Facultad de Ciencias
Centro de Matemática 26 de julio del 2000

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

1. Sea $\xi_1, \xi_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes, con $E(\xi_n) = 0$ y $|\xi_n| \leq C$, $n = 1, 2, \ldots$, donde C es una cierta constante. Sea también $\eta_1, \eta_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes, tal que

$$P(\eta_n \neq 0) \leq \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Probar que si

$$S_n = (\xi_1 + \eta_1) + (\xi_2 + \eta_2) + \cdots + (\xi_n + \eta_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

entonces, casi seguramente:

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

2. (a) *En esta parte se enuncia un resultado que será utilizado en las partes siguientes. Se recomienda utilizarlo y dejar la demostración para el final.*

Sea $\{q_n\}_{n \in N}$ una sucesión de números reales, $0 < q_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ y

$$Q_n = (1 - q_1)(1 - q_2) \ldots (1 - q_n) = \prod_{j=1}^{n} (1 - q_j).$$

Es obvio que $\{Q_n\}_{n=1,2,\ldots}$ es decreciente. Sea $Q = \lim Q_n$. Probar que

$$Q > 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q_n \text{ converge}.$$

(b) Se considera una cadena de Markov estacionaria cuyos estados son $\{1, 2, \ldots\}$, los números naturales positivos, y tal que:

$$\begin{aligned} p_{j,1} &= q_j \\ p_{j,j+1} &= 1 - q_j \end{aligned}$$

donde los números q_j verifican $0 < q_j < 1$. Es decir que la matriz de Markov es

$$P = \begin{pmatrix} q_1 & 1-q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_2 & 0 & 1-q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ q_3 & 0 & 0 & 1-q_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Mostrar que la cadena es irreducible y aperiódica.

(c) Mostrar que todos los estados son transitorios si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty.$$

(Sugerencia: calcular la probabilidad π_n de no volver al estado "1" en n pasos, dado que se parte del estado "1").

(d) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$. Probar que si definimos

$$\begin{aligned} f &= q_1 + q_2(1-q_1) + q_3(1-q_1)(1-q_2) + \dots \\ &= q_1 + \sum_{n=2}^{\infty} q_n(1-q_1)\dots(1-q_{n-1}) \end{aligned}$$

entonces $f = 1$. Sugerencia: interpretar el significado probabilístico de f y aplicar (c).

(e) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$. Mostrar que la cadena es ergódica si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-q_1)\dots(1-q_n) < \infty$$

y, en ese caso, dar una expresión para el tiempo medio de retorno a cada estado.

(f) Mostrar que si

$$q_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

entonces la cadena es ergódica si y sólo si $0 < \alpha < 1$.