Centro de Matemática. 18 de agosto de 2006

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

Ejercicio 1. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una de ellas con distribución exponencial con parámetro $a > 0$.
(a) Calcular la distribución de la variable aleatoria

$$Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(b) Calcular la distribución de la variable aleatoria

$$Z_n = \frac{Y_n}{\mathbf{E}(Y_n)}.$$

(c) Calcular $\mathbf{v}\mathrm{ar}(Z_n)$.

Ejercicio 2. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias que converge casi seguramente a la variable aleatoria X. Se considera otra sucesión de variables aleatorias $(Y_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\mathbf{P}(Y_n = 0) > 1 - e^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Probar que $(X_n + Y_n)_{n\geq 1}$ converge casi seguramente a X.

Ejercicio 3. Se considera una cadena de Markov con tres estados E_1, E_2, E_3, estacionaria en el tiempo y con matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(es decir que el elemento (i, j) es la probabilidad de transición del estado E_i al estado E_j).
(a) Indicar si la cadena es irreducible y determinar su período.
(b) Calcular $\lim_{n\to\infty} P^n$.
(c) Si la distribución inicial (en tiempo cero) es

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3,$$

calcular

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = E_1).$$

Aquí X_n es el estado en que se encuentra la cadena en tiempo n y

$$\pi_i = \mathbf{P}(X_0 = E_i) \quad (i = 1, 2, 3).$$