

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1.

- (a) Se tiran un dado cargado y uno equilibrado. Calcular la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 7.
- (b) Un avión bimotor puede volar con un solo motor, y un cuadrimotor con 2. La probabilidad de que un motor falle durante una travesía es p . ¿Cuales aviones son mas seguros? (Discutir según p).
- (c) En un tablero de ajedrez con casillas de lado a se tira una moneda de radio r ($2r < a$). Calcular la probabilidad de que: (i) la moneda caiga en el interior de una casilla; (ii) la moneda corte un único lado.
- (d) Se elige ahora al azar una esfera de radio r dentro de un cubo de lado $4r$, en un espacio de dimensión n . (i) Calcular la probabilidad $p(n)$ de que la esfera no corte el cubo. (ii) Determinar la cantidad $N(n)$ de esferas que es necesario elegir, para que la probabilidad de que por lo menos una esfera no corte el cubo sea asintóticamente $1/2$.

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria con distribución de Bernoulli con parámetro $p \in (0, 1)$, es decir, $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$. Sean Y, Z variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$, y tales que X, Y, Z son variables aleatorias independientes. Se considera

$$W = \begin{cases} \min(Y, Z), & \text{si } X = 0, \\ \max(Y, Z), & \text{si } X = 1. \end{cases}$$

- (a) Hallar la función de distribución y la densidad de W (en función del parámetro p).
- (b) Hallar el valor de p de forma que $E(W) = 4/9$.
- (c) Hallar el valor de p de tal forma que la variable aleatoria W tenga distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.
- (d) Calcular $P(X = 1 \mid W \leq 1/2)$, para el valor de p calculado en la parte (b).

Ejercicio 3. Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes, tales que $P(X_n = 1) = p_n$, $P(X_n = 0) = 1 - p_n = q_n$, para $n = 1, 2, \dots$. Sea $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- (a) Hallar una sucesión de constantes a_1, a_2, \dots , de forma que $S_n/n - a_n \rightarrow 0$ en probabilidad.
- (b) Establecer si la convergencia de la parte anterior es casi segura.
- (c) Establecer si la convergencia anterior tiene lugar en media cuadrática, es decir, si $E(S_n/n - a_n)^2 \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.
- (d) Demostrar que es aplicable el teorema central del límite para la sucesión $\{X_n\}$, bajo la condición $\sum_{k=1}^n p_k q_k \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).