Centro de Matemática. 13 de diciembre de 2006

Introduccón a la Probabilidad y Estadística - Soluciones

Ejercicio 1.

(a) F es la distribución, p es la densidad:

$$F_\rho(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \leq r \\ (r/R)^2 & \text{si } 0 \leq r < R \\ 0 & \text{si } r < 0, \end{cases} \qquad p_\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } R \leq r \\ 2r/R^2 & \text{si } 0 \leq r < R \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

$$F_\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2\pi \leq t \\ t/(2\pi) & \text{si } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t < 0, \end{cases} \qquad p_\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2\pi \leq t \\ 1/(2\pi) & \text{si } 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(b) $\mathbf{E}(\rho) = R^2/2, \quad \mathbf{v}\text{ar}(\rho) = R^2/(18)$.

(c) $\mathbf{P}(\rho \leq r, \phi \leq t) = (t/2\pi) \times (r/R)^2 = \mathbf{P}(\rho \leq r)\,\mathbf{P}(\phi \leq t)$ luego ρ y ϕ son independientes.

Ejercicio 2.

(a) $\mathbf{E}\,Y_n = 2^{-(n-1)}$, $\mathbf{v}\text{ar}(Y_n) = 9/4^n$, $\mathbf{E}\,T_n = 2(1-2^{-n})$, $\mathbf{v}\text{ar}(T_n) = 3(1-4^{-n})$, $\mathbf{E}\,A_n = 2(1-2^{-n})/n, \mathbf{v}\text{ar}(A_n) = 3(1-4^{-n})/n^2$.

(b) $P(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon 2^n}\,\mathbf{E}\,|X_1| \to 0$, luego $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

(c) $P(|Y_n| \geq \frac{1}{n^2}) \leq \frac{n^2}{2^n}\,\mathbf{E}\,|X_1|$, por Borel Cantelli T_n converge casi seguramente a $T = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$. (Y por lo tanto en probabilidad al mismo límite.)

(d) $\frac{T_n}{n} \to 0$ $c.s.$ dado que $T_n \to T$ $c.s.$ y $1/n \to 0$.

Ejercicio 3.

(a)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

(La matriz puede permutar filas y/o columnas dependiendo de la numeración de las nueve casillas)

(b) La cadena es aperiódica e irreducible.

(c) Buscamos $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9)$. Por simetría tenemos $x = \pi_1 = \pi_3 = \pi_5 = \pi_7 = \pi_9$, $y = \pi_2 = \pi_4 = \pi_6 = \pi_8$, $z = \pi_5$. Eligiendo convenientemente tres ecuaciones de $\pi = \pi \times P$ resulta $x = 3/40, y = 1/8, z = 1/5$.

(d) Es $4x = 3/10$.