Esperanza Condicional y Martingalas Ejercicios

En los ejercicios siguientes, cuando no se especifique la filtración se trata de la filtración natural.

1. (a) Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta $p(x, y)$. Determinar una función real y medible $g(x)$ tal que

$$\mathbf{E}(Y \mid X) = g(X).$$

(b) Calcular $\mathbf{E}(Y \mid X)$ cuando (X, Y) es un vector normal con densidad conjunta gaussiana.

2. Consideremos una variable aleatoria X, con distribución discreta, que toma los valores $x_1, x_2 \dots$; y otra variable aleatoria Y, con esperanza $\mathbf{E}\,Y$. Encontrar una función $g(x)$ definida para los valores $x_1, x_2 \dots$ tal que

$$\mathbf{E}(Y \mid X) = g(X).$$

3. *Varianza condicional.* Consideremos una variable aleatoria X definida en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ y $\mathcal{G}$ una sub σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Definimos la *varianza condicional* de X dada $\mathcal{G}$, que designamos $\mathbf{var}(X \mid \mathcal{G})$, mediante

$$\mathbf{var}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}\,X)^2 \mid \mathcal{G}\right).$$

(a) Demostrar la fórmula $\mathbf{var}\,X = \mathbf{var}\,\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) + \mathbf{E}\,\mathbf{var}(X \mid \mathcal{G})$. (b) Consideremos la suma de una cantidad aleatoria de sumandos de la forma

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

donde $N, X_1, \dots, X_K$ son variables aleatorias independientes, $1 \leq N \leq K$, y $X_1, \dots, X_K$ tienen distribución idéntica, con $\mathbf{E}\,X_1 = a$ y $\mathbf{var}\,X_1$ finita. Demostrar, que $\mathbf{var}\,S = a^2\,\mathbf{var}\,N + \mathbf{E}\,N\,\mathbf{var}\,X_1$.

4. Sean X, Y variables aleatorias independientes, con esperanza nula, cada una de las cuales tiene distribución normal. Demostrar que

$$\mathbf{E}\left((X - Y)^2 \mid X^2 + Y^2\right) = \mathbf{E}\left((X - Y)^2 \mid X^2, Y^2\right) = X^2 + Y^2.$$

¿Es válido el mismo resultado cuando las variables X e Y son independientes y simétricas?

5. La esperanza condicional permite definir cadenas de Markov, en espacios de estados no necesariamente numerables. Consideremos una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias, que verifica

$$\mathbf{P}(X_{n+1} \in I \mid X_n, \dots, X_1) = \mathbf{P}(X_{n+1} \in I \mid X_n), \tag{1}$$

para todo $n = 2, 3, \dots$, y todo intervalo $I = [a, b]$. Demostrar, que si las variables aleatorias $\{X_n\}$ toman valores en un conjunto $\mathbf{I}$, finito o numerable, entonces, la definición (1) es equivalente a la defínción usual.

6. *Función característica de una variable de Poisson compuesta.* Consideremos una sucesión $N, X_1, X_2, \dots$ de variables aleatorias independientes, tales que $X_1, X_2, \dots$ son idénticamente distribuídas, la variable aleatoria N tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Demostrar, que la función característica de la variable aleatoria $S = \sum_{k=1}^{N} X_k = X_1 + \cdots + X_N$, está dada por

$$f(t) = \mathbf{E}^{itS} = \exp\big\{\lambda\, \mathbf{E}(e^{itX} - 1)\big\}.$$

7. Consideremos una sucesión $X_1, X_2, \dots$ de variables aleatorias, que verifican $\mathbf{E}\, X_n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$, y tales que existe $\mathbf{E} \exp X_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. (a) Demostrar, que la sucesión $\{\exp(X_1 + \cdots + X_n)\}$ es una submartingala. (b) Encontrar constantes a_n, de forma que $\{\exp(X_1 + \cdots + X_n - a_n)\}$ sea una martingala.

8. *Descomposición de Doob.* Sea $\{Y_n\}$ una submartingala, adaptada a $\{F_n\}$. (a) Demostrar que

$$M_n = Y_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(Y_n - \mathbf{E}(Y_n \mid F_{n-1})\big) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

es una martingala, y que la sucesión $A_n = Y_n - M_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ verifica $0 \le A_1 \le A_2 \le \dots$, siendo la variable A_n medible con respecto a F_{n-1} (se dice que $\{A_n\}$ es previsible). La sucesión $\{A_n\}$ se llama *compensador* de $\{Y_n\}$.

