Ejercicios de Funciones Caracterísiticas

1. Hallar la función característica de una variable aleatoria: (a) con distribución uniforme en el intervalo $(-\ell, \ell)$; (b) con densidad dada por $p(x) = (1 - \cos x)/(\pi x^2)$.

2. Dada una variable aleatoria X, la variable aleatoria simetrizada, designada X^s, se define mediante la igualdad $X^s = X - Y$, donde Y es una variable aleatoria independiente de X, y con su misma distribución. Demostrar que si X tiene función característica $f(t)$, entonces, X^s tiene función característica $|f(t)|^2$.

3. Consideremos funciones características $f_1(t), \dots, f_n(t)$, y constantes positivas $b_1, \dots, b_n$, que verifican $b_1 + \cdots + b_n = 1$. Demostrar que $b_1 f_1(t) + \cdots + b_n f_n(t)$ es una función característica.

4. Determinar si las siguientes son funciones características: (a) $\operatorname{sen} t$; (b) $\cos t$; (c) $\cos^2 t$; (d) $\operatorname{sen} t + \cos t$; (e) $\left(e^{it} + e^{2it}\right)^3/8$; (f) $\operatorname{Re} f(t)$, donde $f(t)$ es una función característica; (g) $\operatorname{Im} f(t)$ donde $f(t)$ es una función característica.

5. Calcular la varianza $\mathbf{var}\, X$, de una variable aleatoria X, con función característica $f(t) = \left(1 + e^{3it}\right)^2/4$.

6. Utilizando el teorema de unicidad, demostrar: si X e Y son variables aleatorias independientes, con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces $X + Y$ tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

7. (a) Hallar la función característica de una variable aleatoria con distribución Gama, con parámetros (α, β). (b) Demostrar que si $T_1, \dots, T_n$ son variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de parámetro α, entonces, su suma $T_1 + \cdots + T_n$, tiene densidad dada por $p(x) = \alpha^n x^{n-1} e^{-\alpha x}/(n-1)!$.

Ejercicios del Teorema central del límite

1. Al disparar a un blanco, se obtienen 10 puntos con probabilidad 0,3; 9 puntos con probabilidad 0,3; 8 con probabilidad 0,2; 7 con probabilidad 0,1 y 6 con probabilidad 0,1. Utilizando el teorema central del límite, estimar la probabilidad de que, al realizar 100 disparos, se obtengan más de 870 puntos.

2. Se tira un dado 500 veces. Hallar un valor aproximado para la probabilidad de que la suma de puntos obtenidos sea mayor que 1800.

3. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, con esperanza nula. Supongamos que $|X_n| \leq C$ para todo n, donde C es una cierta constante. Sea $B_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{var}\, X_k^2$. Demostrar que si $B_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, entonces, es aplicable el teorema central del límite a esta sucesión, es decir $\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{k=1}^n X_k \leq x\right) \to \Phi(x)$.

4. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, que verifican $\mathbf{P}(X_n = -1/\sqrt{n}) = \mathbf{P}(X_n = 1/\sqrt{n}) = p$, $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$ para todo n, y algún p en el intervalo $0 < p \leq 1/2$. ¿Es aplicable el teorema central del límite a esta sucesión?

5. Sea μ la cantidad de éxitos, en una serie n experimentos independientes, con dos resultados posibles cada uno (éxito y fracaso). Sea p_k la probabilidad de que ocurra un éxito en el k-ésimo experimento, y $q_k = 1 - p_k$, la probabilidad de que ocurra un fracaso $(k = 1, 2, \dots)$. Demostrar que si $\sum_{k=1}^\infty p_k q_k = \infty$, entonces, la función de distribución de la variable aleatoria $(\mu - \sum_{k=1}^n p_k)(\sum_{k=1}^n p_k q_k)^{-1/2}$ (cantidad de éxitos, normalizados), converge a la distribución normal estándar, si $n \to \infty$.

6. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, con esperanza matemática nula. Supongamos que se verifica

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\,|X_k|^3 \leq Bn, \qquad \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\,|X_k|^2 \geq An$$

para todo n, donde A y B son constantes positivas. ¿Es aplicable el teorema central del límite a esta sucesión?

7. Consideremos una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con distribución de Poisson con parámetro 1. Hallar $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\sum_{k=1}^n X_k - n\Big) \leq x\right)$. para todo $x > 0$.

8. Demostrar la fórmula

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) \ (x \to \infty). \tag{1}$$

(Sugerencia: Utilizar la identidad $\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt = \int_x^\infty \frac{1}{t} d\big(e^{-t^2/2}\big)$ e integrar por partes.)

9. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con esperanza nula y varianza $\sigma^2 > 0$. Designemos $F_n(x) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n X_k \leq x\right)$. Demostrar que si se verifica

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

para todo x real, y todo n natural, donde C es una constante positiva, entonces, para $0 < \varepsilon < 1$, se verifica

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

uniformemente, en el conjunto $0 \leq x \leq (1 - \varepsilon)\sqrt{\ln n}$. (Sugerencia: utilizar la fórmula (1).)