

INTRODUCCIÓN A LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS 2010. EJERCICIOS DE MARTINGALAS

Esperanza condicional

1. *Varianza condicional.* Consideremos una variable aleatoria X , y otra variable aleatoria Y con varianza $\mathbf{var}Y$. Definimos la *varianza condicional* de Y dada X , que designamos $\mathbf{var}(Y | X)$, mediante

$$\mathbf{var}(Y | X) = \mathbf{E}((Y - \mathbf{E}Y)^2 | X).$$

Demostrar la fórmula $\mathbf{var}Y = \mathbf{var}\mathbf{E}(Y | X) + \mathbf{E}\mathbf{var}(Y | X)$.

2. Sean N, X_1, \dots, X_K variables aleatorias independientes, tales que X_1, \dots, X_K son idénticamente distribuidas y existe $\mathbf{E}X_1 = a$. Supongamos además que la variable aleatoria N tiene distribución discreta, y toma una cantidad finita de valores $k = 1, \dots, K$. Se define la variable aleatoria

$$S = \sum_{k=1}^N X_k = X_1 + \dots + X_N, \tag{1}$$

que es la suma de una cantidad aleatoria de sumandos. (a) Demostrar que $\mathbf{E}(S | N) = aN$, y concluir que $\mathbf{E}S = \mathbf{E}X_1 \mathbf{E}N$. (b) Si existe $\mathbf{var}X_1$, demostrar que $\mathbf{var}S = a^2 \mathbf{var}N + \mathbf{E}N \mathbf{var}X_1$.

3. Sean X, Y variables aleatorias independientes con igual distribución y esperanza finita. Demostrar

$$\mathbf{E}(X | X + Y) = \mathbf{E}(Y | X + Y) = \frac{X + Y}{2}.$$

4. Sea $\{X_1, X_2, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con igual distribución y esperanza finita. Demostrar que

$$\mathbf{E}(X_1 | S_n, S_{n+1}, \dots) = \frac{S_n}{n},$$

donde $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Martingalas

1. Demostrar las propiedades 3,4,5 y 6 de la página 8 de las notas.
2. Demostrar que la variable aleatoria definida en el **Ejemplo básico** de la página 12 es un tiempo de parada.
3. Sean τ y σ tiempos de parada en un espacio con filtración, y N un natural positivo. Determinar si son tiempos de parada las variables aleatorias siguientes: (a) $\tau + N$; (b) $\tau - N$; (c) $\max(\tau, \sigma)$; (d) $\min(\tau, \sigma)$; (e) $\tau + \sigma$.
4. *Integrabilidad Uniforme.* Consideremos una sucesión Y_0, Y_1, \dots de variables aleatorias.
 - (a) Se sabe que si la sucesión $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable, entonces $\sup_n \mathbf{E}|Y_n| < \infty$. ¿El recíproco es cierto?.
 - (b) Supongamos que $Y_n = Y$ ($n = 0, 1, \dots$). Verificar que $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable si y solo si existe $\mathbf{E}Y$.

- (c) Sabemos que si existe una variable aleatoria no negativa Y , con $\mathbf{E}Y < \infty$, y tal que $|Y_n| \leq Y$ para todo n , la sucesión $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable. ¿El recíproco es cierto?
- (d) Supongamos que $\sup_n \mathbf{E}|Y_n|^{1+\delta} \leq L$, donde $\delta > 0$ y L son constantes. Demostrar que la sucesión $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable. ¿Es cierto el recíproco de esta proposición?
- (e) *Criterio de La Vallée Pousin*: Si existe una función $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monótona creciente, tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x)/x = \infty$, y $\sup_n \mathbf{E}\Phi(|Y_n|) < \infty$, entonces, la sucesión $\{Y_n\}$ es uniformemente integrable. (El recíproco de esta proposición es cierto¹: dada $\{Y_n\}$ uniformemente integrable, existe una tal función Φ .)
5. Consideremos una variable aleatoria Z con esperanza $\mathbf{E}Z$ y definamos $Y_n = \mathbf{E}(Z | \mathcal{F}_n)$ ($n = 0, 1, \dots$), donde $\{\mathcal{F}_n\}$ es una filtración. Demostrar que $\{Y_n\}$ es una martingala, que converge casi seguramente, y en media.
6. Consideremos el espacio de sucesos elementales $\Omega = (0, 1]$, la σ -álgebra de Borel \mathcal{B} , junto con \mathbf{P} la medida de Lebesgue en Ω . Sea Z una variable aleatoria con esperanza matemática definida en este espacio de probabilidad. Para cada $n = 0, 1, \dots$ introducimos la variable aleatoria

$$X_n(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n-1} k \mathbf{1}_{\{k2^{-n} < \omega \leq (k+1)2^{-n}\}},$$

y los vectores $F_n = (X_0, \dots, X_n)$ ($n = 0, 1, \dots$). Calcular $Y_n = \mathbf{E}(Z | F_n)$ para $n = 0, 1, \dots$ (a) ¿Existe el límite casi seguro de $\{Y_n\}$?; (b) ¿y el límite en media?

¹Ver Dellacherie, C; Meyer, P.A. Probabilities and potential. North Holland: Amsterdam New York, 1978.