Modelos estocásticos en finanzas (I)

Ernesto Mordecki

Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

I Jornada Internacional de Probabilidad y Estadística

JIPE 3/5 de Febrero de 2010

Resumen

En este mini-curso introducimos el modelo básico de la matemática financiera, el modelo de Black y Scholes, y prestamos la famosa fórmula de valuación de opciones europeas de compra (call option) y venta (put option). En la segunda parte haremos una breve reseña de la generalización de este modelo al caso de activos cuya dinámica presenta saltos. Revisaremos también las herramientas matemática necesarias, como ser el Movimiento Browniano, la fórmula de Itô y los procesos de Lévy.

Contenidos: Clase I

Modelación matemática en finanzas

Opciones

Movimiento Browniano

El modelo BS de Black y Scholes

Fórmula de Itô

Movimiento Browniano Económico

Valuación de opciones

Construcción del portafolio

La ecuación de Black-Scholes

Consecuencias teóricas de BS

Probabilidad riesgo-neutral y Teorema de Girsanov

Aplicación: Fórmula de BS

Modelación matemática en finanzas

Suponemos que tenemos un mercado financiero con dos posibilidades de inversión:

- Un activo sin riesgo, caja de ahorros o cuenta corriente, llamado *bono*, que paga un interés instantáneo de tasa $r \geq 0$. Su evolución diferencial es

  $$\frac{dB_t}{B_t} = r dt, \qquad B_0 = 1.$$

  La solución de esta ecuación diferencial es

  $$B_t = e^{rt}.$$

- Un activo con riesgo, aleatorio, que designamos mediante

  $$S_t = S_0 e^{X_t},$$

  donde $\{X_t\}$ es un proceso estocástico en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que cumple $X_0 = 0$.

Opciones

En este modelo se introduce una *tercer* alternativa de inversión denominada *opción*, que es un contrato que paga $f(S_T)$ en el instante T a su poseedor.

- El activo S se llama el *subyacente*.
- Si $f(x) = (x - K)^+$ tenemos una *opción de compra* ("*call option*")
- Si $f(x) = (K - x)^+$ tenemos una *opción de venta* ("*put option*")
- Si T es fijo (está estipulado en el contrato) la opción es *europea*
- Si T puede ser elegido por el poseedor del contrato, la opción es *americana*.

Problema: Cuanto vale comprar una opción europea en $t = 0$.

Comenzamos estudiando el modelo probabilístico para la evolución del activo con riesgo S.

Movimiento Browniano

En 1900, Louis Bachelier introdujo un modelo del movimiento Browniano (observado en la naturaleza por Brown en 1826) para modelar las fluctuaciones de la bolsa parisina.
El movimiento Browniano o proceso de Wiener en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso aleatorio, $W = (W_t)_{t \geq 0}$ tal que

- $W_0 = 0$, es decir, parte del origen.
- Sus trayectorias son continuas.
- Sus incrementos son independientes. Si $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, entonces
$$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$
son variables aleatorias independientes.
- $W_t - W_s$ es una variable gaussiana, con media cero y varianza $t - s$, es decir
$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

Recordemos que X es gaussiana o normal ($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) cuando su distibución de probablidad es

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

La densidad es la campana de Gauss

$$\phi(x|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Algunas consecuencias

- La variable W_t es normal, centrada, y tiene varianza t.

$$W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

- El incremento ΔW del proceso, es $\mathcal{N}(0, \Delta t)$. Consideremos la variable $(\Delta W)^2$. Tenemos

$$E((\Delta W)^2) = \Delta t, \qquad Var((\Delta W)^2) = 2(\Delta t)^2$$

Luego, si $\Delta t \longrightarrow 0$, la varianza es menor que la esperanza, luego la variable se "aproxima" a su valor esperado, lo que notaremos

$$(\Delta W)^2 \sim \Delta t, \quad \text{o sugestivamente} \quad (dW)^2 = dt$$

El modelo BS de Black y Scholes

El modelo tiene un continuo de períodos $t \in [0, T]$ y consta de dos activos:

- $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ que evoluciona en forma determinística según la ley
$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt, \qquad B_0 = 1,$$
donde r es la tasa de interés por unidad de tiempo. B representa un bono (bond).
- El precio de la acción (stock) $S = (S_t)_{t \in [0,T]}$ es de evolución aleatoria o contingente, según la ley
$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW, \qquad S_0 = x,$$
donde
  - μ es el *retorno medio*,
  - σ la *volatilidad*
  - W es un movimiento Browniano.
- En primer lugar, hay que dar un sentido (aunque sea práctico) a la expresión "dW".

