

PRÁCTICO 4: TEOREMA DE FUBINI Y MEDIDAS

1. Sea f integrable en $\mathbb{R}^d$ y $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d) \in \mathbb{R}^d$ con $\delta_i \neq 0$. Definimos $f^\delta(x) := f(\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d)$. Probar que f^δ es integrable y

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^\delta dm = |\delta_1|^{-1} \cdots |\delta_d|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f dm.$$

2. Sea f definida en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera: $f(x, y) = a_n$ si $(x, y) \in [n, n+1]^2$ con n un natural no negativo; $f(x, y) = -a_n$ si $(x, y) \in [n, n+1] \times [n+1, n+2]$ con n un natural no negativo; y $f(x, y) = 0$ en cualquier otro caso. Aquí, $a_n = \sum_{k \leq n} b_k$, donde $\{b_k\}$ es una sucesión de reales positivos tales que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = s < \infty$.

- a) Verificar que f^y y f_x son integrables para todo x, y y que $\int f_x(y) dy = 0$ y por lo tanto $\int (\int f(x, y) dy) dx = 0$.
- b) Verificar que $\int f^y(x) dx = a_0$ si $0 \leq y \leq 1$ y que $\int f^y(x) dx = a_n - a_{n-1}$ si $n \leq y \leq n+1$. Probar entonces que $y \mapsto \int f^y(x) dx$ es integrable en $(0, \infty)$ y que $\int (\int f(x, y) dx) dy = s$.
- c) ¿ Por qué no vale el teorema de Fubini?

3. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible tal que $|f(x) - f(y)|$ es integrable en $[0, 1]^2$. Probar que f es integrable.

4. Sea f una función integrable en $\mathbb{R}^d$. Para cada $\alpha > 0$ definimos $E_\alpha = \{x : |f(x)| > \alpha\}$. Probar que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| dm = \int_0^\infty m(E_\alpha) d\alpha.$$

5. Sabemos que si un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ es medible, no necesariamente es cierto que E^y, E_x sean medibles en $\mathbb{R}$. Probar que, sin embargo, si $E \subset \mathbb{R}^2$ es un boreliano, entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}$ los conjuntos E^y, E_x son borelianos en $\mathbb{R}$.

Sugerencia: Sea $\mathcal{C} = \{E \subset \mathbb{R}^2 : E^y, E_x \text{ son borelianos}\}$. Probar que $\mathcal{C}$ es una σ -álgebra que contiene a los abiertos.

6. **Lema de Riemann-Lebesgue.** Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx,$$

entonces $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ para $|\xi| \rightarrow \infty$.

Sugerencia: Observar que $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [f(x) - f(x - \xi')] e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx$, donde $\xi' = \frac{1}{2} \frac{\xi}{|\xi|^2}$ y usar la proposición 2.5 de [R].

7. **Teorema de Cantor-Lebesgue.** Sean a_n, b_n dos sucesiones de números reales y $A(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. Probar que si $\sum_{n=0}^{\infty} A(x)$ converge, para x en un conjunto de medida positiva, entonces $a_n, b_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.
8. a) Probar que si X es un conjunto no vacío y $\mathcal{M} \subset P(X)$ es cerrado por complementos y uniones numerables entonces es cerrado por intersecciones numerables. (O sea, en la definición de σ -álgebra no es necesario pedir que sea cerrado por intersecciones numerables.)
 b) Probar que toda σ -álgebra es o bien finita, o bien no numerable.
9. Probar que el conjunto de los borelianos de $\mathbb{R}$ (la menor σ -álgebra generada por los abiertos de $\mathbb{R}$) también está generada por las siguientes familias
 a) Los intervalos abiertos: $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a < b\}$.
 b) Los intervalos cerrados: $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a < b\}$.
 c) Los intervalos semiabiertos: $\mathcal{E}_3 = \{(a, b] : a < b\}$ o $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) : a < b\}$.
 d) Las semirrectas abiertas: $\mathcal{E}_5 = \{(-\infty, b) : a < b\}$ o $\mathcal{E}_6 = \{(a, \infty) : a < b\}$.
 e) Las semirrectas cerradas: $\mathcal{E}_7 = \{(-\infty, b] : a < b\}$ o $\mathcal{E}_8 = \{[a, \infty) : a < b\}$.
 f) Los intervalos con extremos en los racionales.
10. En los siguientes ejemplos, averiguar si $\mathcal{M}$ tiene estructura de σ -álgebra:
 a) Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{M} = \{E \subset X : E \text{ es numerable o } E^c \text{ es numerable}\}$.
 b) Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\tau : X \rightarrow X$ una biyección. Se dice que un subconjunto E de X es τ -invariante si $\tau(E) = E$. Sea $\mathcal{M} = \{E \subset X : E \text{ es } \tau\text{-invariante}\}$.
 c) Sean $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$ dos conjuntos, y $T : X \rightarrow Y$. Sea $\mathcal{M} = \{T^{-1}(E) : E \in \mathcal{P}(Y)\}$. Considerar la misma pregunta sustituyendo $\mathcal{P}(Y)$ por una σ -álgebra cualquiera de subconjuntos de Y .
11. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función cualquiera, y supóngase que $\mathcal{M}$ es una σ -álgebra de conjuntos de Y . Probar que $f^{-1}(\mathcal{M}) := \{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{M}\}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de X . La σ -álgebra $f^{-1}(\mathcal{M})$ se llama imagen inversa de $\mathcal{M}$ bajo f . Mostrar que si $\mathcal{E}$ genera $\mathcal{M}$, entonces $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{E}\}$ genera la imagen inversa de $\mathcal{M}$ bajo f .
12. En los casos siguientes, decidir si μ_* es una medida exterior sobre X , y cuando corresponda calcular la σ -álgebra de los conjuntos μ_* -medibles.
 a) Sean $x_0 \in X$ fijo, $\mu_*(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in E \\ 0 & \text{si } x_0 \notin E \end{cases}$
 b) $\mu_*(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E = \emptyset \\ 1 & \text{si } E \neq \emptyset \end{cases}$
 c) $X = \mathbb{N}$, y $\mu_*(E) = \limsup \left\{ \frac{1}{k} \#(E \cap \{1, 2, \dots, k\}) \right\}$

