Modelos matemáticos en finanzas: Valuación de opciones

Ernesto Mordecki
mordecki@cmat.edu.uy
Centro de Matemática. Facultad de Ciencias
Montevideo, Uruguay.

Presentación.

El objetivo central del presente curso, es presentar la solución al problema de valuación de opciones en mercados financieros propuesta por F. Black y M. Scholes en 1973 y generalizada por R. Merton (1973).

El énfasis será centrado en las opciones de tipo europeo de compra (call options), teniendo en cuenta que los desarrollos presentados se pueden aplicar a situaciones similares.

Para la aplicación de los resultados presentados se debe distinguir dos tipos de "riesgo": el riesgo que el modelo de naturaleza estocástica contempla, y el riesgo de suponer que el modelo descrito se ajusta a las situaciones en que éste pretende aplicarse.

Por último, debe agregarse que el tratamiento es informal, en particular, en el Capítulo 2. El lector interesado encontrara las definiciones y demostraciones en la bibliografia citada.

Contenidos

Clase 1

Modelos en tiempo discreto

1.1 Modelo Cox-Ross-Rubinstein.

El modelo de mercado financiero que consideramos tiene $T+1$ períodos, $t = 0, 1, \ldots, T$ y consta de dos activos:

- $B = (B_t)_{t=0\ldots T}$ que evoluciona en forma determinística segun la ley

  $$B_t = B_{t-1}(1+r), \qquad B_0 = 1,$$

  donde r es la tasa de interés. B representa un bono (bond).

- $S = (S_t)_{t=0\ldots T}$ de evolución aleatoria o contingente, según la ley

  $$S_t = S_{t-1}(1+\rho_t), \qquad S_0 = x,$$

  donde ρ_t son variables aleatorias independientes y con igual distribución que toman dos valores,

  $$\rho_t = \begin{cases} u & \text{con probablidad} \quad p \\ d & \text{con probablidad} \quad 1-p \end{cases}$$

  donde $-1 < d < r < u$ y $p \in (0,1)$. S representa una acción (stock).

1.2 Opcion europea de compra (call option)

En el modelo anterior se introduce un tercer activo llamado opción, que es un acuerdo realizado entre dos partes en $t = 0$ en la cual una se compromete a vender una unidad de S (una acción) a la otra parte, en el tiempo T a precio K acordado.

- *Lanzador* es quien emite la opción, tiene obligación de vender una unidad de S a precio K en tiempo T.
- *Poseedor, tenedor (holder)* es quien recibe la opción, y tiene la posibilidad de comprar esa unidad de S.
- T es el *tiempo de ejercicio o maduración* de la opción.
- K es el *precio de ejercicio de la opción*
- $(S_T - K)^+$ se llama *premio* de la opción
- El activo S sobre el cual se realiza la opción se llama *subyacente*.

Como el poseedor de la opción la ejecuta solo si $S_T > K$, es equivalente pensar, que el compromiso consiste en pagar al poseedor $S_T - K$ si esta cantidad es positiva, o cero en caso contrario. Se pagaría entonces

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0).$$

Se puede pensar que

- Una opción es un *seguro* contra el evento que el precio S_T supere un determinado valor K.
- Una opción es una *apuesta*: Apuesto a que S_T supera K, y gano la diferencia.

1.3 Otras opciones

Mas en general, el compromiso puede suponer en pagar una cantidad dependiente de S_T, que notaremos $f(S_T)$.

Opciones de venta (put options)

Supongamos ahora, que el lanzador se compromete a *comprar* en T una acción a precio K. Esta opción, llamada europea de compra (put option) es equivalente a la anterior, con la diferencia de que el premio es $(K - S_T)^+$.

Opciones americanas

Las opciones americanas introducen en el contrato la siguiente variante:

- El poseedor puede reclamar la compra (venta) de la acción en cualquier momento entre 0 y T. Es decir, permiten el *ejercicio anticipado*

Las opciones americanas, se valúan utilizando los mismos principios que las europeas, con la diferencia de no existir fórmulas cerradas para el precio.

1.4 Valuación.

Problema: Cuanto vale ese tercer activo "derivado", es decir, cuanto pagará el tenedor de la opción por el derecho que ha adquirido.

Solución: Construyo un portafolio $(a_t, b_t)_{t=0,\dots,T}$ de bonos y acciones, es decir, tengo en cada paso a_t unidades de B y b_t unidades de S, de forma que

(a) El portafolio sea *autofinanciante (self-financing)*: las unicas modificaciones permitidas luego de $t = 0$ son "cambiar" entre B y S. Notemos X_t el valor del portafolio en t:

$$X_t = a_t B_t + b_t S_t.$$

En el período siguiente, debido a las fluctuaciones de los precios

$$X_{t+1} = a_t B_{t+1} + b_t S_{t+1}.$$

La condicion impuesta nos permite vender B y comprar S (o al revés) de forma que

$$X_{t+1} = a_{t+1} B_{t+1} + b_{t+1} S_{t+1}.$$

Restando, obtenemos la condicion que debe cumplir un portafolio autofinanciante

$$(a_{t+1} - a_t) B_{t+1} + (b_{t+1} - b_t) S_{t+1} = 0.$$

(b) El portafolio sea una *réplica* de la opción, es decir, en tiempo T tenga el valor

$$X_T = a_T B_T + b_T S_T = (S_T - K)^+.$$

Si se logra tal portafolio, diremos que el precio racional o justo (rational, fair) de la opción será el valor inicial de dicho portafolio, es decir

$$V(x,T) = a_0 + b_0 x$$

que es el costo de *replicar* el activo derivado a partir de los activos B y S.

1.5 Solución con $T = 1$

Veamos cuanto vale V en función de u, d, r, K. Comenzamos con 2 períodos, es decir $T = 1$. Supongo que si S sube, debo pagar U, y si baja D. En $t = 0$ compro a bonos y b acciones. Invierto $a + bx$. Al imponer la condicion de réplica, mi capital X_1 será

$$\begin{cases} (1+r)a + bx(1+u) & = & U \\ (1+r)a + bx(1+d) & = & D \end{cases}$$

según el precio suba o baje. De aquí resulta

$$(1+r)a = \frac{U(1+d) - D(1+u)}{d-u} \qquad bx = \frac{U-D}{u-d}$$

y el valor de la opción es

$$V(x,1) = a + bx = \frac{1}{1+r}[Up^* + D(1-p^*)] = \frac{1}{1+r}E^*(f(S_1))$$

donde

$$p^* = \frac{r-d}{u-d}$$

¡Hemos calculado el precio de nuestra primer opción!