Fórmula de Itô

Para valuar opciones debemos desarrollar algunas herramientas. La fórmula de Itô es una generalización de la regla de la cadena del cálculo usual de funciones.

Objetivo : Dar un sentido y generalizar la igualdad

$$(dW)^2 = dt.$$

Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función con derivadas continuas (regular). El desarrollo de Taylor de f es

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)(\Delta x)^2 + \dots$$

Habitualmente, el segundo sumando se desprecia frente al primero. Pero si $x = W_t$ y $x_0 = W_{t_0}$, tenemos

$$(\Delta x)^2 = (\Delta W)^2 \sim \Delta t$$

y el aporte no se desprecia frente al primer sumando. Los otros términos son efectivamente de mayor orden.

Teorema [Fórmula de Itô]

Sea ahora $f = f(x, t)$ una función regular de dos variables. Con argumentos similares a los esbozados, se demuestra que

$$f(W_t, t) - f(W_0, 0) = \int_0^t f_x(W_s, s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(W_s, s) ds + \int_0^t f_t(W_s, s) ds,$$

que es la fórmula de Itô.
Sintéticamente

$$df(W_t, t) = f_x(W_t, t) dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(W_t, t) dt + f_t(W_t, t) dt.$$

Comentarios

- La primer integral (llamada *integral estocástica*)

$$\int_0^t f_x(W_s, s)dW_s$$

debe entenderse como un límite de sumas del tipo

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_x(W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

- La segunda integral

$$\frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(W_s, s)ds$$

es específica del cálculo estocástico, y hace que las reglas de integración sean diferentes a las clásicas.

Ejemplo de aplicación de la Fórmula de Itô

Sea $f(x) = x^2$. Tenemos

$$f_t = 0, \qquad f_x = f' = 2x, \qquad f_{xx} = f'' = 2.$$

Resulta

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) = W_t^2 &= \int_0^t (2W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds \\ &= \int_0^t (2W_s)dW_s + t, \end{aligned}$$

que es distinta de la fórmula

$$y^2 = \int_0^y (2x)dx.$$

Ahora aparece un término más.

Movimiento Browniano Económico

Bachelier (1900) propone que las acciones evolucionan como

$$L_t = L_0 + \sigma W_t + \nu t,$$

donde W_t es un movimiento Browniano. Como W_t es gaussiana, L_t puede tomar valores negativos.
En 1965 P. Samuelson propone el modelo

$$G_t = G_0 \exp(\sigma W_t + \nu t),$$

para los precios de la acción. G se llama movimiento Browniano económico o geométrico.

Veamos que esta definición verifica la fórmula del activo con riesgo S en BS. Como es función de W, aplicamos Itô. Considerando

$$f(x,t) = G_0 \exp(\sigma x + \nu t)$$

tenemos que

$$G_t = f(W_t, t)$$

Las derivadas parciales son,

$$f_x(x,t) = \sigma f(x,t), \quad f_{xx}(x,t) = \sigma^2 f(x,t), \quad f_t(x,t) = \nu f(x,t),$$

resultando

$$dG_t = df(W_t, t) = \sigma G_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 G_t dt + \nu G_t dt.$$

Dividiendo por G

$$\begin{aligned} \frac{dG_t}{G_t} &= (\nu + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t \\ &= \mu dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

donde designamos $\mu = \nu + \frac{1}{2}\sigma^2$.

Es decir, el movimiento browniano económico verifica la definición del activo con riesgo en BS.

Como $\mu = \nu + \frac{1}{2}\sigma^2$ la fórmula para S es

$$S_t = S_0 \exp[\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t]$$

Observese que el término $\frac{1}{2}\sigma^2 t$ proviene del f_{xx} la "novedad" de la fórmula de Itô.
Conclusión : El MBG es la "generalización" natural de agregar ruido a la evolución de un activo sin riesgo (determinístico).
Comparemos:

$$dB = B(rdt), \qquad dS = S(\mu dt + \sigma \mathbf{dW}).$$

Valuación de opciones

Un portafolio en un modelo BS es un par de procesos estocásticos $\pi = (a_t, b_t)$ que representan la cantidad a_t de bonos y b_t de acciones de un agente en cada instante t.
El valor de un portafolio π en el instante t es

$$V_t^\pi = a_t B_t + b_t S_t.$$

Para calcular el precio $V(S_0, T)$ de una opción europea con premio $f(S_T)$ Black y Scholes propusieron construir un portafolio que sea equivalente a poseer la opción. Propusieron que (1) *replique* la opción y (2) sea *autofinanciante*.
Cuando existe tal portafolio decimos que el modelo es *completo*.

