

# Modelos estocásticos en finanzas

Ernesto Mordecki

Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

I Jornada Internacional de Probabilidad y Estadística

Lima, Perú, 3/5 de Febrero de 2010

# Prólogo

En este mini-curso introducimos el modelo básico de la matemática financiera, el modelo de Black y Scholes, y presentamos la famosa fórmula de valuación de opciones europeas de compra (call option) y venta (put option). En la segunda parte haremos una breve reseña de la generalización de este modelo al caso de activos cuya dinámica presenta saltos. Revisaremos también las herramientas matemáticas necesarias, como ser el Movimiento Browniano, la fórmula de Itô y los procesos de Lévy.

Estas notas están extractadas de las transparencias del curso, por lo que su redacción puede ser demasiado escueta en algunas partes, probablemente conteniendo erratas, cuya corrección se agradece de antemano.

Ernesto Mordecki  
Enero de 2010  
Cuchilla Alta, Uruguay

# Índice general

<b>1. El modelo de Black y Scholes</b>	<b>4</b>
1.1. Modelación matemática en finanzas . . . . .	4
1.2. Opciones . . . . .	4
1.3. Movimiento Browniano . . . . .	5
1.4. El modelo BS de Black y Scholes . . . . .	6
1.5. Fórmula de Itô . . . . .	7
1.6. Movimiento Browniano Económico . . . . .	8
1.7. Valuación de opciones . . . . .	9
1.8. Construcción del portafolio . . . . .	10
1.9. La ecuación de Black-Scholes . . . . .	11
1.10. Importancia de la Fórmula de Black y Scholes . . . . .	12
1.11. Consecuencias teóricas de BS . . . . .	13
1.12. Probabilidad riesgo-neutral y Teorema de Girsanov . . . . .	13
1.13. Aplicación: Fórmula de BS . . . . .	15
<b>2. Modelos con saltos</b>	<b>16</b>
2.1. Alternativas a Black Scholes (BS) . . . . .	16
2.2. Procesos de Lévy . . . . .	17
2.3. Fórmula de Lévy-Kinchine . . . . .	17
2.4. Modelos con saltos . . . . .	19
2.5. Ejemplos . . . . .	19
2.5.1. Ejemplo: Black Scholes . . . . .	19
2.5.2. Ejemplo: Proceso de Poisson . . . . .	19
2.5.3. Ejemplo: Proceso de Poisson compuesto . . . . .	20
2.5.4. Ejemplo: Difusión con saltos . . . . .	20
2.5.5. Ejemplo: Modelo de Merton . . . . .	20
2.5.6. Ejemplo: Modelo de Kou . . . . .	21
2.6. Principios de valuación en mercados con saltos . . . . .	21

2.7. Transformada de Esscher . . . . .	22
2.8. Valuación de opciones . . . . .	22
2.9. Fórmula de Lewis . . . . .	23
2.10. FFT en la Fórmula de Lewis . . . . .	24
2.11. Opciones americanas . . . . .	25

# Capítulo 1

## El modelo de Black y Scholes

### 1.1. Modelación matemática en finanzas

Suponemos que tenemos un mercado financiero con dos posibilidades de inversión:

- Un activo sin riesgo, caja de ahorros o cuenta corriente, llamado *bono*, que paga un interés instantáneo de tasa  $r \geq 0$ . Su evolución diferencial es

$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt, \quad B_0 = 1.$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$B_t = e^{rt}.$$

- Un activo con riesgo, aleatorio, que designamos mediante

$$S_t = S_0 e^{X_t},$$

donde  $\{X_t\}$  es un proceso estocástico en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , que cumple  $X_0 = 0$ .

### 1.2. Opciones

En este modelo se introduce una *tercer* alternativa de inversión denominada *opción*, que es un contrato que paga  $f(S_T)$  en el instante  $T$  a su poseedor.