1.6 Comentarios

- *No dependencia del retorno esperado.*

  El precio V de la opción no depende de p, sino de p^* que llamaremos *probablidad libre de riesgo*. Es quizá el resultado mas inesperado de la fórmula de Black-Scholes. Observese que p mide el retorno medio del activo subyacente.

- *Martingalas.*

  La probablidad p^* es tal que $E^*(S_1/(1+r)) = S_0 = x$. Es decir

  $$(1+u)p^* + (1+d)(1-p^*) = 1 + r$$

  Cuando se cumple esta propiedad en general (para T pasos) diremos que

  $$\frac{S_t}{(1+r)^t} \quad \text{es } \textit{martingala.}$$

- *Mercados completos.*

  Resolvimos un sistema de 2 por 2. De haber tenido el activo S tres valores (o mas) resultarían tres ecuaciones para dos incognitas, lo que en general resulta incompatible (sin solución). En ese caso se dice que el mercado es *incompleto*, y la opción no se puede replicar. ¿Cómo se podría completar el modelo?

- El razonamiento realizado se adapta a cualquier función $f(S_1)$, y por lo tanto sirve para valuar otros tipo de opciones.

- *Arbitraje.*

  Si *arbitraje* es la posibilidad de construir un portafolio autofinanciante con costo inicial nulo, que tenga en T valor positivo con probablidad positiva, y sea no negativo en para todas las contingencias, se puede ver que un precio distinto del obtenido produce arbitraje. Por ejemplo, si la opción cuesta $V' > V$, el lanzador obtiene con certeza $V' - V$ al venderla y replicarla para cumplir el compromiso asumido.

1.7 $T + 1$ períodos

De la generalización a T pasos del razonamiento anterior, resulta la existencia de un portafolio replicante de la opción, con premio f. Su precio resulta ser

$$V(x,T) = \frac{1}{(1+r)^T} E^* f(S_T)$$

Calculemos explícitamente este precio si $f(x) = (x-K)^+$. Tenemos que calcular $E^*(S_T - K)^+$. Como a lo largo de los T períodos, el precio del activo

S puede subir k veces y bajar $T-k$ veces, S_T es una variable binomial, que toma valores $x(1+d)^{T-k}(1+u)^k$. Como el valor esperado debe calcularse respecto a la probabilidad libre de riesgo p^*, resulta

$$P^*(S_T = x(1+d)^{T-k}(1+u)^k) = C_k^T(p^*)^k(1-p^*)^{T-k}$$

Si k_0 es la cantidad de subas a partir de la cual S_T es mayor que K,

$$E^*(S_T - K)^+ = \sum_{k=k_0}^{T} C_k^T(p^*)^k(1-p^*)^{T-k}[x(1+d)^{T-k}(1+u)^k - K]$$

$$= \sum_{k=k_0}^{T} C_k^T(p^*)^k(1-p^*)^{T-k}[x(1+d)^{T-k}(1+u)^k] - K\mathbf{B}(k_0, T, p^*)$$

donde

$$\mathbf{B}(j, T, p) = \sum_{k=j}^{T} C_k^T p^k(1-p)^{T-k}$$

que es la probabilidad que una variable binomial con parámetros T y p supere un cierto valor j. Es interesante ver, que el primer sumando (dividido por $(1+r)^T$) también puede escribirse como una probablidad binomial, pero con otro parámetro. Si

$$\tilde{p} = \frac{1+u}{1+r}p^* \quad \text{con} \quad p^* = \frac{r-d}{u-d}$$

reagrupando convenientemente, resulta que

$$V(x, T) = x\mathbf{B}(k_0, T, \tilde{p}) - \frac{K}{(1+r)^T}\mathbf{B}(k_0, T, p^*)$$

donde k_0 es el primer natural mayor que $\frac{\log(K/(x(1+d)^T))}{\log((1+d)/(1+u))}$ Este resultado fue obtenido por Cox, Ross y Rubinstein (1976).

1.8 Resumen

Del análisis realizado estamos en condiciones de obtener algunas conclusiones:

1. En la valuación participa una probabilidad "artificial" y no la verdadera o histórica.

2. La valuación depende de la posibilidad de replicar el activo derivado (la opción) a partir de los activos existenes (el subyacente de la opción, S, y el activo sin riesgo B).

3. Un valor diferente para la opción produce arbitraje.

Presentamos un ejemplo en donde estos tres conceptos se ven desde una óptica diferente.

1.9 Probabilidad libre de riesgo

Un partido Barça-Madrid (S. Carrillo y J.L. Fernández)

Consideremos un próximo partido Barcelona - Real de Madrid que ha de tener lugar en Barcelona. Los datos históricos son los siguientes: Ha habido 100 partidos en esas mismas circunstancias y de ellos

$$\begin{cases} B: & \text{gana el Barcelona} & 41 \\ E: & \text{empate} & 20 \\ M: & \text{gana el Madrid} & 39 \end{cases}$$

Se emiten boletos B, E, M con costo 1 para apostar por cada una de las tres posibilidades:

Problema: ¿Cuanto debemos pagar por cada boleto en caso de acertar el resultado?

Primer solución: Tomando los datos históricos, pagaríamos

$$\frac{100}{41} = 2.44 \text{ por B}, \quad \frac{100}{20} = 5 \text{ por E, y} \quad \frac{100}{39} = 2.56 \text{ por M}.$$

Supongamos que vendemos 45 boletos B, 20 E, y 35 M, es decir recibimos 100. Si gana M, luego de pagar nos restan

$$100 - 35\frac{100}{39} = 10.25$$

y obtenemos ganacia, pero ... si gana B restan

$$100 - 45\frac{100}{41} = -9.76$$

y tenemos pérdida.

Segunda solución: La única forma de evitar el riesgo, es adoptar la regla "el total de lo apostado se divide entre los que acierten" y en consecuencia pagar:

$$\frac{100}{45} \text{ por B}, \quad \frac{100}{20} \text{ por E}, \quad \text{y } \frac{100}{35} \text{ por M}.$$

Esto equivale a asignar una probabilidad

$$P^* = \{0.45\ 0.2\ 0.35\} \quad \text{en} \quad \Omega = \{B, E, M\}$$

que llamaremos libre de riesgo.

1.10 Oportunidades de Arbitraje

Como ganar siempre.

