Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Introducción al Análisis Real–Curso 2013

Práctico 5: Diferenciación

1. Sea $E \subset \mathbb{R}$ tal que 0 es un punto de densidad de Lebesgue para E. Probar que:

   a) Existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \neq 0$ para todo n, $x_n \to 0$ y $-x_n \in E$ para todo n.

   b) Existe una sucesión $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \neq 0$ para todo n, $x_n \to 0$ y $2x_n \in E$ para todo n.

2. Probar que si $E \subset [0,1]$ es medible y existe $\alpha > 0$ tal que $m(E \cap I) \geq \alpha m(I)$ para todo intervalo $I \subset [0,1]$ entonces $m(E) = 1$.

3. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un cerrado y $\delta(x) = d(x, F)$. Probar que $\delta(x+y)/|y| \to 0$ cuando $|y| \to 0$, para c.t.p. $x \in F$.

4. Construir una función creciente en los reales tal que su conjunto de discontinuidades sea exactamente el conjunto de los racionales.

5. Sea $F(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $F(0) = 0$. Probar que existe $F'(x)$ para todo x, pero F' no es integrable Lebesgue en $[-1, 1]$.

6. Probar directamente (a partir de la definición) que la función de Cantor-Lebesgue no es absolutamente continua.

7. Probar que si F es de variación acotada en $[a, b]$, entonces:

   a) $\int_a^b |F'(x)|dx \leq T_F(a, b)$.

   b) $\int_a^b |F'(x)|dx = T_F(a, b)$ sii F es absolutamente continua.

8. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, entonces:

   a) f lleva conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero,

   b) f lleva conjuntos medibles en conjuntos medibles.

9. *a*) Probar que existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua, estrictamente creciente y $F'(x) = 0$ en un conjunto de medida positiva.

   Sugerencia: Sea K el complemento de un conjunto de Cantor de medida positiva en $[a, b]$. Tomar $F(x) = \int_a^x \chi_K(t)dt$.

   b) Probar que existe una función como en la parte anterior, que además cumple que existe $E \subset [F(a), F(b)]$ medible tal que $m(E) = 0$ y $F^{-1}(E)$ es no medible.

c) Probar que, para cualquier $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente y absolutamente continua se cumple que si $E \subset [F(a), F(b)]$ es medible entonces $F^{-1}(E) \cap \{F' > 0\}$ es un conjunto medible.

Sugerencia: Probar que si $U \subset [F(a), F(b)]$ es abierto entonces $m(U) = \int_{F^{-1}(U)} F'(x)dx$.

10. Sea F absolutamente continua y creciente en $[a, b]$, $A = F(a)$, $B = F(b)$, y sea $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ medible.

    - Probar que $f(F(x))F'(x)$ es medible en $[a, b]$.
    - Probar que si f es integrable en $[A, B]$, entonces $f(F(x))F'(x)$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_A^B f(y)dy = \int_a^b f(F(x))F'(x)dx$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que f es una función globalmente Lipschitz (existe $M \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ para todo x, y) sii f es absolutamente continua y $|f'(x)| \leq M$ c.t.p. x.

12. (Ejercicio 8, Cap. 6 de [RA]) La unicidad de la medida de Lebesgue caracterizada por invarianza mediante traslaciones se puede hacer precisa en la siguiente afirmación: Si μ es una medida de Borel en $\mathbb{R}^d$ que es invariante por traslaciones, y es finita en conjuntos compactos, entonces es un múltiplo de la medida de Lebesgue. Probar este teorema (ver las sugerencias de [RA])

13. (Ejercicio 17, Cap. 3 Folland) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $\mathcal{N}$ una sub-sigma álgebra de $\mathcal{M}$ y ν la restricción de μ a $\mathcal{N}$, es decir $\nu = \mu|_{\mathcal{N}}$. Si $f \in L^1(\mu)$ entonces existe $g \in L^1(\nu)$ (que es entonces $\mathcal{N}$-medible) tal que $\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$ para todo $E \in \mathcal{N}$, y g es única c.t.p.(ν). (En probabilidad, g es la *esperanza condicional* de f con respecto de $\mathcal{N}$.)

14. (Ejercicio 24, Cap. 3 de [RA]) Sea F una función real y creciente definida en $[a, b]$.

    (a) Probar que podemos escribir

    $$F = F_A + F_C + F_J,$$

    donde cada función F_A, F_C, F_J es creciente y verifica:

    (i) F_A es absolutamente continua,

    (ii) F_C es continua pero $F_C' = 0$ c.t.p.(Lebesgue)

    (iii) F_J es una función de saltos (es decir, se escribe como una serie de saltos puros, ver pag. 132).

    La descomposición anterior se llama *descomposición de Lebesgue* de F. Existe una descomposición análoga para F de variación acotada.

15. (Ejercicio 11 Cap. 6 de [RA]) Sea F una función creciente y normalizada en $\mathbb{R}$, y sea $F = F_A + F_C + F_J$ la descomposición de Lebesgue del ejercico anterior. Sea $\mu = \mu_A + \mu_C + \mu_J$ donde μ, μ_A, μ_C, μ_J son las medidas de Borel asociadas a F, F_A, F_C, F_J respectivamente. Verificar:

(i) μ_A es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, y $\mu_A(E) = \int_E F'(x)dx$, para todo E Lebesgue medible.

(ii) Como resultado, si F es absolutamente continua, tenemos $\int f d\mu = \int f dF = \int f(x)F'(x)dx$ siempre que f y fF' sea integrables respecto de μ y de la medida de Lebesgue respectivamente.

(iii) $\mu_C + \mu_J$ y la medida de Lebesgue son singulares.

16.
- Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{2^{n+1}\pi i x}$. Probar que f no es derivable en ningún punto.
- ¿ Existe una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que sea derivable, con derivada acotada y tal que f' no es una función integrabla Riemann? ¿ Y si en la pregunta anterior sustituimos Riemann por Lebesgue?