

Exámen de Introducción a la probabilidad y estadística

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$.

- Hallar la densidad y la distribución de la variable aleatoria $Z = e^X - 1$.
- Discutir para que valores de $p \geq 0$ real es finito $\mathbf{E}|Z|^p$.
- Hallar la distribución de la variable aleatoria $\min(Z_1, Z_2)$, donde Z_1 y Z_2 son variables aleatorias independientes con la distribución de Z .
- Demostrar la fórmula, para $u \geq 0, v \geq 0$,

$$\mathbf{P}(Z \geq uv + u + v) = \mathbf{P}(Z \geq u)\mathbf{P}(Z \geq v).$$

Ejercicio 2. Sea X, X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, con $\mathbf{E}X^2 < \infty, \mathbf{E}(X_k)^2 < \infty$.

- Para una sucesión de sucesos A_1, A_2, \dots demostrar

$$\mathbf{P}(\cap_k A_k) = 1 \iff \mathbf{P}(A_k) = 1 \text{ para todo } k \geq 1.$$

- Usando a) demostrar que

$$\mathbf{P}(\lim_n X_n = X) = 1 \iff \mathbf{P}\left(\cap_{n \geq 1} \cup_{m \geq n} |X_m - X| < \frac{1}{k}\right) = 1.$$

- Probar que si $\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}|X_m - X|^2 < \infty$ entonces $\mathbf{P}(\lim_n X_n = X) = 1$.
- Aplicación: Sea $\mathbf{E}X_n = \mu, |\text{cov}(X_k, X_l)| \leq \frac{1}{k^2 l^2}$ ($k, l = 1, 2, \dots$). Demostrar que

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mu \text{ c.s.}$$

Ejercicio 3. a) Calcular la probabilidad de obtener un boleto capicúa. Sugerencia: utilizar un argumento de simetría para contar los casos favorables.

- Calcular la probabilidad de que un número natural k elegido al azar, que cumple $0 \leq k \leq 10^n - 1$ sea capicúa.

c) Se elige al azar un número entre 0 y 999. Calcular la probabilidad de que la suma de sus tres cifras sea 3. Sugerencias: (1) Sea $f(x) = 1 + x + \dots + x^9$. Observar que los coeficientes a_k de

$$f(x)^3 = \sum_{k=0}^{27} a_k x^k$$

están relacionados con la cantidad de casos favorables. (2) Enumerar los casos posibles.

- Escribir una fórmula para calcular la probabilidad de obtener un boleto que sume 21 (utilizar la sugerencia (1)).