Consideremos la final del mundial, Brasil - Francia. Ahora los resultados posibles son dos: B y F. Supongamos que se emiten apuestas en Rio de Janiero y en París, resultando por cada 100 boletos vendidos

	Rio	París
B	55	40
F	45	60

Si las apuestas se pagan según cada P^*,

¿existe posibilidad de ganar siempre?

Si apuesto a por F en Rio, y b por B en París, con $a + b = 1$, al terminar el partido, mi saldo es

$$\frac{a}{0.45} - 1 \text{ si gana B}, \qquad \frac{b}{0.4} - 1 \text{ si gana F}.$$

Hay pares (a, b) para los cuales ambas cantidades son positivas, por ejemplo $a = 0.53$ y $b = 0.47$, y valen 0.18 cada una. La existencia de tales oportunidades se llama arbitraje.

Pregunta: ¿En que situaciones se puede producir arbitraje?

Teorema 1 La ausencia de oportunidades de arbitraje (AOA) es equivalente a la existencia de una probabilidad P^* libre de riesgo.

Obs: La probabilidad libre de riesgo en el ejemplo anterior es ...

1.11 Réplicas.

La mejor estrategia paso a paso.

Supongamos una situación similar en los cuartos de final. Tenemos los partidos Brasil - Holanda y Francia - Croacia. Se venden boletos en cada uno de los posibles partidos, según las proporciones:

Supongamos que ademas se apuesta quien sale campeón (X). ¿Cuanto pagará el boleto B=Brasil campeón? Como

$$P^*(B) = \frac{4}{7} * \frac{3}{5} * \frac{2}{3} + \frac{4}{7} * \frac{2}{5} * \frac{3}{4} = \frac{14}{35},$$

el boleto debería pagar 35/14. Supongamos además, que uno de cada dos apostadores a campeón apuesta por $X = B$, y se decide pagar 2 el acierto Brasil campeón. ¿Se puede producir arbitraje?

1.12 Réplicas y arbitraje

Apuesto nuevamente $a + b = 1$.

Paso 1. Apuesto a a que B no es campeón, b a B en B - H.

Paso 2. Si gana B recibo $\frac{7}{4}b$. Con $a_1 + b_1 = 1$, Apuesto $\frac{7}{4}ba_1$ por F y $\frac{7}{4}bb_1$ por C en F - C.

Paso 3. Si gana F, (C) apuesto en la final $\frac{7}{4} * \frac{5}{3}ba_1$ ($\frac{7}{4} * \frac{5}{2}bb_1$) por B.

Si gana B, recibo $\frac{7}{4} * \frac{5}{3} * \frac{3}{2}ba_1 = \frac{35}{8}ba_1$, ($\frac{7}{4} * \frac{5}{2} * \frac{4}{3}bb_1 = \frac{35}{6}bb_1$). Si pierde Brasil en cualquier momento, recibo $2a$. Es fácil de ver que existen valores a, b, a_1, b_1 tales que

$$2a - 1 > 0, \quad \frac{35}{8}ba_1 - 1 > 0 \quad \frac{35}{6}bb_1 - 1 > 0.$$

Por ejemplo

$$a = 5/9, \quad b = 4/9, \quad a_1 = 3/7, \quad b_1 = 4/7$$

dan como resultado que las tres cantidades valen 1/9 (¡mi ganancia segura!).

Pero si la apuesta por Brasil campeón pagase 35/14 la mejor combinación de apuestas simples produce igual resultado que la compuesta, y diremos que la replica.

Pregunta: ¿Es posible replicar cualquier clase de apuesta?

Teorema 2. Supongamos que existe P^*. Cualquier apuesta compuesta se puede replicar si y solo si P^* es única.

Ejercicio 1

Supongamos que $d = 0$, $r = 0.1$, y $u = 0.2$.

(a) Calcular p^*, la probabildad libre de riesgo.

(b) Calcular $\tilde{p}$, y el precio de una opción call en función de x , K.

(c) Si $x = 2$, $K = 2.2$, calcular el valor numérico de la opción y explicar como se hace la cobertura (réplica).

Resultados. $p^* = 0.5$, $\tilde{p} = 0.54$, $V(x, 1) = 0.54x - 0.45K$, $V(2, 1) = 0.09$, $b = 0.5$, $a = -0.91$.

Ejercicio 2

Supangamos ahora que T=2. Como antes, $d = 0$, $r = 0.1$, y $u = 0.2$, $x = 2$, $K = 2,2$.

(a) Hallar k_0, mínimo número de subas necesarias para que $S_2 > K$.

(b) Hallar el precio del call.

Resultados: $k_0 = 1$ hay 2 sumandos, $V(2, 2) = 0.213$.

Clase 2

Modelos en tiempo continuo

2.1 Movimiento Browniano.

En 1900, L. Bachelier introdujo un modelo del movimiento Browniano (observado en la naturaleza por Brown en 1826) para modelar las fluctuaciones de la bolsa parisina.

El movimiento Browniano o proceso de Wiener en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso aleatorio, $W = (W_t)_{\{t \geq 0\}}$ tal que

- Sus trayectorias son continuas.
- Sus incrementos son independientes. Si $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, entonces

  $$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

  son variables aleatorias independientes.
- $W_0 = 0$, $\quad W_t - W_s$ es una variable gaussiana, con media cero y varianza $t - s$, es decir

  $$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

Recordemos que X es gaussiana o normal ($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) cuando su distribución de probablidad es

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

La densidad es la campana de Gauss

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Algunas consecuencias

- La variable W_t es normal, centrada, y tiene varianza t.

  $$W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

- El incremento ΔW del proceso, es $\mathcal{N}(0, \Delta t)$. Consideremos la variable $(\Delta W)^2$. Tenemos

  $$E((\Delta W)^2) = \Delta t, \qquad V((\Delta W)) = 2(\Delta t)^2$$

  Luego, si $\Delta t \to 0$, la varianza es menor que la esperanza, luego la variable se "aproxima" a su valor esperado, lo que notaremos

  $$(\Delta W)^2 \sim \Delta t, \quad \text{o sugestivamente} \quad (dW)^2 = dt$$

- Una forma equivalente de ver esta propiedad, es demostrando que, si un intervalo $[a, b]$ se parte en n subintervalos Δt_i iguales, y se consideran los incrementos ΔW_i en cada subintervalo, se cumple

  $$\lim_{n \to +\infty} \sum (\Delta W_i)^2 = b - a.$$

donde el límite es en probabilidad.

2.2 El modelo de Black y Scholes

El modelo tiene un continuo de períodos $t \in [0, T]$ y consta de dos activos:

- $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ que evoluciona en forma determinística según la ley

  $$\frac{dB_t}{B_t} = r dt, \qquad B_0 = 1,$$

  donde r es la tasa de interés por unidad de tiempo. B representa un bono (bond).

