

PRÁCTICO 6: APLICACIONES

Aplicación I: Espacios de Hilbert y Espacios L^p

1. Probar que un espacio vectorial normado X es completo si y sólo si cualquier serie que converge absolutamente es convergente. Es decir, si $N(x)$ es la norma de $x \in X$, X es completo si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} N(x_n)$ converge implica $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge (Teorema 5.1 de Folland).
2. Demostrar que el espacio $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ es completo, o bien revisando la demostración de la completitud de $L^2(\mathbb{R}^d)$, o bien utilizando el ejercicio anterior (Teorema 6.6 de Folland).
3. Demostrar la desigualdad de Jensen: Si μ es una medida positiva con $\mu(X) = 1$, y $\varphi(x)$ es una función convexa, entonces

$$\varphi\left(\int_X g \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ g \, d\mu.$$

4.
 - a) Si $\mu(X) < \infty$ entonces $L^p(X, \mu) \subset L^r(X, \mu)$ con $r < p$. Demostrar que la inclusión es estricta.
 - b) Si $f \in L^p(X, \mu)$ y f es acotada en X , entonces $f \in L^r(X, \mu)$ para todo $r > p$.

Aplicación II: Probabilidad

1. Encontrar una familia de sucesos independientes dos a dos que no son independientes.
2. (i) Dada una variable aleatoria $Z \geq 0$ demostrar la desigualdad de Chebishev

$$\mathbf{P}(Z > x) \leq \frac{1}{x}EZ, \text{ para } x > 0.$$

- (ii) Dada una variable aleatoria X con varianza finita y esperanza $a = \mathbf{E}X$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ demostrar

$$\mathbf{P}(|X - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{var}(X)$$

3. Dada una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias independientes con distribución común de Bernoulli, es decir $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0) = p$, con $0 < p < 1$, demostrar que

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(Teorema de Bernoulli, 1713)

4. Consideremos una sucesión de variables independientes $\{X_n\}$ con igual distribución, tales que existe el primer momento $\mu = \mathbf{E} X_1$. Construimos $Y_n = X_n \chi_{\{|X_n| \leq n\}}$. Sea $\mu_n = \mathbf{E} Y_n$. Demostrar que $\mu_n \rightarrow \mu$ y que

$$\frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{n} \rightarrow \mu, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Aplicaciones III: Teoría Ergódica

1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ una transformación μ -invariante. Decimos que $E \in \mathcal{B}$ es T -invariante si $\mu(T^{-1}(E) \Delta E) = 0$, y lo denotamos:

$$T^{-1}(E) = E \pmod{0}.$$

Probar que si E es T -invariante entonces existe E' medible tal que $T^{-1}(E') = E'$ y $\mu(E' \Delta E) = 0$.

2. Sea X un espacio métrico, μ una medida de probabilidad en los borelianos de X y $T : X \rightarrow X$ una transformación continua y μ -invariante. Probar que:

$$\text{sop}(\mu) := \{x \in X : \mu(U) > 0, \forall U \text{ entorno de } x\}$$

es un conjunto compacto y T -invariante.

3. a) Probar que el mapa $T : S^1 \rightarrow S^1$, $T(z) = z^2$ preserva la medida de Lebesgue m .
 b) Sea $F : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $F(x) = 2x^2 - 1$, y sea $h : S^1 \rightarrow [-1, 1]$ definida como $h(z) = \text{Re}(z)$. Probar que $h \circ T = F \circ h$.
 c) Probar que $\mu(E) := m(h^{-1}(E))$, $\forall E \subset [-1, 1]$ boreliano, es una medida de probabilidad en $[-1, 1]$ que es F -invariante.
4. Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un mapa que preserva una medida de probabilidad no atómica μ definida en los borelianos de $[0, 1]$. Probar que existe un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $h \circ T \circ h^{-1}$ preserva la medida de Lebesgue m .

Sugerencia: Definir $h(x) = \mu([0, x])$ y probar que $m(h(A)) = \mu(A)$, para todo boreliano A .

5. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $T : X \rightarrow X$ una transformación μ -invariante. Probar que cada una de las siguientes condiciones es equivalente a que T sea ergódica:

- (i) $\tau_A(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{0 \leq k \leq n-1 : T^k(x) \in A\} = \mu(A)$.
 (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$, para todo $A, B \in \mathcal{B}$. (Comparar con la definición de transformación mixing.)
 (iii) μ es la única medida de probabilidad T -invariante y absolutamente continua respecto a μ .

6. Sea $x \in [0, 1]$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{M^n}$ con $0 \leq a_n \leq M - 1$ su expansión M -ádica, donde $M \geq 2$ es un entero. Se dice que x es *normal* respecto de su expansión M -ádica si para todo $k = 0, \dots, (M - 1)$, el promedio de veces que el dígito k aparece en las primeras n cifras de x converge a $1/M$, o sea:

$$\frac{1}{n} \# \{0 \leq j \leq n : a_j = k\} \rightarrow \frac{1}{M}, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Probar que casi todo x en $[0, 1]$ (respecto a la medida de Lebesgue) es normal.

7. ¿Existe algún entero positivo n tal que la expresión decimal de 2^n comience con el dígito 7? Calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{0 \leq k \leq n : 2^k \text{ comienza con el dígito 7}\}.$$

Sugerencia: $\log_{10}(2)$ es irracional.