Seminario de Problemas de Probabilidad

"Charles Sanders Pierce[1], de alguna forma dijo, que en ninguna otra área de la matemática un especialista se equivoca tan fácilmente, como en la teoría de la probabilidad. La historia confirma la veracidad de esta observación. Así Leibniz consideraba que el número 12 como resultado de tirar dos dados aparecía tan frecuentemente como el 11. El gran matemático francés del siglo XVIII D'Alambert, opinaba que el resultado de tirar una moneda tres veces consecutivas se diferenciaba del resultado de tirar tres monedas al mismo tiempo, y estaba convencido, de que luego de una larga serie de "caras" la probabilidad de aparición de un "número" aumentaba (siendo esta creencia popular hasta el día de hoy en muchos amantes de los juegos de azar).
En nuestra época la teoría de la probabilidad da a estas preguntas bien sencillas una respuesta clara y precisa, bajo el cumplimiento de una condición indispensable: en las condiciones del problema debe especificarse sin ambigüedad de que forma corresponde llevar a cabo el experimento"[2]

1. Introducción

La siguiente lista de problemas fué recopilada[3] a partir de diversos libros, repartidos de prácticos y éxamenes de la Facultad de Ciencias, sumado a algunas contribuciones de colegas (ver los detalles históricos, bibliográficos, algunas sugerencias y algunas soluciones en la sección 12).

Si bien es de esperar que algunos de los problemas sean conocidos por algunos de los participantes del seminario, se optó por no excluir aquellos problemas clásicos, que han contribuído al desarrollo de la teoría de la probabilidad. Los problemas están ordenados temáticamente y dentro de cada tema, por grado de dificultad aparente, señalados con asterisco aquellos que puedan ser especialmente difíciles, o requerir indispensablemente algún conocimiento previo.

No es la idea que los participantes encaren todos los problemas. Apenas que trabajen sobre algunos, eso sí, hasta el final.

2. Casos favorables sobre casos posibles

1. Al tirar un dado equilibrado, con iguales chances se obtienen 1,2,3,4,5 ó 6 puntos. En caso de tirar dos dados la suma de los puntos obtenidos esta comprendida entre 2 y 12. Tanto el 9 como el 10, a partir de los números 1,2,3,4,5,6 se puede obtener de dos formas distintas: 9=3+6=4+5, y 10=4+6=5+5. En el problema con tres dados tanto el 9 como el 10 se obtienen de seis formas. ¿Porque entonces el 9 se obtiene con mayor frecuencia al tirar dos dados, y el 10 con mayor frecuencia al tirar tres?

2.[Paradoja del Caballero de Méré.] Demostrar que es mas probable obtener al menos un as al tirar cuatro dados, que obtener al menos dos ases a la vez al tirar 24 veces un par de dados.

[1] Lógico y Filósofo norteamericano (1839 - 1914).
[2] Tomado de [2].
[3] por Ernesto Mordecki

3.[La división de la apuesta] Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego y cada gol vale 10 puntos. Las apuestas son de 10 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 20. Se quiere saber que participación del dinero corresponde a cada bando.

4. José tiene sus medias sueltas, rojas y negras, en un mismo cajón. Desea que la probabilidad de extraer al azar dos medias rojas sea exactamente un medio.

(a) Calcular el número mínimo de medias rojas y negras que debe tener el cajón.

(b) Calcular el número mínimo de medias rojas y negras que debe tener el cajón, si la cantidad de medias negras es par.

5. María percibe, viajando en el transporte colectivo, que es más probable obtener un boleto que sume 21 que obtener uno capicúa. ¿Está en lo cierto? ¿Puedes calcular ambas probabilidades?

6. Calcular la suma más probable de las cifras de un boleto de ómnibus.

7.[Cumpleaños] (a) Calcular la cantidad de personas (elejidas al azar) necesaria para que la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día sea aproximadamente igual a $1/2$.

8.[Las cajas de fósforos] Un matemático lleva consigo dos cajas con n fósforos cada una. Cada vez que necesita un fósforo, elige al azar entre una de las dos cajas. Calcular la probabilidad de que al vaciarse la primera caja, en la otra queden r fósforos.

