para la distribución exacta de la distribución del máximo de un movimiento browniano fraccionario en un intervalo.

5. Determinar la distribución exacta del máximo de un proceso de Lévy, cuando la distribución de los saltos negativos es totalmente arbitraria, y el proceso tiene una cantidad finita de saltos positivos en cada intervalo finito del tiempo, cuya distribución tiene una transformada de Laplace que es una función racional. Este objetivo generaliza y complementa los resultados obtenidos en Mordecki (2002c).

6. Estudiar el comportamiento asintótico de la distribución del máximo M_T de un proceso de Lévy. Más precisamente respondiendo a la siguiente pregunta: Si $T = [0, \infty)$, determinar el valor de la constante C en la fórmula
$$\lim_{u\to\infty} e^{\omega u} P(M_T > u) = C,$$
obtenida por Bertoin y Doney (1994), donde $\omega > 0$ es la constante de Lundberg, expresada en términos de la función característica de la variable aleatoria X_1.

7. Para los procesos de Lévy, considerando ahora $\mathbf{T} = [0, T]$, un intervalo finito, establecer una velocidad de convergencia para la diferencia
$$P(M_T > u) - P(M_\infty > u),$$
cuando T tiende a infinito.

E Estrategia de investigación

Los métodos de trabajo son los habituales en la investigación matemática, es decir, el estudio, el intercambio con otros investigadores y la reflexión personal y colectiva. En consecuencia, se requiere destinar tiempo y recursos a viajes al exterior de los miembros del equipo humano así como invitar a investigadores distinguidos a realizar estadías en Uruguay para discutir sobre los temas a consideración.

Se debe destacar que cada uno de esos temas es objeto de trabajo intenso en diversos centro matemáticos de otros países y que la investigación de frontera requiere, por lo tanto, esa interacción personal, que no es posible reemplazar por otros medios a los que también habremos de recurrir como es normal (intercambio de publicaciones, diálogo electrónico, etc.).

F Actividades específicas

También son las habituales en la investigación matemática: el estudio personal, el diálogo y la reflexión conjunta. Se debe destacar que estas investigación se desarrolla, en nuestra Universidad, en el marco de los Seminarios permanentes de Probabilidad y Estadística Matemática, que tienen lugar en el Centro de Matemática, en el Laboratorio de Probabilidad y Estadística, y en el Instituto de Estadística de la Facultad de Ciencias Económicas. Ello permite la participación regular, el contacto y el estudio de jóvenes investigadores en formación. La relación con colegas del exterior tiene lugar a través de visitas mutuas, y de la participación en reuniones científicas.

G Materiales y métodos

La planta física para el desarrollo del proyecto es la del Centro de Matemática de la Facultad de Ciencias, que cuenta con lugares de trabajo adecuados. Los otros dos aspectos básicos son la Biblioteca y el equipamiento informático.

La Biblioteca de Matemática está localizada en los locales de las Facultades de Ciencias y de Ingeniería, siendo operada de manera conjunta tanto en lo referente a adquisiciones, conexiones con bases de datos, personal técnico, préstamo y otros servicios. Si bien actualmente cuenta con la mayoría de las revistas necesarias para el desarrollo de estas investigaciones, hay una carencia significativa en materia de libros y también de algunos títulos de revistas. En consecuencia, una parte significativa de los fondos del proyecto estará destinada a la adquisición de libros y revistas directamente relacionados con los temas de investigación.

Existe equipamiento informático, que incluye los equipos localizados en el Centro de Matemática de la Facultad de Ciencias y en el Instituto de Matemática y Estadística "Rafael Laguardia" de la Facultad de Ingeniería, pertenecientes al Laboratorio de Probabilidad y Estadística.A los efectos de la realización del proyecto, se requiere complementar los equipos y además adquirir software adecuado para el tratamiento de algunos problemas, como la simulación de procesos estocásticos de parámetro continuo, que es muy exigente en ese plano.

El detalle de las inversiones figura en el capítulo respectivo.

H Cronogramas de ejecución

En lo que refiere a la financiación solicitada al proyecto, se financiará la participación de estudiantes avanzados de grado, y de posgrado, mediante la contratación y dedicación compensada.

Las compras bibliográficas se realizarán en cuanto estén disponibles los fondos, por los mecanismos usuales de la Biblioteca de Matemática del Centro de Matemática.

En lo que respecta a los seminarios, se planifica organizar el "Seminario de Probabilidad y Estadística" en forma semestral, como una actividad coordinada de la Facultad de Ciencias (sede del proyecto), junto con las Facultades de Ingeniería y la de Ciencias Económicas y Administración.

