Centro de Matemática. 20 de agosto de 2004

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1.

(a) Durante el mes de noviembre la probabilidad de lluvia es de 0,3. Un equipo gana, en ese mes, un partido con probabilidad 0,4 cuando llueve, y con probabilidad 0,5 cuando no llueve. Sabiendo que el equipo ganó un partido en noviembre, calcular la probabilidad de que haya llovido en ese día.

(b) La probabilidad de que Romeo le escriba una carta a Julieta es 0,8. La probabilidad de que el correo no la pierda es de 0,9. La probabilidad de que el cartero la entregue es también de 0,9. Calcular la probabilidad condicional de que Romeo no haya escrito una carta, dado que Julieta no la recibió.

Ejercicio 2.

(a) Se elige al azar un punto en el intervalo $[0, 2\pi]$. Calcular la distribución de la distancia del punto al extremo más cercano.

(b) Calcular la probabilidad de que tres puntos elegidos al azar en una circunferencia conformen un triángulo obtusángulo (es decir, con un ángulo obtuso).

(c) Se eligen dos parejas de puntos al azar en una circunferencia. Calcular la probabilidad de que las cuerdas que determinan ambas parejas se corten.

(d) Se eligen ahora, también al azar, n puntos en una circunferencia. Demostrar que la distancia al origen del baricentro (es decir, el punto cuyas coordenadas son los promedios de las coordenadas de los puntos elegidos) tiende a cero casi seguramente.

Ejercicio 3. Un sistema evoluciona con el paso del tiempo ($n = 0, 1, 2, \dots$) entre dos estados E_1 y E_2. Designamos mediante X_n el estado del sistema en el instante n. La evolución está regida por una cadena de Markov (no homogénea) caracterizada por

(i) Desde un instante de tiempo *par* al siguiente, las probabilidades de transición estan dadas por

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(ii) Desde un instante de tiempo *impar* las probabilidades de transición estan dadas por

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcular $P(X_4 = E_1 \mid X_2 = E_1)$.

(b) Mostrar que las sucesiones $\{X_{2n}\}_{n=0,1,\dots}$ y $\{X_{2n+1}\}_{n=0,1,\dots}$ son cadenas de Markov estacionarias y calcular sus matrices de transición.

(c) Describir el comportamiento asintótico de $\{X_n\}$.