9.[Reordenaciones] (a) Calcular la probabilidad de que al reordenar n símbolos diferentes ninguno regrese a la posición que ocupaba inicialmente.

(b) Con cartas numeradas del 1 al 12 se juega un solitario, en el que luego de mezclarlas se las muestra de a una, esperando que algún número de carta coincida con el orden en que aparece ésta. ¿Apostaría a la coincidencia?

(c) Calcular el límite de la probabilidad de coincidencia en (a) si n tiende a infinito.

10. Construir dos dados, en cuyas caras aparezcan una cantidad entera positiva de puntos, distintos de los estándar, de forma que la probabilidad de la suma de los resultados sea igual a la usual. Discutir la unicidad de dicha construcción.

3. Probabilidades Geométricas

"Aún en el mismo inicio de la teoría de la probabilidad se observo la insuficiencia de la definición de "clásica" de probabilidad para una cantidad finita de resultados. Ya entonces algunos casos particulares condujeron a la modificación de esta definición, y a la construcción del concepto de probabilidad, también en casos cuando era concebible una cantidad infinita de resultados. En este enfoque, como antes, jugaba un rol central la idea de "equiprobabilidad".

Por ejemplo, si tenemos en un plano un dominio G en el cual hay contenido otro dominio g, al decir "en el dominio G se elige un punto al azar", preguntando cual es la probabilidad de que pertenezca a g, la definición de probabilidad geométrica es que, esa probabilidad es el cociente entre las áreas de g y G"[4].

11. [Paradoja de Bertrand.] Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro O y radio 1. Determinar la probabilidad de que una cuerda AB de esta circunferencia elegida "al azar"sea mayor

[4]Tomado de [3].

que el lado del triángulo equilátero inscripto en los siguientes casos:

(a) Fijamos un punto I en $\mathcal{C}$ elegimos un punto M del segmento OI con distribución uniforme, y le asociamos la cuerda AB perpendicular a OI que pasa por M.

(b) Fijamos A en $\mathcal{C}$ y elegimos B con distribución uniforme en $\mathcal{C}$.

(c) Elejimos un punto M en forma uniforme en el círculo, y consideramos la cuerda AB perpendicular a OM por el punto M.

12.[Problema de la aguja de Buffon.] Se arroja al azar una aguja de longitud $2b$ sobre un plano en el que se han trazado líneas paralelas que distan $2a$ (con $a > b$). Calcular la probabilidad de que la aguja corte a alguna línea.

13. Calcular la probabilidad de que al elegir dos puntos al azar en un segmento, con los tres segmentos resultantes se pueda formar un triángulo.

14. Se eligen dos parejas de puntos al azar en una circunferencia. Calcular la probabilidad de que las cuerdas que determinan ambas parejas se corten.

15. Calcular la probabilidad de que tres puntos elegidos al azar en una circunferencia conformen un triángulo obtusángulo.

16. Un matemático desayuna café con roscas. Al poner un terron de azucar en su café, imagina un plano, elegido al azar, que pasa por el centro del terrón, que tiene forma cúbica. ¿Cuantos lados tiene el polígono obtenido como sección del plano imaginado cortando el cubo? ¿Que probabilidad tiene cada cantidad de lados?

No contento con esto, al morder la rosca, que tiene forma toroidal, imagina un plano que pasa por el centro de la rosca, y observa que la interseccion tiene dos posibles formas distintas. ¿Como son las intersecciones obtenidas? ¿Que probabilidad tiene cada una?

17. El matemático griego Apolonio (c. 262 - 190 a.n.e.) conocido como "el Gran Geómetra" (ver [8]) luego de concluir la escritura de su famosa obra "Secciones cónicas" (que contiene ocho libros con 487 proposiciones) planteó la siguiente pregunta: ¿cual es la probabilidad de que, eligiendo un plano al azar, la intersección del plano con el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ sea una elipse, una parábola, o una hipérbola?

18.[Integrales múltiples] Se eligen n puntos al azar en el intervalo $[0, 1]$, dibujandose una escalera que salta $1/n$ en cada uno de los puntos elejidos. Calcular la probabilidad de que la escalera dibujada no corte la recta $y = x$.

