

PRÁCTICO 1: PRELIMINARES, CONJUNTOS DE CANTOR Y MEDIDA EXTERIOR

Varios de los ejercicios están tomados del libro [RA]: “Real Analysis” de Stein y Shakarchi. Se sugiere consultarlo, dado que el libro contiene sugerencias y ejercicios relacionados que pueden ser de ayuda. Otros ejercicios tienen pre-requisitos de Topología, se indican con una [T].

1. (Ejercicio 12 de [RA]) Probar que:

- a) Un disco abierto en el plano no se puede escribir como unión disjunta de rectángulos abiertos.
- b) Un abierto conexo del plano se puede escribir como unión disjunta de rectángulos abiertos sii es un rectángulo abierto.

2. **Conjunto de Cantor** (Ejercicios 1, 2, y 3 de [RA])

Definimos una sucesión de subconjuntos de $[0, 1]$ de la siguiente manera:

$C_0 = [0, 1]$ y para $k > 0$, C_k es el conjunto que se obtiene quitando de cada componente de C_{k-1} el intervalo central abierto de proporción¹ $\xi = 1/3$.

- a) Probar que $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \subset [0, 1]$ es un conjunto no vacío, compacto, perfecto y totalmente desconexo.
- b) Probar que C^c es una unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos, y que la suma de las longitudes de todos esos intervalos es 1.
- c) Todo real $x \in [0, 1]$ tiene una expansión ternaria de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$

donde $a_k \in \{0, 1, 2\}$ para todo k . (Observar que esta expansión no es única. Por ejemplo, $1/3 = \sum_{k=2}^{\infty} 2/3^k$.) Probar que $x \in C$ sii x tiene una expansión ternaria donde no aparece el dígito 1, y concluir que C es un conjunto no numerable.

d) **Función de Cantor-Lebesgue**

Sea $F : C \rightarrow [0, 1]$ definida como

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k},$$

donde $b_k = a_k/2$ y $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$ es una expansión ternaria de x tal que $a_k \in \{0, 2\}$ para todo k . Probar que F es continua, sobreyectiva, creciente y que $F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

¹Si I es un intervalo, el intervalo central abierto de proporción ξ en I es el intervalo abierto I' centrado en el punto medio de I tal que $|I'| = \xi \cdot |I|$.

- e) Mostrar que la función anterior se puede extender a una función continua en todo $[0, 1]$ que es constante en cada componente conexa del complemento de C . Graficar.
- f) [T] Sea $\Omega_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n = 0, 1\}$ el conjunto de las sucesiones de ceros y unos. El conjunto Ω_2 es el producto cartesiano de copias del espacio discreto $\{0, 1\}$ indexado en los naturales, y por lo tanto es un espacio topológico compacto con la topología producto. Se puede demostrar que Ω_2 es metrizable, y una métrica viene dada por $d(x, y) = \sum_{n \geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$. La topología de Ω_2 está generada por los cilindros

$$C_{n_1, \dots, n_k}^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} = \{x \in \Omega : x_{n_i} = \varepsilon_i\},$$

donde $\varepsilon_i = 0, 1$. En la construcción del conjunto de Cantor, C_1 es una unión de 2^1 intervalos cerrados y llamaremos I_0 al que está a la izquierda e I_1 al que está a la derecha. Luego, C_2 es unión de 2^2 intervalos cerrados, que son dos subintervalos de I_0 y dos de I_1 . Llamaremos I_{00} al subintervalo de I_0 que está a la izquierda, I_{01} al subintervalo de I_0 que está a la derecha, y análogamente definimos I_{10}, I_{11} . En general, C_k es la unión de 2^k intervalos cerrados $I_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k}$, $\varepsilon_i = 0, 1$.

Sea $f : \Omega \rightarrow C$ definida de la siguiente manera: $f(x)$ es el único punto del conjunto $\bigcap_{n \geq 1} I_{x_1, \dots, x_n}$. Probar que f está bien definida y que es un homeomorfismo entre el conjunto de Cantor y Ω .