Se planea además continuar con el "Seminario de Estudio en Probabilidad y Estadística" en la Facultad de Ciencias durante todos los 4 semestres del proyecto.

I Personal del proyecto

El personal del proyecto está integrado por los dos investigadores responsables, Jean Marc Azaïs (Toulouse, Francia), Alan Lewis (California, EUA), el Lic. en Estadística Federico de Olivera, el Lic. en Física Gonzalo Aniano, y el estudiante de matemática Federico Dalmao. Se proyecta contratar un docente grado 1 con 20 horas, mediante un llamado en la Facultad de Ciencias, y otorgar una dedicación compensada para realizar estudios de posgrado.

J Resultados esperados

Los problemas de interés, en los cuales se espera obtener resultados son los siguientes:

1. Cálculo efectivo de la distribución del máximo de un proceso estocástico a valores reales con espacio de parámetros general, es decir, en el caso (a). Son de particular interés las generalizaciones de resultados obtenidos al caso de

    - procesos con trayectorias no diferenciables,
    - procesos con índice d-dimensional.

2. Estudiar la regularidad de la función de distribución del máximo, también en el caso (a).

3. Dar cotas para los números de condición de problemas de optimización en que los datos no son gaussianos y aplicar estos resultados a la complejidad de algoritmos para resolver dichos problemas.

4. Obtener nuevas fórmulas explícitas en el caso (b) con hipótesis más generales sobre la distribución de los saltos positivos de los procesos de Lévy, como por ejemplo, del tipo fase (phase type distribution), o con saltos distribuidos de acuerdo a una distribución doble exponencial no centrada.

5. Obtener información sobre la distribución del máximo en un intervalo, y en toda la semirrecta positiva en caso de tendencia negativa, para el proceso Browniano fraccionario.

6. Respecto de los procesos de Lévy, se espera obtener fórmulas cerradas para procesos con medidas de saltos totalmente arbitrarias para los saltos negativos, y saltos positivos cuya distribución tiene transformada de Laplace racional, generalizando Mordecki (2002, 2003).

Además de ésto, cada uno de los capítulos de esta investigación está destinado a generar conocimiento original en áreas de activa investigación en la Teoría de Probabilidad y sus Aplicaciones. La convicción de los responsables académicos del proyecto es que la investigación matemática debe ser de frontera. En cada caso, la descripción del estado del arte y de los objetivos del trabajo a emprender, si bien es necesariamente sintética en esta presentación, pretende dar una visión acerca de que no sólo se trata de problemas y de resultados que implicarían aportes originales al conocimiento, sino que forman parte de la búsqueda presente de la comunidad de especialistas que en ellos trabajan en el mundo contemporáneo.

Se debe enfatizar, además, que los resultados matemáticos a que se refiere el proyecto, implicarían, en caso de alcanzarse, un impacto en aplicaciones de muy diversa naturaleza, en Matemática y en otras disciplinas. A título de ejemplos, en Estadí stica Asintótica, Mecánica Aleatoria, Telecomunicaciones, Finanzas, Teoría de Control y Complejidad de Algoritmos.

Además, debe considerarse al proyecto como una base complementaria para la formación de recursos humanos. No hay duda que la formación de un matemático se realiza de la mejor manera y en el mejor nivel, en el marco del propio trabajo de investigación. El equipo de trabajo, además de los responsables académicos, incluye dos matemáticos extranjeros, un estudiante de la maestría en Ingeniería Matemática (Federico de Olivera) y dos estudiantes de la licenciatura en matemática (Gonzalo Aniano y Federico Dalmao). Para los estudiantes, al igual que para los responsables académicos del proyecto, éste brinda una ocasión de formación de gran valor, a través del estudio y la investigación en temas relevantes, que parecen presentar una alta dificultad técnica.

En caso de que los resultados buscados puedan ser alcanzados en una razonable proporción, podrán ser motivo de cursos de postgrado o de partes de los mismos, contribuyendo de esa manera a la formación de otros jóvenes matemáticos, además de los miembros del equipo del proyecto. Es de señalar que algunos de los temas que figuran en nuestra agenda han sido motivo de cursos ya dictados con anterioridad en nuestro postgrado en Matemática por los miembros del equipo del proyecto.