19.[Integrales múltiples II] (a) Calcular la probabilidad de que un punto de $\mathbb{R}^n$ elegido al azar en el hipercubo $[-1/2, 1/2]^n$ verifique $\|x\|_2 \geq 1$.

(b) Calcular el límite de esta probabilidad si n tiende a infinito.

4. Probabilidades finitas

La importancia de la axiomática de Kolmogorov [9] reside en que permite asignar distintas probabilidades P en un mismo espacio de probabilidad Ω, dando reglas claras (tomadas de la teoría de la medida) para determinar cuando una asignación de probabilidades es correcta, es decir, propone un sistema axiomático para definir probabilidades, que, en particular, contiene como casos particulares a la definición clásica, y a la probabilidad geométrica.

20. Supongamos un dado cargado de manera tal que las probabilidades de de sacar $1, 2, \dots, 6$ sean, respectivamente, $p_1, p_2, \dots, p_6$. Otro dado, también cargado, tiene las probabilidades $p'_1, p'_2, \dots, p'_6$ de sacar $1, 2, \dots, 6$.

(a) Hallar la probabilidad de que al lanzar los dos dados a la vez la suma de los números resultantes sea igual a 7.

(b) Hallar la probabilidad de que al lanzar a la vez un dado correcto y otro cargado la suma de los números resultantes sea igual a 7.

5. Esperanzas matemáticas

El surgimiento de la noción de esperanza (*expectatio* en latín) fue introducido en el primer texto impreso sobre las probabilidades, llamado "Calculando en juegos de azar" escrito por Christian Huygens en 1657.

Huyguens necesita saber el valor de cualquier juego en particular. Esto es, si se nos invita a jugar con un esquema dado de premios que dependen de los diversos resultados, exigimos un precio justo para aceptar la apuesta. Nuestra respuesta estándar es que una apuesta vale la esperanza matemática de esa apuesta. Siglos de hábitos hacen que esta respuesta nos parezca evidente, pero no era la respuesta establecida en la época en la que Huyguens escribía[5].

21.[El colector de cupones] Como promoción, en cada paquete de cereales viene como regalo un personaje de la película "Los increíbles". Una persona compra de a un paquete, hasta completar la familia, de r integrantes. Sea N el número de paquetes que compró. Calcular $\mathbf{E}\,N$ y $\mathbf{P}(N \leq n)$.

22. (a) Si dos personas cumplen años un mismo día, decimos que son un *par similar*. Sea W el número de tales pares en n personas. Si d es la cantidad de días del año, demostrar

$$\mathbf{E}\,W = \frac{1}{d} C_2^n.$$

(b) Análogamente, una *terna similar* es un conjunto de tres personas que cumple años el mismo día. Si W es ahora el número de tales ternas en n personas, demostrar

$$\mathbf{E}\,W = \frac{1}{d^2} C_3^n.$$

(c) ¿Existe una fórmula general?

23.(*)[Un juego de piratas] El pirata inglés Sir Francis Drake atrapó a un prisionero en la Isla de Lobos. Sin saber que hacer con él, escribió las letras L I V E K en un dado (dejando una cara libre). Se tiraría el dado hasta que aparezca una de las palabras LIVE o KILL, decidiendo así la suerte del prisionero. Los piratas, quienes gustaban de las apuestas, estaban entusiasmado con la idea. Al consultar al prisionero sobre su último deseo, este pidió cambiar la palabra KILL por DEAD. Al acceder, Drake escribió en un dado las letras L I V E A D (ahora, utilizando las 6 caras).

Demostrar que de esta forma el prisionero aumentó su probabilidad de vivir de $124/249 \sim 0,4980$ a $217/433 \sim 0,5012$, aumentando también el tiempo medio hasta tomar la decisión de $78{,}125/249 \sim 313,8$ tiradas a $281{,}232/433 \sim 649,5$.

24. Se tiene una fila de personas que sortean honestamente números al azar entre 0 y 1. Juan sortea el primero. Demostrar que si N es la cantidad de personas que deben sortear su número hasta encontrar una que le vaya peor que a Juan, entonces, la cantidad media de personas necesarias es infinita ($\mathbf{E}\,N = +\infty$).

