Modelos estocásticos en finanzas (II)

Ernesto Mordecki

Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

I Jornada Internacional de Probabilidad y Estadística

JIPE 3/5 de Febrero de 2010

Resumen

En este mini-curso introducimos el modelo básico de la matemática financiera, el modelo de Black y Scholes, y prestamos la famosa fórmula de valuación de opciones europeas de compra (call option) y venta (put option). En la segunda parte haremos una breve reseña de la generalización de este modelo al caso de activos cuya dinámica presenta saltos. Revisaremos también las herramientas matemática necesarias, como ser el Movimiento Browniano, la fórmula de Itô y los procesos de Lévy.

Contenidos: Clase II

Alternativas a Black Scholes (BS)

Procesos de Lévy

Fórmula de Lévy-Kinchine

Modelos de mercado financiero con saltos

Ejemplos

Principios de valuación en mercados con saltos

Transformada de Esscher

Valuación de opciones

Fórmula de Lewis

Cálculo numérico en la Fórmula de Lewis

Algunos resultados sobre opciones americanas

Referencias

Alternativas a Black Scholes (BS)

Comenzamos con dos observaciones:

- Los precios de los activos no verifican las propiedades estadísticas del modelo de Black-Scholes (distribucion normal, independencia,...)
- Las propiedades de los precios teóricos obtenidos de la fórmula de BS no coinciden con los precios observados (fenómeno de la sonrisa "smile phenomena")

Distingimos innovaciones en dos direcciones (a pesar de la popularidad de BS):

- Modelos con volatilidad estocástica:
  - pierden la independencia de los incrementos,
  - preservan la continuidad de las trayectorias:

$$dS_t = S_t\big(\mu dt + \sigma(S_t, S_t')dW_t\big)$$

  incluyendo la posibilidad de dependencia de otras fuentes de incertidumbre S' (modelos de dos factores)
- Modelos con saltos:
  - pierden la continuidad de las trayectorias,
  - conservan la independencia y la homogeneidad de los incrementos:

    $$S_t = S_0 e^{X_t}$$

    donde X es un proceso de Lévy (es decir, un proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios)

Procesos de Lévy

$X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Lévy en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si

- $X_0 = 0$, es decir, parte del origen.
- X tiene trayectorias continuas por la derecha con límite a la izquierda ("cadlag")
- Sus incrementos son independientes. Si $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, entonces
$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$
son variables aleatorias independientes.
- Sus incrementos son homogéneos, es decir
$$X_t - X_s \sim X_{t-s}.$$

Fórmula de Lévy-Kinchine

Existe una herramienta analítica para el estudio de los procesos de Lévy. La fórmula de Lévy-Kinchine establece:

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)},$$

donde ψ está dado por

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbf{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy)$$

donde

- b y $\sigma \geq 0$ son números reales,
- Π es la *medida de saltos*, medida postiva en $\mathbf{R} - \{0\}$, tal que $\int (1 \wedge y^2)\Pi(dy) < +\infty$.

Tenemos una tripleta

$$(b, \sigma, \Pi).$$

Teorema Cada proceso de Lévy tiene un único exponente ψ y recíprocamente, cada exponente tiene su proceso.

Concluímos que toda la información de un proceso puede leerse en ψ. Veamos por ejemplo:

$$E(X_t) = t\psi'(0). \tag{1}$$

En efecto, derivando $E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)}$ respecto de z, obtenemos

$$E(X_t e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)}\psi'(z),$$

que evaluado en $z = 0$ da la fórmula (1). Análogamente obtenemos

$$E(X_t^2) = t\psi''(0).$$

Escribamos estos valores en términos de la tripleta:

Derivando

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbf{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy)$$

tenemos

$$\psi'(z) = b + \sigma^2 z + \int_{\mathbf{R}} (ye^{zy} - y\mathbf{1}_{\{|y|<1\}})\Pi(dy),$$

de donde

$$E(X_1) = \psi'(0) = b + \int_{\mathbf{R}} y\mathbf{1}_{\{|y|\geq 1\}}\Pi(dy).$$

Análogamente

$$E(X_1^2) = \sigma^2 + \int_{\mathbf{R}} y^2\Pi(dy).$$

Modelos de mercado financiero con saltos

Tenemos dos activos:

- Una cuenta corriente

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

como en BS,

- Un activo con riesgo, de la forma

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

donde $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Lévy.

