Facultad de Ciencias 17 de enero del 2000
Centro de Matemática

Examen de Introducción a la Probabilidad y Estadística

1. Cinco hombres de cada 100 y 25 mujeres de cada 10.000 son daltónicos. Se elige una persona al azar, que resulta ser daltónica. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre, suponiendo que hay igual número de hombres que de mujeres en la población?

2. Se considera una cadena de Markov estacionaria con 4 estados E_1, E_2, E_3 y E_4, cuya matriz de probabilidades de transición en un paso es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ b & 1-b & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $0 < b < 1$.

   (a) Clasificar los estados.
   (b) Calcular $\lim_{n\to\infty} P^n$.
   (c) Supongamos que en el instante inicial el sistema se encuentra en el estado E_1, y sea T_1 ($T_1 \geq 1$) el primer instante de retorno al estado E_1. Calcular $E(T_1)$.

3. *Esquema de Polya:* En una urna hay b bolas blancas y r rojas. En cada turno se saca una bola y se devuelve a la urna junto con c del mismo color, es decir: si llamamos B_n, R_n a las variables aleatorias que indican la cantidad de bolas blancas y rojas respectivamente que hay en el paso n, tenemos: $B_0 = b; R_0 = r$.
Si sale blanca en el primer paso, entonces: $B_1 = b + c; R_1 = r$.
Si sale roja en el primer paso, entonces: $B_1 = b; R_1 = r + c$.
Observar que $B_n + R_n = b + r + nc$.

   (a) Hallar $E(B_1)$.
   (b) Hallar la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda fue blanca.
   (c) i. Expresar $P\{B_n - B_{n+1} = c\}$ en función de $E(B_n)$. (Sugerencia: condicionar el suceso $\{B_n - B_{n+1} = c\}$ por los valores posibles de la variable aleatoria B_n.)
      ii. Deducir de i. una fórmula de recurrencia que exprese $E(B_{n+1})$ en función de $E(B_n)$. Para ello observar que
$$E(B_{n+1} - B_n) = cP\{B_{n+1} - B_n = c\}.$$
      iii. Calcular $E(B_n)$.
      iv. Deducir que la probabilidad de que en la n-ésima tirada salga una bola blanca no depende de n.