[5] Extractado de [4].

25. [La paradoja de San Petersburgo] El juego de Petersburgo consite en tirar una moneda equilibrada hasta que salga cara; se esto ocurre en la n-ésima tirada el apostante recibe 2^n pesos de la banca. Es decir, la ganancia se duplica en cada tirada. La pregunta es la siguiente: ¿cuanto debe pagar el apostador para jugar a este juego?

6. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son el modelo probabilístico mas sencillo que muestra dependencia de sucesos. Fueron introducidas por A. Markov para modelar las probabilidades de transición entre las letras en un texto, y aplicadas en la poesía "Eugenio Onegin" del escritor ruso Alexander Pushkin.

26. Una partícula que fluctúa por los puntos enteros de la recta real, en un cierto momento (momento de salto) se traslada una unidad a la izquierda con probabilidad 1/2, o una unidad a la derecha con probabilidad 1/2 (independientemente de la dirección de los movimientos anteriores). Este esquema se denomina *paseo al azar simple*. Calcular la probabilidad de que, luego de $2n$ saltos, la partícula se encuentre en el punto desde el cual comenzó a trasladarse.

27.[Principio de reflexión] Una particula recorre los enteros, partiendo del origen, con pasos unitarios independientes, con probabilidad 1/2 de saltar a la derecha (aumentar en 1 su posición) y probabilidad 1/2 de saltar a la izquierda (disminuir en 1 su posición). ¿Cual es la probabilidad de que no llegue al punto de abcisa N en T pasos?

28.(*) Un rey pasea al azar en un tablero de ajedrez. Calcular la probabilidad asintótica de que se encuentre en cada casilla.

29.(*)[Teorema de Polya] Una particula recorre la grilla de n-úplas de numeros enteros, en pasos independientes, eligiendo con igual probabilidad visitar en cada paso alguno de los $2n$ puntos vecinos. Averiguar para que dimensiones n la particula retorna al origen con probabilidad uno.

7. Números primos

30. Designemos mediante $p_1, p_2, \dots$ a los números primos. Sean $N_1, N_2, \dots$ variables aleatorias que verifican $\mathbf{P}(N_i = k) = (1-\gamma_i)\gamma_i^k$ $(k \geq 0)$, donde $\gamma_i = p_i^{-\beta}$ para algún $\beta > 1$. Demostrar que

$$M = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{N_i}$$

es un natural positivo aleatorio, con distribución $P(M = m) = Cm^{-\beta}$ donde la constante

$$C = \Big[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\beta}\Big]^{-1}.$$

Nota: Aquí aparece

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\beta} = \Big[\prod_{i=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{p_i^\beta}\Big)\Big]^{-1} = \big[\zeta(\beta)\big]^{-1},$$

donde ζ es la llamada función de Riemann.

31.(**) (a) La probabilidad P de que k números enteros positivos sean primos entre sí la definimos como el límite para N tendiendo a infinito de la probabilidad P_N de que sean primos entre sí k números elegidos al azar entre los números de 1 a N. Demostrar que

$$P = \frac{1}{\zeta(k)}.$$

(b) Definiendo la probabilidad P de que una fracción p/q sea irreducible del mismo modo que antes, concluir que

$$P = \frac{6}{\pi^2}.$$

8. Estadística

La estadística y la probabilidad son disciplinas fuertemente relacionadas, que se pueden estudiar en un mismo marco teórico. La diferencia consiste en que, mientras que en la probabilidad se supone conocida una determinada ley de probabilidad, y se pretende calcular la probabilidad de un suceso potencial; en estadística se parte de información sobre la ocurrencia de determinado suceso, y se pretende inferir cuál es la ley de probabilidades que lo originó, en general, suponiendo que pertenece a una familia determinada de leyes de probabilidad.

32. [Problema de los autos] En una ciudad hay N autos, con chapas numeradas de 1 a N.

(a) Si observa una chapa con el número 60, ¿que estimación haría de la cantidad de autos?

(b)¿ Que estimación haría de la cantidad de autos, si observara 5 autos, siendo la chapa más grande la número 60?