Ejemplo: Black Scholes

El proceso X (log-precio del activo) es

$$X_t = \sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t,$$

es un PL con tripleta

$$(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma, 0).$$

La ausencia de saltos se corresponde con la condición

$$\Pi = 0.$$

Ejemplo: Proceso de Poisson

Sean $T_1, T_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro λ. Sea

$$N_t = \inf\{k \colon T_1 + T_2 + \ldots T_k \leq t\}.$$

$N = \{N_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ.

$$X_t = bt + cN_t$$

es un PL con tripleta $(b, 0, \Pi)$, donde

$$\Pi(dy) = \lambda \delta_c(dy).$$

$\sigma = 0$ corresponde con la ausencia de movimiento browniano.

Ejemplo: Proceso de Poisson compuesto

Consideremos $T_1, T_2, \ldots$ como antes e $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ variables aleatorias independientes con distribución $F = F(y)$. Construímos

$$X_t = bt + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

La tripleta es

$$(b, 0, \lambda F(dy)).$$

Si $Y = c$ (constante), tenemos $F(dy) = \delta_c(dy)$ y es el ejemplo anterior.

Ejemplo: Difusión con saltos

Consideremos como antes

- N proceso de Poisson,
- $Y = \{Y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ variables independientes con distribución $F(y)$
- W, un movimiento Browniano,

para construir $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ dado por

$$X_t = bt + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k.$$

X tiene tripleta

$$(b, \sigma, \lambda F(dy))$$

Ejemplo: Modelo de Merton

El modelo de Merton (1976, Difusión con saltos de Merton) es una difusion donde los saltos son gaussianos, Es decir, las variables Y_k son gaussianas. Tenemos

$$F(dy) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\nu)^2/(2\delta^2)} dy.$$

La medida de saltos es $\lambda F(dy)$, y el exponente característico

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \lambda \left(e^{\nu z + \delta^2 z^2/2} - 1 \right)$$

Si $\lambda = 0$ (no hay saltos) obtenemos BS.

Ejemplo: Modelo de Kou

El modelo de Kou asume que que los saltos tienen distribución doble-exponencial asimétrica. Mas precisamente las variables Y_k tienen densidad

$$f(dy) = \begin{cases} p\alpha e^{-\alpha y}, & \text{si } y > 0, \\ (1-p)\beta e^{\beta y}, & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

El exponente característico, en este caso, es

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \lambda\left(\frac{pz}{\alpha - z} - \frac{(1-p)z}{\beta + z}\right).$$

Principios de valuación en mercados con saltos

Tenemos la equivalencia:

- *Mercado completo*
- *Cobertura ("hedging") perfecto*
- *Unicidad de la medida de riesgo-neutral*
- *Existencia de precio racional*

Pero los mercados con saltos se denominan *incompletos* y se caracterizan por

- *No existe cobertura ("hedging") perfecta*
- *Existen infitnitas medidas de riesgo-neutral*
- *Existen infinitos precios, llamados admisibles*

Una medida Q es de riesgo-neutral, si

1. Q es equivalente a P, la medida histórica o física,
2. $S_t/B_t = S_0 e^{X_t - rt}$ es una Q-martingala

Para elegir la medida de riesgo-neutral para hay distintas alternativas:

- En modelos con trayectorias continuas e incompletos, Föllmer y Schweizer introdujeron la *medida minimal*, que minimiza la pérdida cuadrática de una cobertura: Si π es un portafolio autofinanciante con capital V^π, para un pago $f(S_T)$ se minimiza
$$\min_\pi E\left(\left(V_T^\pi - f(S_T)\right)^2\right)$$
- En procesos de Lévy, Gerber and Shiu proponen la transformada de Esscher (de la matemática actuarial), que minimiza la entropía relativa (Chan, 1999).
- Los PL son estables bajo la transformación de Esscher: si X es PL bajo P, entonces es PL bajo Q, con exponente característico ψ_Q.