(b) Calcular el compensador de $\{S_n^2\}$, donde $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, cuando $X_1, X_2, \dots$ son variables aleatorias independientes, con esperanzas nulas, y tales que existe $\mathbf{E}\, X_n^2$, para todo $n = 1, 2, \dots$.

9. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ donde $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuídas, con densidad $p(x)$. Consideremos una función $h(x)$, que verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x+y)p(y)dy = h(x) \quad \text{para todo } x \text{ real.} \tag{2}$$

Demostrar (suponiendo que existen $\{\mathbf{E}\, h(S_n)\}$) que $\{h(S_n)\}$ es una martingala. La identidad (2) se llama *ecuación de Wiener–Hopf*.

10. Sean τ y σ tiempos de parada, con respecto de $\{F_n\}$; N un natural positivo. Determinar si son tiempos de parada las variables aleatorias siguientes: (a) $\tau + N$; (b) $\tau - N$; (c) $\max(\tau, \sigma)$; (d) $\min(\tau, \sigma)$; (e) $\tau + \sigma$.

11. Sean $\sigma \leq \tau$ tiempos de parada. Demostrar que $\mathcal{F}_\sigma$ es una σ-álgebra, y que $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$

12. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ donde $\{X_n\}$ son variables aleatorias independientes y equidistribuídas de Bernoulli, con $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_1 = -1) = p$, con $0 < p < 1/2$. Sea

$$\tau_a = \inf\{n \geq 0 \colon S_n = a\}$$

($\tau_a = \infty$ si el conjunto es vacío). Demostrar que

$$\mathbf{P}(\tau_a < \infty) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^a.$$

13. *Desigualdades maximales.* Consideremos una submartingala $\{Y_n\}$. Entonces, para todo $\lambda > 0$, valen la desigualdades

(a) $\lambda\, \mathbf{P}\left(\min_{1 \leq n \leq N} Y_n \leq -\lambda\right) \leq \mathbf{E}\, Y_N^+ - \mathbf{E}\, Y_0.$

(b) $\lambda\, \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} |Y_n| \geq \lambda\right) \leq 3 \max_{1 \leq n \leq N} \mathbf{E}\, |Y_n|.$

14. *Desigualdad maximal para supermartingalas.* Demostrar, que si $\{Y_n\}$ es una supermartingala, vale la desigualdad (b) en el ejercicio anterior.

15. (a) Demostrar, que si $Y_1, Y_2, \dots$ es una supermartingala no negativa (es decir, $Y_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$), entonces existe su límite casi seguro. (b) ¿Existe siempre el límite en media? Demostrar o dar un contraejemplo.

16. *Integrabilidad Uniforme*. Consideremos una sucesión $Y_1, Y_2, \dots$ de variables aleatorias.

(a) Se sabe que si la sucesión $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable, entonces $\sup_n \mathbf{E}\,|Y_n| < \infty$. ¿El recíproco es cierto?.

(b) Supongamos que $Y_n = Y$ $(n = 1, 2, \dots)$. Verificar que $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable, si y solo si, existe $\mathbf{E}\,Y$.

(c) Sabemos, que si existe una variable aleatoria nonegativa Y, con $\mathbf{E}\,Y < \infty$, y tal que $|Y_n| \leq Y$ para todo n, la sucesión es uniformemente integrable. ¿El recíproco es cierto?

(d) Supongamos que $\sup_n \mathbf{E}\,|Y_n|^{1+\delta} \leq L$, donde $\delta > 0$ y L son constantes. Demostrar, que la sucesión $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable. ¿Es cierto el recíproco de esta proposición?

(e) *Criterio de La Vallée Pussin*: Si existe una función $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ monótona creciente, tal que $\text{lím}_{x\to\infty} \Phi(x)/x = \infty$, y $\sup_n \mathbf{E}\,\Phi(|Y_n|) < \infty$, entonces, la sucesión $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable. (El recíproco de esta proposición es cierto[1]: dada $\{Y_n\}$ uniformemente integrable, existe una tal función Φ.)

(f) Sean $Y, Y_1, Y_2, \dots$ no negativas y con esperanzas finitas. Si

$$\mathbf{E}\,Y_n \to \mathbf{E}\,Y,$$

entonces $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable.

Ejercicios para entregar

Funciones características (págs. 134 a 137 de la fotocopia): 3, 10, 11, 14, 16, 18.

Teorema Central del Límite (págs. 149 a 151 de la fotocopia): 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 16.

Martingalas (este repartido): 1, 8, 9, 12, 13, 16.

Fecha límite de entrega: Martes 6 de noviembre.

[1] Ver Dellacherie, C; Meyer, P.A. Probabilities and potential. North Holland: Amsterdam New York, 1978.