9. Monte Carlo

El *método de Monte Carlo* consiste en la simulación de números aleatorios para calcular probabilidades, esperanzas matemáticas, o cantidades relacionadas. Basado en los teoremas límites en probabilidad (como por ejemplo que el promedio converge al valor esperado) se toma como una aproximación de un valor esperado, un promedio de números aleatorios independientes, generados en una computadora, cuyo valor esperado es el que se quiere calcular.

33. (a) Calcular la probabilidad de que un punto elegido al azar en un cuadrado caiga en el interior del círculo inscripto.

(b) Diseñar, basado en la parte anterior, un algoritmo para estimar el valor de π, y escribir un programa de computadora que lo lleve a cabo.

(c)¿Cuantos pasos precisa para obtener una presición en la segunda cifra (3,14...)?

34.(*)[El caballo de Euler] Es posible recorrer todo el tablero de ajedrez a paso de caballo, visitando una sola vez cada casilla? (Respuesta: si). En caso de ser posible, cuantas formas hay de hacerlo? (Respuesta: No se sabe). Diversos matemáticos prestaron atención a este problema, entre ellos L. Euler. Es interesante una regla (debido a Warnsdorff): Se debe ir a la casilla desde la cual se alcancen menos casillas en el siguiente paso. En caso de empate, se elije al azar. Esta regla, propuesta hace mas de 150 años se consideraba infalible. Las computadoras mostraron que la segunda parte de la regla a veces falla.

- Calcular, mediante simulación en computadora, la probabilidad de que un paseo al azar a paso de caballo, comenzando de a1, complete el circuito.
- ¿Se puede utilizar la regla de Warnsdorff para hacer mas eficiente la simulación?

10. Miscelánea

35. ¿Es posible cargar dos dados de forma que las probabilidades de aparición de las sumas de 2 a 12 sean equiprobables?

36. La probabilidad de que Romeo le escriba una carta a Julieta es 0,8. La probabilidad de que el correo no la pierda es de 0,9. La probabilidad de que el cartero la entregue es también de 0,9. Calcular la probabilidad condicional de que Romeo no haya escrito una carta, dado que Julieta no la recibió.

37.(*)[Parada Óptima] Una princesa debe elegir su marido, eligiendo uno entre N pretendientes que se le presentan en forma secuencial, no pudiendo elegir aquellos que ha rechazado. Suponiendo que las virtudes de estos pretendientes se pueden ordenar cuantitativamente, y que son independientes de las de los demás, y con la misma distribución, establecer la estrategia que maximiza la probabilidad de elegir el mejor.

38. Se arroja en forma sucesiva una moneda y se registran los resultados por medio de los números $x_1, x_2, \dots$ respectivamente, escribiendo $x_n = 1$ al obtener cara, $x_n = 0$ al obtener número, en el n-ésimo tiro. Escribimos luego en número real en sistema binario

$$x = 0, x_1 x_2 \dots$$

que, en sistema decimal, es $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n}$. Calcular las siguientes probabilidades: (a) $x \leq 1/2$, (b) $x = 0$, (c) $x = x_0$ (un real dado), (d) $x \in [(j-1)/2^n, j/2^n]$ con $j = 1, \dots, 2^n$, (e) $x \in I$, donde I es un intervalo de extremos diádicos de $[0,1]$, (f) $x \in [a,b]$, con a, b reales en $[0,1]$.

39. Dado un conjunto finito $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, con probabilidades asignadas $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, definimos la *entropía* asociada al par (Ω, P), que designamos mediante $H(P)$, por la fórmula

$$H(P) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k,$$

donde convenimos que $0 \log 0 = 0$.

(a) Demostrar que $0 \leq H(P) < \infty$, y hallar P tal que $H(P) = 0$.

(b) Sea P_0 la probabilidad uniforme, es decir, tal que $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. Calcular $H(P_0)$ y demostrar que $H(P) \leq H(P_0)$ para toda P.

40. Supongamos que Ω es un conjunto de n letras de un cierto alfabeto, que p_k es la frecuencia de aparición de la letra k-ésima (que suponemos constante), siendo P el vector de probabilidades correspondiente.