Transformada de Esscher

Existe un θ tal que

$$\psi_P(\theta + 1) - \psi_P(\theta) = r$$

La medida de Esscher es tal que

$$\frac{dQ}{dP} = exp(\theta X_T - \psi_P(\theta) T).$$

El proceso X bajo Q tiene exponente

$$\psi_Q(z) = \psi_P(z + \theta) - \psi_P(\theta).$$

y la condición de martingala es

$$\psi_Q(1) = r.$$

Valuación de opciones

Diversos autores (Carr y Madan, 1999; Raible, 2000) presentan fórmulas con el uso de la transformada de Fourier para calcular precios de opciones europeas. Presentamos la Fórmula de Lewis (2001). La opción tiene las siguientes características:

- Tipo europeo, ejercicio en T.
- Función de pago $f(S_T)$
- Si es opción de compra (*"call"*) corresponde $f(x) = (x - K)^+$,
- Si es opción de venta (*"put"*) corresponde $f(x) = (K - x)^+$.
- Suponemos elegida la medida "Q" transformada de Esscher para calcular la esperanza.

Fórmula de Lewis

El precio de una opción europea con pago $f(S_T)$ está dado por

$$V(S_0, T) = \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \frac{1}{S_0^{iz}} E_Q(e^{-izX_T})\hat{f}(z)dz$$

Aquí:

- El dominio de integración es una recta $\{z = i\nu + t, t \in \mathbb{R}\}$, en el plano complejo, donde $\nu > 1$ es tal que las integrales convergen.
- $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de la función de pago f:

$$\hat{f}(z) = \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{izx} f(x)dx.$$

Si $f(x) = (x - K)^+$, tenemos $\hat{f}(z) = -K^{1+iz}/(z^2 - iz)$.

- La fórmula se obtiene en base a la indentidad de Parseval (válida en espacios con producto interno):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)\hat{p^*}(u)du,$$

  (z^* es conjugado, válida en ciertas condiciones). Se aplicada a la densidad $p(u)$ de S_T

$$\hat{p^*}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izu}p(u)du = (S_0)^{-iz}E_Q e^{-izX_T},$$

- El cálculo se realiza utilizando la transoformada de Fourier rápida (Fast Fourier Transform)
- Con algunas transformaciones se obtiene la conocida fórmula de Carr y Madan (1999)

Ejemplo de aplicación de la Fórmula de Lewis

Consideremos una opción europea en el modelo de Merton. Tenemos

- $E_Q(e^{-iZX_T}) = e^{T\psi(-iz)} = \exp\left(-ibz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \lambda\left(e^{-i\nu z - \delta^2 z^2/2} - 1\right)\right)$
- $f(x) = (x - K)^+$ por lo que $\hat{f}(z) = -K^{1+iz}/(z^2 - iz)$

Tenemmos

$$V(S_0, T) = \frac{-Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \frac{(K/S_0)^{iz}}{z^2 - iz} \exp\left(-ibz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \lambda\left(e^{-i\nu z - \delta^2 z^2/2} - 1\right)\right) dz$$

Caso particular: Black y Scholes

Si $\lambda = 0$ en el modelo de Merton obtenemos el modelo BS. Tenemos $b = r$ por la condición de martingala. El precio de la opcion es

$$
\begin{aligned}
V(S_0, T) &= \frac{-Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \frac{(S_0/K)^{-iz}}{z^2 - iz} e^{-irz-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} dz \\
&= \frac{-Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \frac{e^{-ikz}}{z(z-i)} e^{-irz-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} dz \\
&= \frac{-Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{-ikz} \left(\frac{i}{z} - \frac{i}{z-i} \right) e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} dz
\end{aligned}
$$

donde $k = \log(S_0/K) + rT$. Cada uno de los términos da el correspondiente de BS mediante el cálculo de residuos del análisis complejo (detalles en Lewis (2000)).

Cálculo numérico en la Fórmula de Lewis

Tenemos que calcular, con $k = \log S_0 + rT$, denotando $X_t^r = X_t - rt$, valores de

$$V(S_0, T, k) = \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{-ikz} E_Q(e^{-izX_T^r}) \hat{f}(z) dz,$$

que son de la forma

$$V(k) = \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{-ikz} g(z) dz$$

La FFT es discreta, aproximamos entonces:

$$\int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{-ikz} g(z)dz \approx \int_{i\nu-A/2}^{i\nu+A/2} e^{-ikz} g(z)dz \approx \frac{A}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w_j g(z_j) e^{-ikz_j}$$

donde

- $z_j = -A/2 + j\Delta \quad (j = 0, \ldots, N-1)$
- $\Delta = A/(N-1)$
- w_j son los pesos de la regla de integración discreta, por ejemplo con la regla del paralelogramo