El proyecto debe considerarse asimismo como factor fortalecedor de la institución en que el mismo se desarrolla. La institución de la que formamos parte tiene a la investigación científica como uno de sus objetivos centrales, dado que es la Universidad de la República. De modo que el desarrollo de la investigación de calidad, como la que aspiramos a realizar, la fortalece antes que nada, por la definición de lo que la institución es. Paralelamente, su impacto en la formación de recursos humanos, tanto de miembros del proyecto como de los estudiantes de posgrado que tendrán acceso a los resultados, es parte de la enseñanza avanzada incluida en los programas institucionales.

De aprobarse el proyecto, debe entenderse que se complementarán con programas de intercambio científico, que, al tiempo de influir positivamente en el equipo del proyecto, tendrán una importante influencia indirecta de nuestra comunidad matemática en general, en cuanto a su interacción con los colegas de otros países. Esto constituye un aspecto esencial de la vida científica, ya que nuestra disciplina no conoce fronteras y mantener un alto nivel de calidad está estrechamente relacionado con tener un ví nculo internacional activo.

En un terreno más práctico, la aprobación del proyecto permitiría a la institución a la que pertenecemos mejorar su equipamiento bibliográfico e informático, que tiene ciertas carencias actualmente, las cuales afectan al trabajo de investigación y, naturalmente, también a la enseñanza.

K Estrategias de difusión

Las estrategias de difusión son las tradicionales en matemática, e incluyen:

- Publicación de los resultados obtenidos en el espacio web del Centro de Matemática, en las Prepublicaciones Matemáticas del Uruguay (PreMat) y en la revista especializada nacional (Publicaciones Matemáticas del Uruguay)

- Publicación de los resultados obtenidos en revistas científicas especializadas, con referato, de circulación internacional.

- Dictado de conferencias en el país, en el Seminario de Probabilidad y Estadística, y en el extranjero.

Mario Wschebor tiene en preparación el libro "Extrema of random processes and crossing problems" en colaboración con J.M. Azas, sobre la distribución del máximo de los procesos gaussianos, en el cual se espera incluir resultados obtenidos con la realización de este proyecto.

L Impacto y/o beneficios de los resultados

Como suele ocurrir normalmente con los trabajos de investigación en Matemática, es difícil evaluar a priori el verdadero impacto y los verdaderos beneficios que pueden derivarse de cumplir con los objetivos del proyecto propuesto. Al mismo tiempo, dado que se trata de un trabajo de investigación, es muy posible que el itinerario real sea diferente al trazado al formular el proyecto y que, por lo tanto, el impacto y los beneficios difieran de los que podemos prever actualmente.

Desde nuestra óptica presente, en cada uno de los capítulos que hemos enumerado se debe esperar que:

- En lo relativo a las aplicaciones de los estudios sobre la distribución del máximo de los procesos aleatorios a otras disciplinas, que los resultados previstos mejoren sustancialmente la manera de resolver los problemas asociados en la Mecánica Aleatoria, en la Estadística Asintótica y sus aplicaciones a la Econometría y a otras disciplinas y en los cálculos de Complejidad de Algoritmos, tanto en el plano de la comprensión teórica como del cálculo computacional efectivo.

- Los mismos temas se pueden plantear de manera análoga en el caso multidimensional. Es clásico en la Teoría de Procesos Aleatorios que estos procesos presentan dificultades esencialmente distintas y mayores que los procesos a un parámetro, en virtud de que el espacio de parámetros carece de un orden total natural. Por lo tanto, un avance significativo como el propuesto en la comprensión de la distribución del máximo ataca problemas que están pendientes de resolución desde hace muchos años, tanto en la teoría como en las aplicaciones.

- Los estudios de complejidad de algoritmos cuando el problema a resolver se selecciona al azar en una familia son de gran interés y atracción actualmente en la interfase entre Matemática e Informática. Los resultados buscados serían de aprovechados en un amplio abanico de aplicaciones.

- Más allá de los aspectos estrictamente técnicos, el impacto del proyecto en nuestro ambiente académico también implicaría las siguientes consecuencias:

  - El proyecto contiene un fuerte énfasis en temas multidisciplinarios y de aplicaciones no triviales a otras disciplinas y ayudaría a intensificar el relacionamiento académico - tanto en la investigación como en la enseñanza - con otras áreas del conocimiento.

  - Permitiría incorporar jóvenes (estudiantes de postgrado, especialmente) a temas de frontera en la investigación matemática.

  - Ayudaría a mantener la interacción entre la comunidad matemática uruguaya y nuestros colegas de otros países, aspecto central de la calidad del trabajo científico en nuestra disciplina.

M Referencias bibliográficas

Las referencias bilbiográficas de los responsables del proyecto pueden verse en los antecedentes del equipo de investigación (pág. B.1).