- El precio de la acción (stock) $S = (S_t)_{t \in [0,T]}$ es de evolución aleatoria o contingente, según la ley

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW, \qquad S_0 = x,$$

donde

  - μ es el *retorno medio*,
  - σ la *volatilidad*
  - W es un movimiento Browniano.

Algunos comentarios

- En primer lugar, hay que dar un sentido (aunque sea práctico) a la expresión "dW".

- Una forma de pensar, es que el modelo binomial tiene muchos pasos (T es muy grande), y en cada paso la variación de S es muy pequeña. Considerando una opción a tres meses, que cotiza cada minuto, tenemos 129600 períodos.

- Los incrementos ΔS divididos por S son entonces variables gaussianas de media $\mu \Delta t$ y variancia $\sigma^2 \Delta t$, es decir

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \mathcal{N}(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

- Supondremos que en este mercado se pueden realizar transacciones en cualquier momento, y sin costos.

- Las opciones en este mercado se introducen exactamente como en el modelo binomial.

2.3 Fórmula de Itô

Para valuar opciones debemos desarrollar algunas herramientas. La fórmula de Itô es una generalización de la regla de la cadena del cálculo usual de funciones.

Objetivo : Dar un sentido y generalizar la igualdad

$$(dW)^2 = dt.$$

Sea $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función con derivadas continuas (regular). El desarrollo de Taylor de f es

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)(\Delta x)^2 + \dots$$

Habitualmente, el segundo sumando se desprecia frente al primero. Pero si $x = W_t$ y $x_0 = W_{t_0}$, tenemos

$$(\Delta x)^2 = (\Delta W)^2 \sim \Delta t$$

y el aporte no se desprecia frente al primer sumando. Los otros términos son efectivamente de mayor orden.

Sea ahora $f = f(x,t)$ una función regular de dos variables. Con argumentos similares a los esbozados, se demuestra la Fórmula de Itô:

$$f(W_t, t) - f(W_0, 0) = \int_0^t f_x(W_s, s) dW_s$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(W_s, s) ds + \int_0^t f_t(W_s, s) ds$$

donde f_x, f_{xx} y f_t son las derivadas parciales de f. Sintéticamente

$$df(W_t, t) = f_x(W_t, t)dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(W_t, t)dt + f_t(W_t, t)dt.$$

2.4 Comentarios

- La primer integral,

$$\int_0^t f_x(W_s, s) dW_s$$

debe entenderse como un límite en probabilidad de sumas del tipo

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_x(W_{t_i}, t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

- La segunda integral
$$\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(W_s, s)ds$$
es específica del cálculo estocástico, y hace que las reglas de integración sean diferentes a las clásicas. Por ejemplo si $f(x) = x^2$, entonces
$$f_t = 0, \quad f_x = f' = 2x \quad f_{xx} = f'' = 2$$
Resulta
$$f(W_t) - f(W_0) = W_t^2 = \int_0^t (2W_s)dW_s + 2t$$
que es distinta de la fórmula
$$y^2 = 2\int_0^y xdx.$$

- Recordar, que para una función de dos variables, $f(x, y)$
$$df = f_x dx + f_y dy.$$
Ahora aparece un término más

2.5 Movimiento Browniano Económico

Bachelier (1900) propone que las acciones evolucionan de acuerdo a
$$L_t = L_0 + \sigma W_t + \nu t,$$
donde W_t es un movimiento Browniano. Como W_t es gaussiana, L_t puede tomar valores negativos.

En 1965 P. Samuelson propone para el precio de las acciones
$$G_t = G_0 \exp(\sigma W_t + \nu t),$$
para los precios de la acción. G se llama movimiento Browniano económico o geométrico. Como es función de W, aplicamos Itô. Considerando
$$f(x, t) = G_0 \exp(\sigma x + \nu t)$$

tenemos que

$$G_t = f(W_t, t)$$

Las derivadas parciales son,

$$f_x(x,t) = \sigma f(x,t), \quad f_{xx}(x,t) = \sigma^2 f(x,t), \quad f_t(x,t) = \nu f(x,t),$$

resultando

$$dG_t = df(W_t, t) = \sigma G_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 G_t dt + \nu G_t dt$$

Dividiendo por G

$$\frac{dG_t}{G_t} = (\nu + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$$

Es decir, el movimiento browniano económico verifica la definición del activo con riesgo en el modelo de Black y Scholes. Como $\mu = \nu + \frac{1}{2}\sigma^2$ la fórmula para S es

$$S_t = S_0 \exp[\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t]$$

Observese que el término $\frac{1}{2}\sigma^2 t$ proviene de la derivada f_{xx}, la "novedad" de la fórmula de Itô.

Conclusión : El movimiento Browniano geométrico es la "generalización" natural de agregar ruido a la evolución de un activo sin riesgo (determinístico).

2.6 Probabilidad libre de riesgo y Teorema de Girsanov

Queremos en este modelo encontrar la probabilidad libre de riesgo. En el modelo binomial, consistía en considerar una probababilidad p^* tal que

$$E^*\Big(\frac{S_1}{1+r}\Big) = x.$$

Es decir

p^* iguala los rendimientos medios de los activos con y sin riesgo

Precisamos P^* tal que

$$E^*\Big(\frac{S_t}{B_t}\Big) = \frac{S_0}{B_0}$$

Según P, como W_t es gaussiana

$$E\Big(\frac{S_t}{B_t}\Big) = S_0 E\Big(\exp(\sigma W_t - (\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu - r)t\Big) = S_0 \exp((\mu - r)t)$$

Luego, lo que precisamos es una probabilidad que "cambie" μ por r.

Llamando

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

resulta

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t = r dt + \sigma d(W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t) = r dt + \sigma dW^*$$

El *Teorema de Girsanov* afirma que existe una probabilidad P^* tal que el proceso W^* es un movimiento Browniano en $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$

En conclusión, de su aplicación resulta que podemos

- cambiar P por P^*
- cambiar μ por r
- cambiar W por W^*

logrando que los activos B y S tengan igual rendimiento en el modelo P^*, teniendo en cuenta que los cálculos a realizar darán el mismo resultado en ambos modelos.

Conclusión

De aquí en adelante, haremos todos los cálculos en $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, y S tendrá rendimiento medio r.

