Centro de Matemática. 17 de mayo de 2005

Examen de Introdución a la Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1.

(a) Sean X, Y variables aleatorias. Demostrar que dado $t \in [0,1]$

$$\mathbf{P}(|X+Y| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(|X| \geq t\varepsilon) + \mathbf{P}(|Y| \geq (1-t)\varepsilon)$$

(b) Aplicando la parte anterior, demostrar que el límite en probabilidad de una sucesión $\{X_n\}$ es único, es decir, si $X_n \to X$ en probabilidad, e $X_n \to Y$ en probabilidad, entonces $\mathbf{P}(X \neq Y) = 0$.

(c) Supongamos ahora que $X_n \to X$ en probabilidad y que $Y_n \to Y$ casi seguramente. Demostrar o dar un contraejemplo: (i) $\{X_n + Y_n\}$ converge en probabilidad a $X+Y$; (ii) $\{X_n + Y_n\}$ converge casi seguramente a $X+Y$.

(d) Demostrar, aplicando (a) y hallando el mínimo de una función de t que se determinará, que si $\mathbf{E}\,|X|$ y $\mathbf{E}\,|Y|$ son finitos,

$$\mathbf{P}(|X+Y| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\big(\mathbf{E}\,|X| + \mathbf{E}\,|Y| + 2\sqrt{\mathbf{E}\,|X|\,\mathbf{E}\,|Y|}\big)$$

Ejercicio 2.

(a) Se considera una sucesión $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ de variables aleatorias independientes, con las siguientes distribuciones:

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-2}, \qquad \mathbf{P}(X_n = n^2) = P(X_n = -n^2) = n^{-2}/2$$

Probar que vale la ley fuerte de los grandes números:

$$\mathbf{P}\left((X_1 + \ldots + X_n)/n \to 0\right) = 1.$$

(Sugerencia: utilizar el Lema de Borel-Cantelli).

(b) Si en lugar de la distribución indicada en (a), se tiene

$$\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n \qquad \mathbf{P}(X_n = n^2) = \mathbf{P}(X_n = -n^2) = 1/(2n)$$

¿ qué se puede concluir sobre el comportamiento de $(X_1 + \ldots + X_n)/n$ cuando $n \to +\infty$?

Ejercicio 3. Un sistema evoluciona de manera markoviana con el paso del tiempo $t = 0, 1, 2, \ldots$ entre dos estados E_1 y E_2. X_t es el estado del sistema en el instante t. Las leyes de transición son las siguientes, donde indicamos en el lugar (i,j) de cada matriz de 2×2, las probabilidades de transición del estado E_i al estado E_j y a es una constante, $0 < a < 1$:

De un instante par al siguiente: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 1-a \end{bmatrix}$

De un instante impar al siguiente: $\begin{bmatrix} 1-a & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Calcular

$$\mathbf{P}\left(X_4 = E_1 \mid X_2 = E_2\right)$$

(b) Mostrar que $\{X_{2n}\}_{n=0,1,2,\ldots}, \{X_{2n+1}\}_{n=0,1,2,\ldots}$ son dos cadenas de Markov estacionarias, calcular sus matrices de transición y su comportamiento asintótico.