**Centro de Matemática.** 13 de diciembre de 2006

**Examen de Probabilidad y Estadística**

**Ejercicio 1.** Se considera un punto $P$ elegido al azar en un círculo de radio $R$. Sea $\rho$ la distancia de $P$ al centro del círculo y $\phi$ el ángulo entre $OP$ y una semirrecta fija que parte del origen.

(a) Hallar la distribución y la densidad de $\rho$ y de $\phi$.

(b) Calcular la esperanza y la varianza de $\rho$.

(c) Determinar si las variables aleatorias $(\rho, \phi)$ son independientes.

**Ejercicio 2.** Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aletorias independientes e identicamente distribuídas. con $\mathbf{E}(X_i) = 2$ y $\mathbf{v}\text{ar}(X_i) = 9$, y sea $Y_i = X_i/(2^i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots$. Definimos además $T_n$ y $A_n$ como la suma y el promedio, respectivamente, de las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$

(a) Calcular la media y la varianza de $Y_n$, $T_n$, y $A_n$.

(b) Determinar si $Y_n$ converge en probabilidad y, en caso de converger, el límite.

(c) Determinar si $T_n$ converge en probabilidad y, en caso de converger, el límite.

(d) Determinar si $A_n$ converge en probabilidad y, en caso de converger, el límite.

**Ejercicio 3.** Un rey pasea al azar en un tablero de ajedrez de tamaño $3 \times 3$.

(a) Determinar la matriz de transición de la cadena de Markov correspondiente a la posición del rey en el tablero.

(b) Clasificar los estados y la cadena.

(c) Hallar la distribución estacionaria.

(d) Determinar la probabilidad de que el rey se encuentre, luego de una gran cantidad de movidas, en una esquina cualquiera.