3. Conjuntos de Cantor II (Ejercicio 4 de [RA])

Construiremos ahora un conjunto $\hat{C}$ con el mismo procedimiento que el conjunto de Cantor, es decir, retirando intervalos centrales en cada etapa, pero ahora en el k -ésimo paso la longitud de los intervalos que se retiran es l_k , donde la sucesión l_k cumple que $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} l_i < 1$.

- a) Sea $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} l_i \leq 1$, probar que $m_*(\hat{C}^c) = \lambda$.
- b) Mostrar que si $x \in \hat{C}$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \notin \hat{C}$ pero $x_n \rightarrow x$ y $x_n \in I_n$, donde I_n es un sub-intervalo en el complemento de $\hat{C}$ con $|I_n| \rightarrow 0$.
- c) Probar que en consecuencia, $\hat{C}$ es perfecto y no contiene intervalos abiertos.
- d) Probar que $\hat{C}$ es no numerable.
- e) [T] Construir un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(C) = \hat{C}$ y concluir que estos conjuntos son homeomorfos. Sugerencia: Definir primero h en el complemento de C .

4. (Ejercicio 10 de [RA]) Construiremos una sucesión decreciente de funciones continuas positivas en $[0, 1]$ que converge puntualmente, y su límite no es integrable Riemann.

Sea $\hat{C} \subset [0, 1]$ un conjunto de Cantor de medida positiva como en el ejercicio 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea F_n una función continua tal que: $0 \leq F_n(x) \leq 1$, $F_n(x) = 1$, $\forall x \in \hat{C}_n$ y F_n vale cero en los puntos medios de los intervalos que forman el complemento de $\hat{C}_n$. Sea $f_n = F_1 \cdot F_2 \cdots F_n$.

- a) Probar que para todo $x \in [0, 1]$ se tiene que $0 \leq f_n(x) \leq 1$ y $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, y por lo tanto f_n converge puntualmente a una función f .
- b) Probar que f es discontinua en todo punto de $\hat{C}$.

5. **Contenido de Jordan** (Ejercicio 14 de [RA])

Se define el contenido exterior de Jordan de un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ como

$$J_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^N |I_j| : E \subset \cup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ intervalos y } N \in \mathbb{N} \right\}.$$

- a) Probar que $J_*(E) = J_*(\bar{E})$, para todo $E \subset \mathbb{R}$
- b) Construir un conjunto numerable $E \subset [0, 1]$ tal que $J_*(E) = 1$ y $m_*(E) = 0$

6. **Funciones integrables de Riemann** (Problema 4 de [RA])

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos $M(x, r) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in B(x, r)\}$ y $M(x) = \lim_{r \rightarrow 0} M(x, r)$. Probar que:

- a) f es continua en x sii $M(x) = 0$.
- b) $\forall \varepsilon > 0$, el conjunto $A_\varepsilon = \{x : M(x) \geq \varepsilon\}$ es compacto.
- c) Si el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero, entonces f es integrable Riemann.

Sugerencia: Dado $\varepsilon > 0$, se puede cubrir A_ε con una unión finita de intervalos abiertos de medida $\leq \varepsilon$. Usar esto para elegir una partición adecuada de $[0, 1]$ que permita estimar la sumas superiores e inferiores.

- d) Si f es integrable Riemann, probar que el conjunto de sus discontinuidades tiene medida cero.

Sugerencia: El conjunto de discontinuidades de f está contenido en $\cup_n A_{1/n}$. Tomar una partición P de $[0, 1]$ tal que la diferencia entre sumas superiores e inferiores sea $\leq \varepsilon/n$ y mostrar que el conjunto de intervalos de P cuyo interior intersecta a $A_{1/n}$ tiene largo total $\leq \varepsilon$.