

Exámen de Introducción a la probabilidad y estadística

Ejercicio 1. Sea $a_1, \dots, a_n$ una serie de n letras. Queremos calcular la probabilidad $P(n)$ de que al reordenarlas al azar ninguna regrese a la posición que ocupaba inicialmente.

- a) Determinar la cantidad de casos posibles.
- b) Sea $\Pi(n)$ la cantidad de casos favorables. Hallar $\Pi(1)$, $\Pi(2)$ y $\Pi(3)$ así como $P(1)$, $P(2)$ y $P(3)$.
- c) Demostrar la fórmula

$$\Pi(n) = (n-1)[\Pi(n-1) + \Pi(n-2)].$$

Sugerencia: Contar las permutaciones favorables que comienzan con a_k ($k \neq 1$) discutiendo según a_1 caiga en el lugar k -ésimo o no.

- d) Demostrar $\Pi(n) - n\Pi(n-1) = (-1)^n$ ($n \geq 2$).
- e) Demostrar

$$P(n) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

f) Un jugador baraja una grupo de doce cartas españolas, numeradas del as al rey. Las levanta consecutivamente, diciendo *uno* cuando levanta la primer carta, *dos* cuando hace lo mismo con la segunda y así sucesivamente. Gana si la carta levantada coincide con la palabra dicha en algún caso (por ejemplo si la cuarta carta levantada es el cuatro). ¿Apostaría que el jugador gana o pierde? Fundamente.

Ejercicio 2. Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes dos a dos, y tales que $\mathbf{E}X_n = a_n$, y $\text{var}X_n = \sigma_n \leq C$ para todo $n = 1, 2, \dots$. Se considera la sucesión $Y_n = aX_{n-1} + bX_n + cX_{n+1}$ ($n \geq 2$).

- a) Calcular $\mathbf{E}Y_n$, $\text{var}Y_n$ y $\text{cov}(Y_n, Y_{n+k})$ para $n \geq 2$, $k \geq 1$.
- b) Determinar si es aplicable la ley débil de los grandes números, es decir, si existe una sucesión numérica k_n tal que

$$\frac{Y_2 + \dots + Y_{n+1}}{n} - k_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

- c) Supongamos que $\mathbf{E}X_n = \alpha$ para todo n . Hallar una constante k tal que

$$\frac{Y_2 + \dots + Y_{n+1}}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} k.$$

Ejercicio 3. Sean T_1 y T_2 variables aleatorias independientes con distribución exponencial con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Sea $T = \min(X_1, X_2)$ y $S = \max(S_1, S_2)$. X es el índice de la variable que resulta menor, es decir,

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si } T_1 \leq T_2, \\ 2, & \text{si } T_2 < T_1, \end{cases}$$

- a) Hallar la distribución de X y calcular $\mathbf{E}X$.
- b) Mostrar que T tiene distribución exponencial de parámetro a determinar. Calcular $\mathbf{E}T$ y $\text{var}T$.
- c) Hallar la función de distribución de S .
- d) Determinar si S y T son independientes.
- e) Determinar si X y T son independientes.