2.7 Valuación

El cálculo del precio $V(x,T)$ de una opción europea con premio $f(S_T)$ se realiza bajo iguales principios que en el modelo binomial. Precisamos entonces construir un portafolio $(a_t, b_t)_{t\in[0,T]}$ que

- replique la opción
- sea autofinanciante.

Si $X_t = a_t B_t + b_t S_t$ es el valor del portafolio en el instante t, que replique la opcón significa que en T

$$X_T = a_T B_T + b_T S_T = f(S_T).$$

La autofinanciación, consiste en exigir que *los cambios en el capital son producto de la fluctuación de los precios.* Esa condición es

$$dX_t = a_t dB_t + b_t dS_t.$$

El precio de la opción será entonces el de comprar el portafolio autofinanciante en $t = 0$, es decir

$$V(x,T) = a_0 B_0 + b_0 S_0$$

2.8 Construcción del portafolio

Black y Scholes propusieron buscar una función $H(x,t)$ tal que,

$$X_t = H(S_t, t)$$

La condición de réplica es $X_T = f(S_T)$, lo que se logra si

$$H(x,T) = f(x).$$

En ese caso el precio de la opción sera

$$V(x,T) = H(S_0, 0).$$

Para determinar H tal que

$$X_t = a_t B_t + b_t S_t = H(S_t, t)$$

observamos que, como S es función de W^*, y H es función de S, podemos aplicar la fórmula de Itô, resultando

$$dH = (rSH_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{xx} + H_t)dt + H_x S\sigma dW^*$$

Por otra parte, como X es autofinanciante,

$$dX = adB + bdS = r(aB + bS)dt + bS\sigma dW^* = rHdt + bS\sigma dW^*$$

2.9 La ecuación de Black-Scholes

Queremos $X = H$. Igualamos los coeficientes en dt,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 H_{xx}(S_t, t) + rS_t H_x(S_t, t) + H_t(S_t, t) = rH(S_t, t)$$

Ademas, para que sea réplica, tenemos $H(S_T, T) = f(S_T)$. Ambas condiciones se verifican, en caso de cumplirse para todos los valores posibles x que tome el activo, es decir, si

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 H_{xx}(x, t) + rxH_x(x, t) + H_t(x, t) & = & rH(x, t) \\ \\ H(x, T) & = & f(x) \end{cases}$$

Esta es la ecuación de Black-Scholes. Es una ecuación diferencial en derivadas parciales. La condición de réplica es la condición inicial o de borde. Si igualamos el otro coeficiente obtenemos

$$b_t = H_x(S_t, t)$$

que nos da la cantidad de acciones necesarias para replicar la opción.

2.10 Martingalas

Para resolver la ecuación anterior, recurrimos a la noción de martingala.

Una *martingala* es un proceso estocástico que evoluciona en forma "equilibrada", es decir sin tendencia. Una consecuencia, es que su valor esperado es constante. Es decir, si $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ es una martingala, entonces

$$E(M_0) = E(M_t) \quad \text{para todo } t.$$

Además, si un proceso X es tal que

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t$$

entonces

$$X \text{ es martingala si y solo si } a_t = 0.$$

Ejercicio

Verificar que el valor del portafolio descontado es una martingala, es decir

$$\frac{H(S_t,t)}{B_t} \quad \text{es } P^*\text{-martingala.}$$

Tenemos $H/B = e^{-rT}H$. Aplicando Itô,

$$d(e^{-rT}H) = e^{-rT}\Big(- rHdt + dH)$$

Pero como $dH = rHdt + bS\sigma dW^*$, al sustituir resulta

$$d\left(\frac{H(S_t,t)}{B_t}\right) = bS_t\sigma dW_t^*$$

verificando que la tendencia es nula.

2.11 Solución de la ecuación

Problema: Calcular $H(x,0)$.

Idea: El valor esperado del portafolio descontado es igual en 0 y en T (por martingala).

$$V(x,T) = H(x,0) = E^*(e^{-rT}f(S_T)) = e^{-rT}E^*(f(S_T))$$

que es el análogo al caso binomial.

Opcion europea de compra

Tenemos $f(x) = (x - K)^+$. Entonces, recordando que bajo P^*, con $S_0 = x$

$$S_T = x \exp(\sigma W_T^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT)$$

al ser $W_T^* \sim \mathcal{N}(0, T)$ tenemos

$$V(x, T) = e^{-rT} \int_{x_0}^{+\infty} \left[x e^{\sigma u - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT} - K \right] \frac{1}{\sqrt{T}} \phi(\frac{u}{\sqrt{T}}) du$$

donde x_0 es el mínimo valor tal que $e^{\sigma x_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT} \geq K$. Transformando, obtenemos la

Fórmula de Black-Scholes

$$V(x, T) = x\Phi(x_1) - e^{-rT} K \Phi(x_0)$$

con

$$\begin{aligned} x_0 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log \tfrac{x}{K e^{-rT}} - \tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \\ x_1 &= x_0 + \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

Clase 3

Fórmula de Black y Scholes

3.1 Repaso

El problema consiste en hallar $H(x,t)$ y un portaforlio (a_t, b_t) tales que

- $X_t = a_t B_t + b_t S_t = H(S_t, t)$.
- Sea una réplica la opción
- Sea autofinanciante.

El precio de la opción será entonces el de comprar el portafolio autofinanciante en $t = 0$, es decir

$$V(x,T) = a_0 B_0 + b_0 S_0 = H(S_0, 0)$$

La condición de réplica se asegura si

$$H(x,T) = (x-K)^+$$

La ecuación para H obtenida por Black y Scholes es

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 H_{xx}(x,t) + rxH_x(x,t) + H_t(x,t) & = & rH(x,t) \\ \\ H(x,T) & = & (x-K)^+ \end{cases}$$

Además, resulta que

$$b_t = H_x(S_t, t)$$

que nos da la cantidad de acciones necesarias para replicar la opción.

Solución de la ecuación

La fórmula análoga al caso binomial es

$$V(x,T) = H(x,0) = \frac{1}{e^{rT}} E^*((S_T - K)^+).$$

El cálculo de estos valores esperados permiten hallar la

Fórmula de Black-Scholes

$$V(x,T) = x\Phi(x_G) - \frac{K}{e^{rT}}\Phi(x_P)$$

con

$$x_G = \frac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$x_P = \frac{\ln(x/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

donde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

es la distribucion de probabilidad de la variable gaussiana con media cero y varianza 1.

3.2 Relación con el caso binomial

La analogía con el caso binomial es directa.

