Centro de Matemática. 6 de febrero de 2006

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1.

(a) En un tablero de ajedrez se colocan al azar dos torres, una negra y una blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que no se ataquen?[1].

(b) Dos personas llegan a un mismo punto de encuentro en momentos independientes y elegidos al azar en un intervalo $[0, T]$. Cada persona decide esperar a la otra un intervalo de tiempo $\Delta < T$. Calcular la probabilidad de que se encuentren.

Ejercicio 2.

(a) Sean X, Y variables aleatorias independientes con idéntica densidad dada por

$$p(x) = \frac{a}{e^{-x} + e^{x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determinar el valor de a, y calcular $\mathbf{E}(X+Y)$ y $\mathbf{E}(XY)$.

(b) Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Sea N el primer índice tal que la suma $\sum_{n=1}^{N} X_n > 1$. Calcular $\mathbf{P}(N = 2)$ y $\mathbf{P}(N = 3)$.

Ejercicio 3. Se considera una variable aleatoria X acotada, es decir, tal que existe K positivo con $\mathbf{P}(|X| \leq K) = 1$.

(a) Demostrar que $\mathbf{E}\, e^{\lambda X}$ es finito para todo λ real.

(b) Demostrar que para todo $\lambda > 0$ se verifica la desigualdad

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}\, e^{\lambda X}}{e^{\lambda a}}.$$

(c) Sean ahora $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes, acotadas, con la misma distribución. Encontrar una cota de la forma anterior para la suma $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ en función de $\mathbf{E}\, e^{\lambda X_1}$.

(d) Supongamos además de los supuestos de (c) que X_1 tiene distribución de Bernoulli con parámetro $p \in (0, 1)$, es decir $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - p$. Demostrar que

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-nH(a)}$$

donde

$$H(a) = a \log\left(\frac{a}{p}\right) + (1-a) \log\left(\frac{1-a}{1-p}\right).$$

(Sugerencia: utilizar (d) y minimizar al variar λ.)

[1] Consultar sobre las reglas del ajedrez si es necesario.