Facultad de Ciencias.
Centro de Matemática.

17 de julio de 2002

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

1. Sean $X_1, \dots X_n$ variables independientes, con distribución exponencial de parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente.
   (a) Mostrar que $Y = \min_{1 \le i \le n} X_i$ tiene distribución exponencial.
   (b) Calcular $\mathrm{P}(X_k < \min_{i \neq k} X_i)$ y deducir que
   $$\mathrm{P}(X_k = \min_{1 \le i \le n} X_i) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

2. Sean $\{X_n : n \geq 1\}$ variables aleatorias independientes, igualmente distribuidas, uniformes en [-1,1].
   (a) Sea $Z_n = \frac{1}{n^{1+\delta}} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} X_i$, $\delta > 0$. Mostrar que Z_n converge en probabilidad a cero.
   (b) Mostrar que Z_n converge a cero casi seguramente.
   (c) ¿Qué ocurre con $W_n = \frac{1}{n \log n} \sum_{i=1}^n \sqrt{i} X_i$?

3. Sea una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2, 3\}$, distribución inicial $\mathrm{P}(X_0 = i_0) = 1$ ($i_0 = 1, 2$ o 3) y matriz de transición
   $$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
   (a) Calcular $\mathrm{P}(X_3 = 2 | X_1 = 1)$ y hallar la distribución estacionaria.
   (b) Para cada $i \in E$ construir una partición del intervalo [0,1],
   $\{I_1(i), I_2(i), I_3(i)\}$ $i = 1, 2, 3$,
   de modo que si definimos $\varphi : E \times \mathbb{R} \to E$:
   $$\varphi(i, u) = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{I}_{I_j(i)}(u) j$$
   (o sea $\varphi(i, u) = j$ sii $u \in I_j(i)$), y si U es una variable uniforme en [0,1] se cumpla que:
   $$\mathrm{P}(\varphi(i, U) = j) = p_{ij}.$$
   (c) Sea $\{U_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias uniformes en [0,1], independientes. Si definimos $X_0 = i_0$ y
   $$X_n = \varphi(X_{n-1}, U_n) \text{ para } n \geq 1,$$
   mostrar que $\{X_n : n \geq 0\}$ es una cadena de Markov homogénea con matriz de transición P, y distribución inicial dada por $\mathrm{P}(X_o = i_o) = 1$.