(a) Calcular la cantidad de mensajes de largo N que respetan las frecuencias anteriores, es decir, donde aparece $N_k = p_k N$ veces la letra k, para cada $k = 1, \dots, n$.

(b) Sea $I(N)$ el largo mínimo necesario para codificar con dos valores (traducir a un "lenguaje"de letras) todos los mensajes calculados en (a). Demostrar mediante la fórmula de Stirling que $\frac{\log 2}{n} I(N) \sim H(P)$.

(c) Discuta cuando un lenguaje es “más informativo”.

11. Los cinco problemas de Huygens

41. A y B juegan uno contra el otro, con dos dados, bajo la condicion de que A gana si obtiene 6 puntos, y B gana si obtiene 7 puntos. Le corresponde el primer tiro a A, los dos siguientes a B, los otros dos siguientes a A, y así sucesivamente, hasta que gane alguno de los dos jugadores. La pregunta es: ¿Cuál es la chance de A sobre B?

42. Tres jugadores A, B y C, teniendo 12 fichas de las cuales cuatro son blancas y ocho negras, juegan con la condición, de que gana el primer jugador que obtiene (al extraer sin mirar) una ficha blanca, y A extrae primero, luego B, luego C, luego A nuevamente, y asi sucesivamente. La pregunta es: ¿Cuál es la proporción de las chances de ganar de cada jugador con respecto de los otros?

43. A apuesta a B que de un mazo de 40 cartas, entre las cuales hay 10 de cada color, extraerá 4, de forma de obtener una de cada color. Calcular las chances de A sobre las de B.

44. Como antes, los jugadores tienen 12 fichas de las cuales cuatro son blancas y ocho negras; A apuesta a B que escogiendo siete fichas sin mirar, obtendrá tres blancas. La pregunta es ¿Cuál es la chance de A sobre B?

45. Teniendo A y B cada uno doce fichas, juegan con tres dados, bajo la condición de que si se obtienen 11 puntos, A entrega una ficha a B, si se obtienen 14 B entrega una a A, ganando el jugador que obtiene primero todas las fichas.

12. Comentarios y referencias bibliográficas

El problema 1 es la primer paradoja del libro de [14]. El problema 2 es la segunda paradoja del mismo libro. Se entiende que el Caballero de Méré, aficionado al juego, planteó este entre otros problemas a Pascal y Fermat El problema 3, que presentamos en la versión dada por Luca Pacioli (en 1494!) (cap 6. de [4]) fue uno de los problemas elementales más difíciles de resolver. Los problemas 4,7 son tomados de [11]. El problema 8 fue formulado por Stephan Banach, matemático polaco (1892 - 1945). El problema 9 es clásico. Su solución se debe a Euler, si bien se registra alguna solución anterior, y es conocido también como el problema de la secretaria, que intenta poner cartas dirigidas a n personas en igual cantidad de sobres, cada uno tiene la dirección impresa. El problema 10 esta tomado de [2], apareciendo también en [6].

El problema 11, la paradoja de Bertrand, es quizá uno de los problemas más populares de probabilidad, donde se hace necesario una método para asignar probabilidades. Basados en la existencia de tales paradojas, notables matemátidos de principios del siglo XX descartaban a la probabilidad como parte de la matemática, por considerar imposible formalizar una teoría con tales contradicciones. No es casualidad que David Hilbert propone entre sus problemas famosos problemas, como parte del problema 6 la axiomatización de la probabilidad. Lo que era dificil de concebir en aquel entonces, es que a un mismo espacio de probabilidad se le pueden asignar distintas probabilidades. La respuesta al problema la dio Andrei N. Kolmogorov en su monografía de 1933 (Publicada en alemán y traducida al inglés en [9]). El problema 12 de la aguja de Buffon, formulado en 1777, es también muy conocido. Interesante es el hecho, que Buffon utilizó su resultado para calcular experimentalmente el número π. Los problemas 14 y 15 son parte del Examen de Agosto de 2004 de Introducción a la probabilidad y Estadística. El problema 16 está adaptado de [2] en donde se plantea el problema geométrico de visualizar las intersecciones que aparecen.

