

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1. De 12 cartas numeradas se eligen (sin reposición) tres.

- (a) Calcular la probabilidad de obtener exactamente un as.
- (b) Calcular la probabilidad de que el máximo valor obtenido sea 6.
- (c) ¿Cuál es el valor más probable para el máximo?
- (d) Calcular el valor esperado del número máximo obtenido.

Ejercicio 2.

- (a) Calcular $\mathbf{E} e^X$ cuando X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2 .
- (b) Utilizando la desigualdad de Chebishev, demostrar que para cualquier variable aleatoria X se verifica

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq e^{-a} \mathbf{E} e^X.$$

- (c) Si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes gaussianas centradas con varianza uno, demostrar que

$$\mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \geq n) \leq \exp(-n/2).$$

Concluir que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \leq 1 \quad c.s.$$

Ejercicio 3. Se consideran dos variables aleatorias X, Y independientes, con distribución uniforme en $[0, 1]$. Sea $Z = Y/X$.

- (a) Calcular la distribución y la densidad de Z .
- (b) Determinar si $\mathbf{E} Z$ existe, y en caso afirmativo calcularlo.
- (c) Calcular la probabilidad \mathbf{p} de que el natural más cercano a Z sea un número par (incluyendo el cero entre los pares).
- (d) ¿Es $\mathbf{p} > 1/2$?