Adler, R.J. (1990). *An Introduction to Continuity, Extrema and Related Topics for General Gaussian Processes*, IMS, Hayward, Ca.

Adler, R.J. (2001) On excursion sets, tube formulae, and maxima of random fields. *Annals of Applied Probability.*

Asmussen, S., Avram, F., Pistorius, M. (2004). Russian and American. put options under exponential phase-type Le'vy motion, Stoch. Proc. Appl. 109, 79-111.

Baxter, G.; Donsker, M.D. On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments. Trans. Am. Math. Soc. 85, 73-87 (1957)

Belyaev, Yu. (1966). On the number of intersections of a level by a Gaussian Stochastic process. *Theory Prob. Appl.*, 11, 106-113.

Berman, S.M. (1985a). An asymptotic formula for the distribution of the maximum of a Gaussian process with stationary increments. *J. Appl. Prob.*, 22,454-460.

Berman, S.M. (1985b). The maximum of a Gaussian process with nonconstant variance. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 21, 383-391.

Berman, S.M. (1992). *Sojourns and extremes of stochastic processes*, The Wadworth and Brooks, Probability Series.

Berman, S.M. ; Kôno, N. (1989). The maximum of a gaussian process with non-constant variance: a sharp bound for the distribution of the tail. *Ann. Probab.*, 17, 632-650.

Bertoin J., (1996) *Lévy Processes.* Cambridge University Press, Cambridge.

Bertoin J. and Doney R.A., (1994) *Cramér's estimate for Lévy processes.* Statistics & Probability Letters, **21**, 363–365.

Black, R. Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637–659.

Borell, C. (1975). The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. *Invent. Math.*, 30, 207-216.

Cramér, H. ; Leadbetter, M.R. (1967). *Stationary and Related Stochastic Processes*, J. Wiley & Sons, New-York.

Cressie, N (1980). The asymptotic distribution of the scan statistic under uniformity. *Ann. Probab*, 8, 828-840.

Cuzick, J. (1975). Conditions for finite moments of the number of zero crossings for Gaussian processes.*Ann. Probab*, 3, 849-858.

Dacunha-Castelle, D.; Florens-Zmirou, D. (1986) Estimation of the coefficient of a diffusion from discrete observations. *Stochastics*, **19**, 263-284.

Darling, D. A.(1983). On the supremum of certain Gaussian processes. *Ann. Probab.* 11, 803-806.

Davis, J. D. (1975). *Interpolation and approximation.* Dover, New York.

DeLong, D. M. (1981). Crossing probabilities for a square root boundary by a Bessel Process. *Communication in Statistics-Theory and methods.* A10, 2197-2213.

Diebolt, J. ; Posse, C. (1996). On the Density of the Maximum of Smooth Gaussian Processes.*Ann. Probab.*, 24, 1104-1129.

Doney, R.A. On Wiener-Hopf factorisation and the distribution of extrema for certain stable processes. *Ann. Probab.* 15, 1352-1362 (1987)

Fernique, X.(1974). Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes.*Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour. Lecture Notes in Mathematics*, 480, Springer-Verlag,New-York.

Florens-Zmirou, D. (1993) On estimating the diffusion coefficient from discrete observations. *J. Appl. Prob.* **30**, 790-804.

Génon-Catalot, V.; Jacod, J. (1993) On the estimation of the diffusion coefficient for multidimensional diffusion processes. *Ann. Instit. Henri Poincaré, Probab. Statist.* **29**, 119-151.

Génon-Catalot, V; Jeantheau,T. : Laredo, C. (1998) Limit theorems for discretely observed stochastic volatility models. *Bernoulli,* Vol 4. Nr. 3, 283-304.

Goldman, M. (1971). On the first passage of the integrated Wiener process.*The Annals Math. Statist.*, 42, 6, 2150-2155.

Jacod, J. (1998) Rates of convergence to the local time of a diffusion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **34**, no. 4, 505-544.

Jacod, J.(2000) Non-parametric kernel estimation of the diffusion coefficient of a diffusion. *Scand. J. Statist.* **27**, no.1, 83-96.

Jacod, J. and Shiryaev, A.N., (1987) *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer, Berlin, Heidelberg.

Kloeden, P. E.; Platen, E. (1992) *Numerical solution of stochastic differential equations* Applications of Mathematics 23, Springer–Verlag.

Lachal, A. (1991). Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement Brownien. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 27, 385-405.

Landau, H.J. ; Shepp, L.A (1970). On the supremum of a Gaussian process. *Sankya Ser. A* 32, 369-378.

