

**Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística**

**Ejercicio 1.** De 12 cartas numeradas se eligen (sin reposición) tres.

- (a) Calcular la probabilidad de obtener exactamente un as.
- (b) Calcular la probabilidad de que el máximo valor obtenido sea 6.
- (c) ¿Cuál es el valor más probable para el máximo?
- (d) Calcular el valor esperado del número máximo obtenido.

**Ejercicio 2.**

- (a) Calcular  $\mathbf{E} e^X$  cuando  $X$  es una variable aleatoria normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ .
- (b) Utilizando la desigualdad de Chebishev, demostrar que para cualquier variable aleatoria  $X$  se verifica

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq e^{-a} \mathbf{E} e^X.$$

- (c) Si  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes gaussianas centradas con varianza uno, demostrar que

$$\mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \geq n) \leq \exp(-n/2).$$

Concluir que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \leq 1 \quad c.s.$$

**Ejercicio 3.** Se consideran dos variables aleatorias  $X, Y$  independientes, con distribución uniforme en  $[0, 1]$ . Sea  $Z = Y/X$ .

- (a) Calcular la distribución y la densidad de  $Z$ .
- (b) Determinar si  $\mathbf{E} Z$  existe, y en caso afirmativo calcularlo.
- (c) Calcular la probabilidad  $\mathbf{p}$  de que el natural más cercano a  $Z$  sea un número par (incluyendo el cero entre los pares).
- (d) ¿Es  $\mathbf{p} > 1/2$ ?