Centro de Matemática. 7 de febrero de 2002

Exámen de Introducción a la probabilidad y estadísitica

Ejercicio 1. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $Xn \geq 0$ y $X_n \leq X_{n+1}$ para todo n natural.

a) Demostrar que si $X_n \to^{\mathbf{P}} X$ entonces $X_n \to X$ *c.s.*

b) Demostrar que si para todo $H > 0$ tenemos $\mathbf{P}(X_n > H) \to 1$ (es decir, $X_n \to^{\mathbf{P}} \infty$) entonces $\mathbf{P}(X_n \to \infty) = 1$.

c) Sean $\{Y_n\}$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$. Sea

$$M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n), \qquad m_n = \min(Y_1, \dots, Y_n).$$

(i) Estudiar la convergencia casi segura (y en probabilidad) de $\{M_n\}$. (ii) Estudiar la convergencia casi segura (y en probabilidad) de $\{m_n\}$.

d) Estudiar la convergencia en media de $\{m_n\}$.

Ejercicio 2. Se considera la función real de dos variables dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-x}/x, & \text{si } -x \leq y \leq x, x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Dibujar el conjunto de $\mathbf{R}^2$ en donde f es positiva y hallar k para que $f(x,y)$ sea la densidad de un vector aleatorio (X,Y).

b) Hallar la función de distribución de la variable aleatoria X.

c) Calcular la probabilidad condicional

$$\mathbf{P}(1Y| \leq a \mid X \leq a).$$

d) Hallar $\mathbf{E}(XY)$.

e) Calcular $\mathbf{P}(Y \leq X^2)$.

Ejercicio 3. Sea $X_1, X_2 \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común de Bernoulli dada por $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_1 = -1) = q$, $p + q = 1$, $0 < p < 1$.

a) Demostrar que $S_0, S_1, \dots$ es una cadena de Markov, determinar su distribución inicial y su matriz de transición.

b) Aplicando la desigualdad de Chebishev, demostrar que

$$\frac{S_n}{n} \to^{\mathbf{P}} 0.$$

c) Sea $\alpha(j) = \mathbf{P}(\exists n \colon S_n = j)$ donde j es un natural. Condicionando según el valor que tome S_1 demostrar la fórmula

$$\alpha(j) = p\alpha(j-1) + q\alpha(j+1).$$

d) Hallar r para que $\alpha(j) = r^j$ sea solución de la ecuación anterior (se obtienen dos valores).

e) Observando que $\alpha(0) = 1$, y asumiendo que $p < q$ calcular $\alpha(j)$. (Asumir $\alpha(j) \to 0$ si $j \to \infty$).