Leadbetter, M.R.; Lindgren, G.; Rootzén, H. (1983). *Extremes and related properties of random sequences and processes.* Springer-Verlag, New-York.

Ledoux, M. (1996). Isoperimetry and Gaussian Analysis. *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1994.* Lecture Notes in Math. 1648, 165-264. Springer-Verlag. New York.

Ledoux, M. (2001). The Concentration of Measure Phenomenon. Libro a publicarse.

Ledoux, M.;Talagrand, M. (1991). *Probability in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New-York.

Lifshits, M.A.(1995). *Gaussian random functions* . Kluwer, The Netherlands.

Lindgren, G. (1972). Wave-length and Amplitude in Gaussian Noise . *Adv. Appl. Prob.*, 4, 81-108.

Longuett-Higgins, M.S.(1962). The statistical geometry of random surfaces. *Hydraulic Instability Symp. in Appl. Math.*, Vol 13, 105-143.

McKean, H.P. (1963). A winding problem for a resonant driven by a white noise. *J. Math. Kyoto Univ.*, 2, 227-235.

Marcus, M.B. (1977). Level Crossings of a Stochastic Process with Absolutely Continuous Sample Paths, *Ann. Probab.*, 5, 52-71.

Marcus, M.B.; Shepp, L.A. (1972). Sample behaviour of Gaussian processes. *Proc. Sith Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, 2, 423-442.

Milstein, G. N. (1995) *Numerical integration of stochastic differential equations*, Mathematics and its Applications, 313, Kluwer Academic Publishers Dordrrecht.

Miroshin, R. N. (1974). Rice series in the theory of random functions. *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, 1, 143-155.

Miroshin, R. N. (1977). Condition for finiteness of moments of the number of zeros of stationary Gaussian processes. *Th. Prob. Appl.*, 22 , 615-624.

Miroshin, R. N. (1983). The use of Rice series. *Th. Prob. Appl.* 28, 714-726.

Piterbarg, V; I. (1981). Comparison of distribution functions of maxima of Gaussian processes. *Th, Proba. Appl.*, 26, 687-705.

Piterbarg, V; I. (1996). *Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields.* American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

Qualls, C; Watanabe, H. (1973). Asymptotic properties of Gaussian process. *Ann. Math. Statistics*, 43, 580-596

Rice, S.O. (1944-1945). Mathematical Analysis of Random Noise.*Bell System Tech. J.*, 23, 282-332; 24, 45-156.

Sato, Ken-iti, (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 68. Cambridge University Press, Cambridge.

Shepp, L. A. (1971). First passage time for a particular Gaussian process. *The Ann. of Math. Stat.*, 42, 946-951.

Shepp, L. A. (1979). The joint density of the maximum and its location for a Wiener process with drift. *J. Appl. Prob.* 16, 423-427.

Shepp, L. A.; Slepian, D.(1976). First-passage time for a particular stationary periodic Gaussian process. *J. Appl. Prob.*, 13, 27-38.

Shiryaev, A.N. (1978). *Optimal Stopping Rules.* Springer, New York Heidelberg.

Slepian, D. (1961). First passage time for a particular Gaussian process.*Ann. Math. Statist.*, 32, 610-612.

Slepian, D. (1962). The one-sided barrier problem for Gaussian noise.*Bell System Tech. J.* 42, 463-501.

Szepessy, A., Tempone, R. Zouraris, G.E. (2001) Adaptive Weak Approximation of Stochastic Differential Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol LIV, 0001-0046.

Sun, J. (1993). Tail Probabilities of the Maxima of Gaussian Random Fields, *Ann. Probab.*, 21, 34-71.

Talagrand, M. (1988). Small tails for the supremum of a Gaussian process. *Ann. Inst. H. Poincaré, Sér. B*, 24, 2, 307-315.

Talagrand, M. (1996). Majorising measures: the general chaining. *Ann. Probab.* 24, 1049-1103.

Tsirelson, V.S. (1975). The Density of the Maximum of a Gaussian Process. *Th. Probab. Appl.*, 20, 817-856.

Weber, M. (1985). Sur la densité du maximum d'un processus gaussien. *J. Math. Kyoto Univ.*, 25, 515-521.

Ylvisaker, D. (1968). A Note on the Absence of Tangencies in Gaussian Sample Paths.*The Ann. of Math. Stat.*, 39, 261-262.

N Referentes académicos

Consideramos referentes académicos en el tema del proyecto a los profesores

Didier Dacunha Castelle

Jean Bertoin