El problema 20 está tomado de [13]. Los problemas 21, 22, 23 y 24 están tomados de [1], en donde pueden hallarse sugerencias para las soluciones. En el problema 25, la paradoja de San

Petersburgo, cuesta ver donde está la contradicción. El tema debe mirarse en la óptica de la sección 5, y la contradicción aparece cuando, para un juego tan "razonable", no existe un valor finito. El origen se debe a los primos Bernoulli (Daniel y Nicolaus), apareciendo el trabajo en de Daniel, a principios de 1700 en un publicación de la Academia de San Petersburgo.

Los dos primeros problemas de Cadenas de Markov pueden resolverse con métodos combinatorios. Para los siguientes se requieren resultados de la teoría de las cadenas de Markov (que pueden verse por ejemplo en [12].

El problema 31 está tomado de [15], donde se encontrará una sugerencia.

El problema 32 está tomado de [11], donde se propone, para la parte (a) que $N = 119$. Mediante otro método de estimación (denominado máxima verosimilitud) se obtiene $N = 60$.

En el problema 34, la cantidad de circuitos que puede recorrer un caballo en un tablero (los "casos favorables") es desconocida. En [10] se dan acotaciones de la cantidad. El problema 35 está tomado de [6]. El problema 36 está tomado de [7].

Los problemas de Huyguens están tomados de [5]. El primer problema (el 41) fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656, y resuelto por Huygens en carta a Carcavi el 6 de julio de 1656. (Respuesta: 10,355 sobre 12,276.) El segundo (el 42) fue resuelto por Huygens en 1665 (Respuesta: 9:6:4). El tercero (el 43, las chances son de 1000 contra 8139) fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656; la respuesta sin prueba está en la carta a Carcavi del 6 de julio de 1656. El cuarto (el 43) fue resuelto por Huygens en 1665, quien también considera el caso en que se apuesta a escoger tres o mas fichas blancas. En el quinto se encuentra que las chances de A sobre las de B son de 244.140.625 a 282.429.536.481 Este es el problema planteado por Pascal a Fermat y a través de Carcavi a Huygens en una carta del 28 de setiembre de 1656 que contiene las soluciones dadas por Pascal y Fermat. La solución de Huygens está en la carta a Carcavi del 12 de octrubre de 1656, y la demostración en una nota de 1676. Este problema se conoce como el problema de la ruina del jugador.

Referencias

[1] Gunnar Blom, Lars Holst, and Dennis Sandell. *Problems and Snapshots from the World of Probability*. Springer, New York, 1994.

[2] Martin Gardner. *Mathematical Puzzles and Diversions*. Bell and Sons, London, 1980.

[3] Boris Vladimirovich Gnedenko. *The Theory of Probability*. AMS Chelsea Publishing, 2005.

[4] Ian Hacking. *El surgimiento de la probabilidad*. Gedisa, Madrid, 1995.

[5] Anders Hald. *A history of probability and statistics and their applications before 1750*. Wiley, New York, 1990.

[6] Paul Halmos. *Problems for Mathematicians, Young and Old*. MAA, 1991.

[7] Barry R. James. *Probabilidade: um curso em nivel intermediário*. IMPA, 2002.

[8] Morris Kline. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días I*. Alianza Universidad, Madrid, 1994.

[9] Andrei Kolmogorov. *Foundations of the theory of probability*. Chelsea Publishing Company, New York, 1956.

[10] Ernesto Mordecki. On the number of knight tours. Technical report, Universidad de la República, 2001. Pre-Mat 57.

[11] Frederick Mosteller. *Fifty Challenging Problems in Probability*. Addison - Wesley, Reading, MA, 1965. Reprinted, Dover, New York, 1987.

[12] Valentin Petrov and Ernesto Mordecki. *Teoría de Probabilidades*. Editorial URSS, Moscú, 2002.

[13] Luis A. Santaló. *Probabilidad e inferencia estadística*. OEA, 1980.

[14] Gabor Székely. *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*. D. Riedel Publishing Company, 1986.

[15] Ivan Matveevich Vinogradov. *Fundamentos de la Teoría de Números*. Mir, Moscú, 1977.