Recordemos que, notando $\mathbf{B}(k_0, T, p) = P(Bin(k_0, T) \geq k_0)$ a la probabilidad que una variable binomial con parámetros T y p supere un cierto valor k_0, y

$$\tilde{p} = \frac{1+u}{1+r} p^* \quad \text{con} \quad p^* = \frac{r-d}{u-d}$$

la fórmula de Cox-Ross-Rubinstein era

$$V(x,T) = x\mathbf{B}(k_0, T, \tilde{p}) - \frac{K}{(1+r)^T}\mathbf{B}(k_0, T, p^*)$$

Por su parte, la fórmula de Black-Scholes es

$$V(x,T) = x\Phi(x_G) - \frac{K}{e^{rT}}\Phi(x_P)$$

Observación El Teorema Central del límite establece que los cálculos de probalilidades binomiales si el parámetro T (cantidad de períodos) es grande se pueden realizar mediante la variable normal. Una aplicación de este resultado a este caso nos permitiría deducir la segunda fórmula a partir de la primera.

3.3 Comentarios

- En la fórmula no aparece μ, el rendimiento medio del activo
- Los parámetros que participan son
  - x que es una variable de estado.
  - r y σ, parámetros del modelo, que deben ser identificados.
  - T y K que figuran en el contrato de la opción.
- ¿Cuanto vale la opción en un tiempo intermedio?

  Regla: Cambiar T por $T-t$ y x por S_t en la fórmula.

  Luego la opción es un activo más, que se negocia en cualquier momento.
- ¿Que pasa si $K=0$?

  Directamente: Preciso $S_0 = x$ para responder por mi compromiso futuro.

  En BS, tenemos que

  $$x_G \to +\infty \quad \text{cuando} \quad K \to 0,$$

  por lo que $\Phi(x_G) \to 1$, y resulta $V(x,T) = x$.
- Por último observemos que $x_G > x_P$, de donde $\Phi(x_G) > \Phi(x_P)$ siempre. Además

  $$x_P = x_G - \sigma\sqrt{T}$$

3.4 Ejercicio 3

Calcular el valor de un call si

- $S_0 = 21$
- $K = 20$
- $r = 0,1$ (tasa anual de un 10%)
- $T = 0.25$ (1/4 de año, 3 meses)
- $\sigma = 0.235$ (una volatilidad del 23.5%)

Solución

Primero calculo x_G y x_P:

$$\ln(x/K) = \ln(21/20) = 0.0488,$$

$$\sigma\sqrt{T} = 0.235\sqrt{0.25} = 0.1175$$

$$(r + \sigma^2/2)T = (0.1 + 0.235^2/2)0.25 = 0.0319$$

Entonces

$$x_G = \frac{\ln(21/20) + (0.1 + 0.235^2/2)0.25}{0.235\sqrt{0.25}} = 0.6868$$

de aqui, restando $\sigma\sqrt{T}$

$$x_P = 0.6868 - 0.1175 = 0.5693$$

De tablas de la distribución normal (o computadora)

$$\Phi(0.6868) = 0.7539 \qquad \Phi(0.5693) = 0.7154$$

Por último

$$V = 21 * 0.7539 - 20e^{-0.1*0.25}0.7154 = 1.874$$

es el valor del call.

3.5 Aplicación de la fórmula

Para aplicar la fórmula debemos tener en cuenta

- Las cantidades $S_0 = x$, K, y V se miden todas en una misma moneda de referencia.
- r es la tasa de interés anual. Si la moneda de referencia son dólares, tendríamos $r \sim 0.1$ aproximadamente un 10%.
- T se mide entonces en años. Si la opción es a un mes

$$T = \frac{1}{12} = 0.083$$

  y si es a 3 meses $T = 3/12 = 0.25$.

- σ, la volatilidad se mide en unidades por año. Por ejemplo, una volatilidad de 0.2 es suponer que

$$\frac{S_1 - S_0}{S_0} \sim \mathcal{N}(\mu, 0.04)$$

  El intervalo de amplitud $\pm\sigma$ (es decir $\pm 20\%$), tiene una probabilidad del 68%.

Ejercicio 4. Sensibilidad respecto de T

Calcular los valores de un call con la informacón:

- $S_0 = 1000$
- $K = 950$
- $r = 10\%$
- $T = 1, 2$, o 3 meses
- $\sigma = 40\%$.

Solución: Como $1/12 = 0.083$, $2/12 = 0.167$ y $3/12 = 0.25$ calculamos como antes con los valores, $x = 1000$, $K = 950$, $r = 0.1$, $T = 0.083, 0.167$, y 0.25, $\sigma = 0.4$, resultando los valores

$$BS(0.083) = 79.47, \quad BS(0.167) = 101.15 \quad BS(0.25) = 118.95$$

Conclusión: El precio de la opcion aumenta si aumenta el tiempo de ejercicio T. Esto se puede deducir directamente de la fórmula calculando la derivada parcial $\theta = H_T(x, T)$ respecto de T, llamada $Theta$.

Ejercicio 5. Sensibilidad respecto de σ

Calcular los valores de un call con la informacón:

- $S_0 = 1000$
- $K = 950$
- $r = 10\%$
- $T = 3$ meses
- $\sigma = 10\%, 20\%, 30\%, 40\%$.

Solución: Calculamos como antes con los valores, $x = 1000$, $K = 950$, $r = 0.1$, $T = 3/12 = 0.25$, $\sigma = 0.2, 0.3, 0.4$, resultando los valores

$$BS(0.1) = 74.78, \qquad BS(0.2) = 85.79$$

$$BS(0.3) = 101.59 \quad BS(0.4) = 118.95$$

Conclusión: El precio de la opcion aumenta si aumenta la volatilidad σ. Esto se puede deducir directamente de la fórmula calculando la derivada parcial $vega = H_\sigma$ de H respecto de σ.

3.6 Sensibilidad respecto de los parámetros

Como en los ejercicios anteriores, es útil conocer como varia el precio de una opción al variar los parámetros. Debemos ahora tener en cuenta que la función H que hallamos depende no solo de T y x, sino que

$$BS = BS(x, r, \sigma, T, K)$$

El análisis se realiza haciendo variar un parámetro cuando los otros permanecen fijos.

- *Delta* es el parámetro que mide la variación del call respecto del valor x del subyacente.

  $$\delta = H_x$$

  Delta es siempre positiva. Es importante recordar que H_x es la cantidad de S que tiene el portafolio que replica la opción. Es intuitivo que si x aumenta, debemos aumentar la proporcion de S en el portafolio.

- *Theta* (θ) mide la variación de la opción respecto del vencimiento T. Como vimos, a mayor T mayor precio.