13. Probar que $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible sii E es m_* -medible, donde m_* es la medida exterior de Lebesgue.

Sugerencia: Si E es medible Lebesgue y $A \subset \mathbb{R}^d$, se puede elegir un conjunto G_δ G tal que $A \subset G$ y $m_*(A) = m(G)$. Recíprocamente, si E es m_* -medible y $m_*(E) < \infty$, se puede elegir un conjunto G_δ G tal que $E \subset G$ y $m_*(E) = m_*(G)$, y entonces $G - E$ tiene medida exterior cero.

14. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Un conjunto $A \in \mathcal{M}$ es llamado un átomo de μ si $\mu(A) > 0$ y para todo $E \subset A$ medible se tiene que $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = \mu(A)$. Si μ no tiene átomos se dice que μ es no atómica. Dar un ejemplo de una medida con exactamente n átomos, $n \in \mathbb{Z}^+$. Probar que si μ es no atómica, $E \in \mathcal{M}$ y $0 \leq t \leq \mu(E) < \infty$, entonces existe $F \subseteq E$ tal que $\mu(F) = t$.
15. Sea μ la medida de Borel en $\mathbb{R}$ inducida por la función exponencial, y sean E_1 el conjunto de los reales en $[0, 1]$ que contienen un 4 en la n -ésima coordenada de su expansión decimal, y E_2 el conjunto de los reales en $[0, 1]$ que contienen algún cero en su expansión decimal. Hallar $\mu(E_1)$ y $\mu(E_2)$.
16. Sea $\mu : \mathbb{Z}^+ \rightarrow [0, \infty]$ la medida tal que $\mu(\{n\}) = \frac{1}{n}$, y sea $A := \{n \in \mathbb{Z}^+ : \text{la cifra 7 no aparece en la representación decimal del número } n\}$. Probar que $\mu(A) < \infty$, y aproximar $\mu(A)$ inferiormente también. ¿Cuánto es $\mu(\{p : p \text{ es primo}\})$?
17. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Probar que el conjunto $\{x \in X : \exists \lim_n f_n(x)\}$ es medible.
18. Sea μ la medida de conteo sobre $\mathbb{N}$. Interpretar el Lema de Fatou, el teorema de convergencia monótona y el teorema de convergencia dominada como teoremas acerca de series infinitas.
19. Probar la siguiente versión más general del teorema de convergencia dominada: si $g_n, g \in L^1$, $g_n \rightarrow g$ en casi todo punto, $|f_n| \leq g_n$, y $\int g_n \rightarrow \int g$, entonces $\int f_n \rightarrow \int f$.
20. *Lema de Scheffé*. Sean $f_n \geq 0$ y $f \geq 0$ tales que $\int f_n = \int f = 1$ para todo n . Probar que si $f_n \rightarrow f$ en casi todo punto, entonces $f_n \rightarrow f$ en L^1 .
21. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Se define la completación del espacio de la siguiente forma: Sea $\hat{\mathcal{M}}$ la colección de todos los conjuntos de la forma $E \cup Z$, donde $E \in \mathcal{M}$ y $Z \subset F$ con $F \in \mathcal{M}$ y $\mu(F) = 0$. Se define $\hat{\mu}(E \cup Z) = \mu(E)$. Probar que:
- $\hat{\mathcal{M}}$ es la menor σ -álgebra que contiene a $\mathcal{M}$ y a todos los subconjuntos de elementos de $\mathcal{M}$ de medida nula.
 - La función $\hat{\mu}$ es una medida en $\hat{\mathcal{M}}$, y es completa.

Sugerencia: Para probar que $\hat{\mathcal{M}}$ es una σ -álgebra alcanza con ver que si $E' \in \hat{\mathcal{M}}$, entonces $E'^c \in \hat{\mathcal{M}}$. Escribiendo $E' = E \cup Z$, con $Z \subset F$, E y F en $\mathcal{M}$, entonces $E'^c = (E \cup F)^c \cup (F - Z)$.

- c) Mostrar que la σ -álgebra de Lebesgue con su respectiva medida en $\mathbb{R}^d$ es la completación de la de Borel.
- d) Mostrar que la σ -álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ con su respectiva medida es la completación del del espacio de medida que se obtiene en la construcción de la medida producto $m_1 \times m_2$, donde m_i es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{d_i}$.