Centro de Matemática. 5 de marzo de 2002

Exámen de Introducción a la probabilidad y estadística

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$, es decir, $\mathbf{P}(Z = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ $(n = 0, 1, \dots)$.

(a) Calcular $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{E}Z^2$, $\mathbf{var}Z$.

(b) Calcular $R(t) = \mathbf{E}e^{tZ}$ (t real).

(c) Asumiendo que $R'(t) = \mathbf{E}Ze^{tZ}$, $R''(t) = \mathbf{E}Z^2e^{tZ}$, calcular $\mathbf{E}Z$ y $\mathbf{E}Z^2$ usando (b).

(d) Demostrar que $\mathbf{P}(Z$ sea impar$) < \mathbf{P}(Z$ sea par$)$ (el cero se considera par).

Ejercicio 2. Sean X, Y, Z tres variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuídas.

(a) Demostrar que $\mathbf{P}(X < Y < Z) = \mathbf{P}(Y < X < Z)$.

(b) Calcular $\mathbf{P}(X < Y < Z)$.

(c) Calcular $\mathbf{P}(\min(X, Y) < Z)$.

(d) Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes, e idénticamente distribuídas. Hallar $\mathbf{P}(X_1 < \cdots < X_n)$.

(e) Sea $n = 2k$ en (d). Calcular $\mathbf{P}(X_1 < X_3 < \cdots < X_{2k-1}, X_2 > X_4 > \cdots > X_{2k})$.

Ejercicio 3. Sea $X_0, X_1, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas, con $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{var}X_1 = \sigma^2 \in (0, \infty)$.

(a) Sea $Y_k = (X_{k-1} + X_k + X_{k+1})/3$ $(k = 1, 2, \dots)$. ¿Es aplicable la ley débil de los grandes números a $\{Y_k\}$?

(b) Supongamos que $X_1 \geq 0$, y sea $Z_n = \sqrt{X_1 \cdots X_n} = \left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)^{1/n}$.

(i) Si X_1 tiene distribución uniforme en $[1, 2]$, demostrar que $Z_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a$, con a que se determinará.

(ii) Si $\mathbf{P}(X_1 = 0) > 0$, demostrar que $Z_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. (Sugerencia: demostrar $\mathbf{P}(Z_n > 0) \to 0$).

(iii) ¿Hay convergencia casi segura en (i) y (ii)?