$$w_0 = w_{N-1} = 1/2, \quad w_j = 1 \ (j = 1, \ldots, N-2).$$

Ahora poniendo $k = k_n = 2\pi n/(N\Delta) = \log S_{0,n} + rT$ (vector de precios), la suma se convierte en una transformada de Fourier discreta

$$\frac{A}{N}\sum_{j=0}^{N-1} w_j g(z_j) e^{-i(2\pi n/(N\Delta))(-A/2+j\Delta)}$$

$$= \frac{A}{N} e^{iAu_n/2} \sum_{j=0}^{N-1} w_j g(z_j) e^{-i(2\pi jn/N)}$$

En síntesis, la transformada de Fourier rápida nos permite (en forma eficiente) calcular precios con valores iniciales del activo de la forma

$$S_{0,n} = \exp\left(\frac{2\pi n}{N\Delta} - rT\right)$$

Otras parametrizaciones permiten calcular precios en otros vectores (dependientes de K por ejemplo).

Algunos resultados sobre opciones americanas

Recordamos que una opción americana es un contrato que paga un premo $f(S_\tau)$ en un instante $\tau \in [0, T]$ que elige el comprador.

Cuando la opción no tiene límite de vencimiento ($T = \infty$) tenemos opciones americanas perpetuas.

Las opciones americanas con $T < \infty$ no admiten soluciones explícitas, y se utilizan métodos numéricos para el cálculo de precios.

En el caso de las opciones perpetuas, existen algunas fórmulas cerradas. Las primeras fueron obtenidas por Mc Kean (1965, opcion americana de venta perpetua en el modelo BS) y Merton (1973, opción americana de compra perpetua en BS). Los resulados que presentamos son una generalización de los anteriores.

Agregemos que elegimos Q tal que X:

- X es un proceso de Lévy bajo Q,
- $\left(S_t/B_t\right)_{t\geq 0}$ es una martingala bajo Q

Para obtener el precio de una opción de venta perpetua (put option) el problema a resolver es un problema de parada óptima, hay que calcular

$$V(S_0) = \sup_{\tau\in\mathcal{M}} E_Q\left(e^{-r\tau}(K - S_\tau - K)^+\right),$$

El resultado es el siguiente:

Teorema Consideremos un proceso de Lévy X. Sea

$$I = \inf\{X_t \colon 0 \leq e_r\}$$

donde e_r es una variable exponencial de parámetro r independiente de X. El precio de la opción put perpetua para $S_t = S_0 e^{X_t}$ es

$$V(S_0) = \frac{E(K - S_0 e^I)^+}{E(e^I)},$$

y el momento óptimo de ejercicio viene dado por

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \colon S_t \leq S_0 E(e^I)\}.$$

Nota: Para algunas clases de procesos de Lévy (incluyendo Black Scholes y el Modelo de Kou) es posible obtener fórmulas cerradas explíticas para la distribución de I, y por lo tanto para los precios de las opciones.

Referencias

Libros

- Cont, R., Tankov, P. Financial Modelling with Jump Processes. Chapman Hall, 2004.
- Merton, R.C.: Continuous Time Finance. Cambridge Oxford: Blackwell 1990
- Mikosh, T., Elementary Stochastic Calculus with Finance in view. World Scientific, 1998.
- Shiryaev, Albert N. Essentials of stochastic finance. World Scientific Publishing (1999)

Artículos clásicos

- Black, R. Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy **81**, 637–659 (1973)
- Merton, R.C.: Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics **3**, 125–144 (1976)
- Mc Kean, Jr. H.P.: Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in Mathematical Economics. Industrial Management Review **6** (spring) 32–39 (1965)

Algunas referencias recientes

- Föllmer, H., Schweizer, M.: Hedging of contingent claims under incomplete information. In: Applied Stochastic Analysis (London), Stochastic Monographs **5**, New York: Gordon and Breach 1991, pp 389–414
- Gerber H. U., Shiu E. S. W., Option pricing by Esscher transforms. Transactions of the Society of Actuaries. 1994. V. 46, pp. 99-191.
- Lewis, A. A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy Processes. http://www.opcioncity.net
- Mordecki, E. Optimal stopping and Perpetual Options for Lévy Processes Finance & Stochastics **6** (4) 473–493 (2002)