- *Vega (ν)* mide la variación del precio de la opción respecto de la volatilidad. Como vimos, cuanto más volatil es el subyacente, mas cara es la opción.

- *Rho (ρ)* mide la variación respecto de r. Cuanto mayor es el interés mas cara es la opción.

- Por último *lambda* (λ) es el indicador de la variación del precio respecto de K: es la única cantidad negativa, cuanto mayor es K menor es el precio de la opción.

Clase 4

Aplicación y variaciones en BS.

4.1 El modelo de Black y Scholes

Tenemos un continuo de períodos $t \in [0, T]$ y dos activos:

- Los bonos tienen valor
$$B_t = B_0 e^{rt}$$
- Las acciones valen
$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t},$$

Fórmula de Black-Scholes

$$V(x, T) = x\Phi(x_G) - Ke^{-rT}\Phi(x_P)$$

con

$$x_G = \frac{\ln(x/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$x_P = \frac{\ln(x/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

El valor de un call lo notaremos

$$BS = BS(x, K, r, \sigma, T)$$

4.2 Identificación de parámetros

En la fórmula aparecen parametros de distinta naturaleza:

- x es una variable de estado. Es el precio del activo en el momento del contrato. Se puede tomar el promedio compra-venta.
- r es la tasa de interés sin riesgo. Se toma la tasa de un bono sin dividendos con igual ejercicio que la opción.
- T y K figuran en el contrato de la opción.
- La volatilidad σ, es el parámetro mas difícil de determinar.

4.3 Volatilidad estimada

Hay dos enfoques para determinar σ. El primero consiste en estimarla estadísticamente a partir de precios observados. Tenemos que tener información histórica del subyacente, por ejemplo cada $\Delta t = \delta$ (días, horas etc.) Dividiendo $S_{t+\delta}$ por S_t resulta

$$S_{t+\delta} = S_t \exp\Big(\nu\delta + \sigma(W_{t+\delta} - W_t)\Big)$$

Tenemos

$$l_t = \log\Big(\frac{S_{t+\delta}}{S_t}\Big) = \nu\delta + \sigma\Delta W_t$$

donde $\Delta W_t \sim \mathcal{N}(0, \delta)$. Entonces

- $l_t \sim \mathcal{N}(\nu\delta, \delta\sigma^2)$
- Las variables $l_1, \dots, l_T$ son independientes.

Los estimadores son,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T\delta}\sum_{t=1}^{T} l_t \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T\delta}\sum_{t=1}^{T}(l_t - \hat{\mu}\delta)^2$$

Problema: En la mayoría de los casos la volatilidad *no es constante*. Se recomienda utilizar los precios de los últimos 90 a 180 días.

4.4 Volatilidad implícita

El segundo método para determinar la volatilidad es indirecto: *Conociendo el precio de otra opción determinar cual es el valor de σ que da ese precio.*

4.5 Ejercicio

Hallar la volatilidad implícita del activo subyacente sabiendo que, para un call, con

- $x = K = 1$
- $r = 0.2$
- $T = 1$ (1 año).
- El precio es $BS = 0.222$

Solución: Sabemos que el precio de la opción es creciente en σ. Utilizamos el método de bipartición para hallar la raíz σ_0 de la ecuación

$$BS(\sigma_0) = 0.222.$$

Comenzamos con 0.1 y 1.

$$BS(0.1) = 0.182, \qquad BS(1) = 0.445.$$

La volatilidad está entre 0.1 y 1, porque el precio es creciente en σ. Para el valor 0.5

$$BS(0.5) = 0.284$$

σ_0 es menor que 0.5, tomo 0.25 y continuo,

$$BS(0.25) = 0.208, \quad BS(0.375) = 0.244, \quad BS(0.3125) = 0.2256$$

y finalmente

$$BS(0.28125) = 0.2168 \qquad BS(0.296875) = 0.22114$$

La volatilidad es entonces un valor entre 0.299 y 0.3125. El procedimiento se puede continuar hasta la precisión deseada.

Variaciones: Otros derivados en BS.

4.6 Paridad Put-Call

Una opción de venta (Put) es una opción con premio $(K - S_T)^+$. Su valuación se basa en el siguiente argumento

Paridad put-call: Supongamos que compro un call y lanzo un put, sobre el mismo subyacente, con igual T y K. En T,

- Si $S_T > K$ tendré $S_T - K$
- Si $S_T < K$ tendré $-(K - S_T) = S_T - K$

Luego la cartera $(\text{Call}, -\text{Put})$ tiene en $t = T$ el valor $S_T - K$. Para evitar arbitraje, en $t = 0$ debo tener

$$\text{Call} - \text{Put} = x - Ke^{-rT}$$

De aqui, valuando el call segun BS, resulta

$$\text{Put} = Ke^{-rT}\Phi(-x_P) - x\Phi(-x_G)$$

Observación : Un put en esencia es menos riesgoso que un call. Una gran variación de S, deja al descubierto al lanzador de un call. En el put, el lanzador, a lo sumo pierde K.

4.7 Ejercicio

Valuar el put con $x = 1000$, $K = 950$, $r = 0.1$, $T = 0.25$ (3 meses) y $\sigma = 0.4$, si el precio del call es 118.95

Solución: El precio del call es 1.874 (Ejercicio). Por paridad

$$\text{Put} = \text{Call} - x + Ke^{-rT} = 118.95 - 1000 + 950e^{-0.1*0.25} = 45.49$$

De no conocer el precio del call, aplicamos directamente la fórmula del put.

4.8 Opciones con dividendos

Supongamos que el activo S paga dividendos con tasa q por unidad de tiempo.

$$S \quad \text{paga} \quad q\Delta t S_t \quad \text{por cada} \quad \Delta t$$

y evoluciona según la ley

$$\Delta S = S(\mu \Delta t + \sigma \Delta W)$$

Para valuar sin arbitraje, debo reinvertir los dividendos en acciones. Llamemos

$$Y_t = \text{valor acumulado por acción} + \text{dividendos}$$

Tendremos

$$Y_t = A_t S_t, \quad \text{con} \quad A_t \geq 1 \quad \text{y} \quad A_0 = 1.$$

En la valuación debemos utilizar el "activo" Y. Veamos su evolución.

$$\Delta Y = A_t \Delta S + q \Delta t Y_t = A_t S_t(\mu \Delta t + \sigma \Delta W) + q \Delta t Y_t$$

Entonces

$$\Delta Y = Y_t((\mu + q)\Delta t + \sigma \Delta W)$$

De allí

$$Y_t = e^{qt} S_t \qquad S_t = e^{-qt} Y_t,$$

Con argumentos similares a BS, llamando BS(x,r) al precio de un call con $S_0 = x$, y tasa r, sin dividendos, resulta que el precio de un call con tasa q de dividendos es (Merton 1973)

$$\text{Call}(q) = BS(xe^{-qT}, r)$$

4.9 Ejercicio

Calcular el valor de un call con $x = 100$, $K = 105$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$ y $T = 0.33$ (4 meses), si el activo paga dividendos según una tasa $q = 0.05$.