Veámoslo en detalle

Sea un portafolio $\pi = (a_t, b_t)$ tal que:

- *Replique* la opción, es decir, en el momento de ejecución de la opción en portafolio iguale en capital a la opción:

$$V_T^\pi = a_T B_T + b_T S_T = f(S_T).$$

- Sea *autofinanciante*, es decir, la variación de capital es producto únicamente de las variaciones de los precios de los activos B y S. Matemáticamente, esto se formula mediante

$$dV_t^\pi = a_t dB_t + b_t dS_t.$$

El precio de la opción se define entonces como el precio del portafolio autofinanciante en $t = 0$, es decir

$$V(S_0, T) = a_0 B_0 + b_0 S_0.$$

Construcción del portafolio

Black y Scholes demostraron que el portafolio replicante y autofinanciante es único, determinando entonces un precio *racional* para la opción.

Para encontrarlo, buscaremos una función $H(x,t)$ tal que,

$$X_t^\pi = H(S_t, t)$$

La condición de réplica es $X_T = f(S_T)$, lo que se logra si

$$H(x,T) = f(x).$$

Como el portafolio y la opción son equivalentes, el precio de la opción sera el capital necesario para comprar el portafolio en $t = 0$, es decir

$$V(S_0, T) = H(S_0, 0).$$

Para determinar H y $\pi = (a_t, b_t)$ tales que

$$V_t = a_t B_t + b_t S_t = H(S_t, t)$$

comenzamos calculando el diferencial de V de dos formas distintas para igualar el resultado.

Primero, como S es función de W, y H es función de S, podemos aplicar la fórmula de Itô, resultando

$$dV^{\pi} = dH = (\mu S H_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{xx} + H_t)dt + H_x S \sigma dW. \qquad (1)$$

Por otra parte, como π es autofinanciante, teniendo en cuenta que $a_t B_t = H_t - B_t S_t$, tenemos

$$\begin{aligned} dV^{\pi} &= adB + bdS = raBdt + b(\mu S dt + \sigma S dW) \\ &= r(H - bS)dt + \mu b S dt + bS\sigma dW. \\ &= (rH + (\mu - r)bS)\, dt + bS\sigma dW. \qquad (2) \end{aligned}$$

Igualemos primero el coeficiente en dW (1) y (2), para obtener:

$$b_t = H_x(S_t, t).$$

La ecuación de Black-Scholes

Luego de igualar el coeficiente en dW, y algunas transformaciones, obtenemos

$$rSH_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{xx} + H_t = rH.$$

Ademas, para que sea réplica, tenemos $H(S_T, T) = f(S_T)$. Ambas condiciones se verifican, en caso de cumplirse para todos los valores posibles x que tome el activo, es decir, si

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 H_{xx}(x,t) + rxH_x(x,t) + H_t(x,t) & = & rH(x,t) \\ \\ H(x,T) & = & f(x) \end{cases}$$

Esta es la ecuación de Black-Scholes. Es una ecuación diferencial en derivadas parciales. La condición de réplica es la condición inicial o de borde. La condición que obtuvimos primero:

$$b_t = H_x(S_t, t)$$

nos da la cantidad de acciones necesarias para replicar la opción.

Fórmula de Black-Scholes

Se puede verificar que la solución de la ecuación anterior viene dada por

$$H(x,t) = x\Phi(x_+(x,t)) - e^{-rT}K\Phi(x_-(x,t))$$

con

$$x_+(x,t) = \left(\log\frac{xe^{r(T-t)}}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)/(\sigma\sqrt{T-t})$$

$$x_-(x,t) = \left(\log\frac{xe^{r(T-t)}}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)/(\sigma\sqrt{T-t}).$$

Entonces, el valor de la opción que corresponde a $t = 0$ es

$$V(S_0,T) = S_0\Phi(x_+) - e^{-rT}K\Phi(x_-)$$

con

$$x_\pm = \left(\log\frac{S_0e^{rT}}{K} \pm \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)/(\sigma\sqrt{T}).$$

Observaciones y aplicación práctica

¿Por qué es tan importante la fórmula de Black Scholes?
El detalle clave es que la solución no depende de μ, el rendimiento del activo subyacente a la opción. Los parámetros que aparecen son r y σ. Para aplicar la fórmula:

- r se obtiene de bonos (preferentemente en la misma moneda) con vencimiento T.
- σ no es observable, se calcula (en general) a partir de precios de opciones, es la *volatilidad implícita*.

