Centro de Matemática. SOLUCIONES 18 de agosto de 2006

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1.
(a) La variable aleatoria $Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $\quad (n = 1, 2, \dots)$. tiene distribución exponencial de parámetro na, y distribución

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-nax}, & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

(b) $Z_n = \frac{Y_n}{\mathbf{E}(Y_n)}$ tiene distribución exponencial de parámetro 1.
(c) $\mathbf{v}\mathrm{ar}(Z_n) = 1$.

Ejercicio 2. Como $\sum \mathbf{P}(Y_n \neq 0) < \infty$, por Borel-Cantelli $Y_n = 0$ a partir de un cierto $n(\omega)$, casi seguramente. Entonces, a partir de ese $n(\omega)$ tenemos $X_n + Y_n = X_n$, que converge casi seguramente a X.

Ejercicio 3.
(a) La cadena es irreducible y aperiódica.
(b) Resolviendo $\pi P = \pi$ se obtiene la distribución estacionaria $\pi = (4/9, 1/3, 2/9)$, de donde la matriz límite es

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 4/9 & 1/3 & 2/9 \\ 4/9 & 1/3 & 2/9 \\ 4/9 & 1/3 & 2/9 \end{bmatrix}$$

(c) La distribución límite no depende de la distribución inicial y es

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = E_1) = 4/9.$$