Solución: Calculo

$$x_q = xe^{-0.05*0.33} = 100 * 0.9836 = 98.36$$

Con eses valor aplico BS

$$BS(98.36, 105, 0.1, 0.2, 0.33) = 4.538$$

De no haber pagado dividendos,

$$BS(100, 105, 0.1, 0.2, 0.33) = 5.446$$

4.10 Opciones sobre divisas

Tenemos dos divisas, una doméstica y otra foránea. La relación clave en el caso anterior era

$$Y_t = e^{qt} S_t.$$

Ahora:

$$S_t \quad \text{es el tipo de cambio,} \qquad q \quad \text{es el tipo de interés foraneo}$$

teniendo entre ellos la misma relación que en el caso de pago de dividendos, resultando las mismas fórmulas.

4.11 Ejercicio

Supongamos que la moneda de referencia son pesos, y la divisa dolares. Calcular cuanto debo pagar para comprar 10000 dólares a un precio prefijado de 11 pesos por dolar.

1. Dentro de dos meses.
2. Dentro de seis meses.

Solución: Tenemos $T = 2/12 = 0.1667$ y $T = 6/12 = 0.5$. Supongo que $r = 0.30$ es la tasa de interés anual en pesos, y $q = 0.06$ la tasa de interés en dolares. Asumo que $x = 10500$ (es decir, un dolar son 10.5 pesos). Estimo la volatilidad de los últimos 180 días del tipo de cambio (o la deduzco de otra opción) resultando $\sigma = 0.32$

Calculo entonces, en dos meses con $T = 2/12 = 0.1667$

$$x_q = xe^{-qT} = 10500e^{-0.05*0.1667} = 10500 * 0.9917 = 10412$$

Aplico ahora BS,

$$BS(10412, 11000, 0.3, 0.32, 0.1667) = 518.23$$

Para 6 meses, $T = 6/12 = 0.5$.

$$x_q = xe^{-qT} = 10500e^{-0.05*0.5} = 10500 * 0.9753 = 10240$$

Aplico ahora BS,

$$BS(10240, 11000, 0.3, 0.32, 0.5) = 1326.23$$

Opciones americanas.

En la mayoria de los contratos se puede agregar la opción del ejercicio anticipado. Tenemos call americanos, puts americanos, ...

4.12 Opciones americanas de compra

Llamemos τ al momento de ejercicio, que es contingente, y cumple

$$0 \leq \tau \leq T$$

Si $A(x, T)$ es el precio de la opción americana, tenemos

$$A(x, T) \geq BS(x, T)$$

porque el contrato americano incluye la variante europea. La solución de este problema consiste en determinar

- El *valor* de la opción $A(x, T)$
- El *momento óptimo de ejercicio* τ^* de la opción.

De la ausencia de oportunidades de arbitraje se puede demostrar que

$$A(x, T) = \sup_{\tau} E^*(S_\tau - K)^+$$

que es llamado problema de parada óptima. Merton demostró que una opción call americana (sin dividendos), vale lo mismo que la europea, y que el mejor momento para ejercerla es $\tau^* = T$. El resultado es

$$A(x, T) = \sup_{\tau} E^*(S_\tau - K)^+ = E^*(S_T - K)^+ = BS(x, T)$$

Pregunta: ¿Hay paridad put-call para opciones americanas? No, porque los momentos de ejercicio son diferentes.

4.13 Opciones americanas de venta

La valuación de los puts no tiene fórmula cerrada, para calcular el precio hay dos alternativas

1. Resolver numericamente la ecuación en derivadas parciales de valuación,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 H_{xx}(x,t) + rxH_x(x,t) + H_t(x,t) = rH(x,t)$$

   con la condición de frontera

$$H(x,T) \geq (K-x)^+$$

2. Valuarla en un árbol binomial, mediante el procedimiento de inducción para atrás (backward induction).

4.14 Opciones americanas perpetuas

Los perpetuos resultan de suponer que $T = +\infty$. Como permiten un ejercicio ilimitado dan una *cota* del precio de la correspondiente opción americana con T dado, y pueden aproximar el precio si T es grande.

Obsérvese que si T crece, el valor $A(x,T)$ tambien crece.

Las opciones perpetuas admiten soluciones cerradas en muchos casos. Damos un ejemplo (Mc Kean 1965).

Opcion americana perpetua de venta (put)

El precio es

$$A(x,+\infty) = \begin{cases} Cx^{-\alpha} & \text{cuando} \quad x > x^* \\ K - x & \text{cuando} \quad 0 \leq x \leq x^* \end{cases}$$

donde

$$\alpha = \frac{2r}{\sigma^2}$$

y tenemos

$$C = \alpha^\alpha \Big(\frac{K}{1+\alpha}\Big)^{1+\alpha} \qquad x^* = \frac{\alpha K}{1+\alpha}$$

Además, el ejercicio óptimo τ^* viene dado por el primer momento en que S alcanza x^*.

4.15 Otros instrumentos

Con la metodologías presentada, pueden valuarse otros instrumentos derivados, como ser

- Futuros y forwards. El *futuro* es un compromiso a comprar una acción en T a precio K. Su premio es entonces $S_T - K$. Su realización incluye el pago de una parte a la otra cada día, según la evolución de S. Un *forward* es un compromiso igual, pero sin pagos diarios.
- Warrants. Un *warrant* es similar a una opción, pero es emitido por la compania que emite la acción. Su valuación es similar a la de las opciones.
- Swaps. Un *swap* es un compromiso entre dos partes a intercambiar dos flujos de caja, por ejemplo, uno determinístico, y el otro contingente.

Por último, sobre estos contratos se pueden hacer opciones (opción a adquirir un futuro) y algunos admiten variantes americanas.

Bibliografía:

1. F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy. 1973. May/June, pp. 637–657.

2. R. Merton. Continuous Time Finance 1990. Cambridge MA & Oxford UK: Blackwell.

3. J.C. Cox and M Rubinstein. 1985. Option Markets. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.