Consecuencias teóricas de BS

Observación clave: Como vimos, en la ecuación de BS no aparece μ[1] sino r. Hagamos la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma dW = r dt + \sigma d\left(W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t\right) \\ &= r dt + \sigma dW_t^*\end{aligned}$$

donde hemos designado

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t.$$

Aquí viene a nuestra ayuda el *Teorema de Girsanov*

[1] Esa observación valió un Premio Nobel

Probabilidad riesgo-neutral y Teorema de Girsanov

Teorema Dado un proceso de Wiener W en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, existe una medida de probabilidad Q tal que el proceso

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t = W_t + qt,$$

es un Q proceso de Wiener. Además, P y Q son equivalentes, y su densidad de Radon Nykodim viene dada por

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-qT - \frac{1}{2} q^2 W_T\right)$$

Esto sugiere considerar el modelo

$$\frac{dB}{B} = rdt, \qquad \frac{dS}{S} = rdt + \sigma dW^*$$

en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, donde W^* es un proceso de Wiener.

Es importante observar que bajo Q el rendimiento esperado de ambos activos coincide, es r.
Vimos que las respectivas soluciones de estas ecuaciones son

$$B_t = e^{rt}, \qquad S_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t^* + (r - \sigma^2/2)t\right)$$

Tenemos entonces que

$$\frac{S_t}{B_t} = S_0 \exp\left(\sigma W_t^* - \sigma^2 t/2\right) \text{ es una } Q\text{-martingala} \tag{3}$$

Se puede ver que Q es la única medida que verifica (3).
En conclusión:

- cambiamos P por Q, μ por r, W por W^*.
- Los activos B y S tienen igual rendimiento bajo Q,

Veamos la significación de Q.

Para eso utilizaremos las siguientes propiedades de la integral estocástica:

- $\left(\int_0^t b_t dW_t^*\right)_{t\geq 0}$ es una Q-martingala
- Si

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t^*$$

entonces

$$X \text{ es } Q\text{-martingala si y solo si } a_t = 0.$$

Ejercicio: Verificar que el valor del portafolio descontado es una Q-martingala, es decir

$$\frac{H(S_t, t)}{B_t} \quad \text{es } Q\text{-martingala.}$$

Tenemos $H/B = e^{-rT}H$. Aplicando Itô,

$$d(e^{-rT}H) = e^{-rT}\left(-rHdt + dH\right)$$

Pero como $dH = rHdt + bS\sigma dW^*$, al sustituir resulta

$$d\left(\frac{H(S_t, t)}{B_t}\right) = bS_t\sigma dW_t^*$$

verificando que la tendencia es nula, y por la propiedad 2 obtenemos que es una Q-martingala.
Como las martingalas conservan el valor esperado, deducimos para el precio de la opción con pago $f(S_T)$, que

$$V(x, T) = H(S_0, 0) = E_Q(e^{-rT}H(S_T, T)) = e^{-rT}E_Q(f(S_T)),$$

por la condición final $H(x, T) = f(x)$.
Conclusión: El precio de la opción según BS es el valor esperado del pago f bajo la medida Q, que llamamos *probabilidad de riesgo-neutral*.

Aplicación: Fórmula de BS

Calculemos el precio $V(S_0, T)$ de una opción de compra. Según vimos

$$V(x, T) = e^{-rT} E_Q(f(S_T))$$

recordando que bajo Q, con $S_0 = x$

$$S_T = S_0 \exp(\sigma W_T^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT).$$

Utilizaremos

- $W_T^* \sim \sqrt{T} Z \sim \mathcal{N}(0, T)$, si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- $\alpha = \frac{\log\left(S_0 e^{rT}/K\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$.

Tenemos,

$$\begin{aligned} V(x, T) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}u - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT} - K\right)^+ \phi(u) du \\ &= e^{-rT} \int_{-\alpha}^{+\infty} \left(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}u - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT} - K\right) \phi(u) du \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&S_0 \int_{-\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma\sqrt{T}u - \frac{1}{2}\sigma^2 T - u^2/2} du - Ke^{-rT} \int_{\alpha}^{+\infty} \phi(u) du \\
=&S_0 \int_{-\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u-\sigma\sqrt{T})^2/2} du - Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{\alpha} \phi(u) du \\
=&S_0 P(Z + \sigma\sqrt{T} \geq -\alpha) - Ke^{-rT} P(\sqrt{T} Z \geq -\alpha) \\
=&S_0 P(Z \leq \alpha + \sigma\sqrt{T}) - Ke^{-rT} P(Z \leq \alpha),
\end{aligned}
$$

que es la Fórmula de Black y Scholes.