- El activo  $S$  se llama el *subyacente*.
- Si  $f(x) = (x - K)^+$  tenemos una *opción de compra* (“*call option*”)
- Si  $f(x) = (K - x)^+$  tenemos una *opción de venta* (“*put option*”)
- Si  $T$  es fijo (está estipulado en el contrato) la opción es  *europea*
- Si  $T$  puede ser elegido por el poseedor del contrato, la opción es  *americana*.

**Problema:** Cuanto vale comprar una opción europea en  $t = 0$ .

Comenzamos estudiando el modelo probabilístico para la evolución del activo con riesgo  $S$ .

### 1.3. Movimiento Browniano

En 1900, Louis Bachelier introdujo un modelo del movimiento Browniano (observado en la naturaleza por Brown en 1826) para modelar las fluctuaciones de la bolsa parisina.

El movimiento Browniano o proceso de Wiener en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un proceso aleatorio,  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  tal que

- $W_0 = 0$ , es decir, parte del origen.
- Sus trayectorias son continuas.
- Sus incrementos son independientes. Si  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , entonces

$$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

- $W_t - W_s$  es una variable gaussiana, con media cero y varianza  $t - s$ , es decir

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

Recordemos que  $X$  es gaussiana o normal ( $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ) cuando su distribución de probabilidad es

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

La densidad es la campana de Gauss

$$\phi(x|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- La variable  $W_t$  es normal, centrada, y tiene varianza  $t$ .

$$W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

- El incremento  $\Delta W$  del proceso, es  $\mathcal{N}(0, \Delta t)$ . Consideremos la variable  $(\Delta W)^2$ . Tenemos

$$E((\Delta W)^2) = \Delta t, \quad Var((\Delta W)^2) = 2(\Delta t)^2$$

Luego, si  $\Delta t \rightarrow 0$ , la varianza es menor que la esperanza, luego la variable se “aproxima” a su valor esperado, lo que notaremos

$$(\Delta W)^2 \sim \Delta t, \quad \text{o sugestivamente} \quad (dW)^2 = dt$$

## 1.4. El modelo BS de Black y Scholes

El modelo tiene un continuo de períodos  $t \in [0, T]$  y consta de dos activos:

- $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$  que evoluciona en forma determinística según la ley

$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt, \quad B_0 = 1,$$

donde  $r$  es la tasa de interés por unidad de tiempo.  $B$  representa un bono (bond).

- El precio de la acción (stock)  $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$  es de evolución aleatoria o contingente, según la ley

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW, \quad S_0 = x,$$

donde

- $\mu$  es el *retorno medio*,
  - $\sigma$  la *volatilidad*
  - $W$  es un movimiento Browniano.
- En primer lugar, hay que dar un sentido (aunque sea práctico) a la expresión “ $dW$ ”.

## 1.5. Fórmula de Itô

Para valorar opciones debemos desarrollar algunas herramientas. La fórmula de Itô es una generalización de la regla de la cadena del cálculo usual de funciones.

*Objetivo* : Dar un sentido y generalizar la igualdad

$$(dW)^2 = dt.$$

Sea  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función con derivadas continuas (regular). El desarrollo de Taylor de  $f$  es

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)(\Delta x)^2 + \dots$$

Habitualmente, el segundo sumando se desprecia frente al primero. Pero si  $x = W_t$  y  $x_0 = W_{t_0}$ , tenemos

$$(\Delta x)^2 = (\Delta W)^2 \sim \Delta t$$

y el aporte no se desprecia frente al primer sumando. Los otros términos son efectivamente de mayor orden.

Sea ahora  $f = f(x, t)$  una función regular de dos variables. Con argumentos similares a los esbozados, se demuestra que

$$\begin{aligned} f(W_t, t) - f(W_0, 0) &= \int_0^t f_x(W_s, s)dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(W_s, s)ds \\ &\quad + \int_0^t f_t(W_s, s)ds, \end{aligned}$$

que es la fórmula de Itô.

Sintéticamente

$$df(W_t, t) = f_x(W_t, t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(W_t, t)dt + f_t(W_t, t)dt.$$

- La primer integral (llamada *integral estocástica*)

$$\int_0^t f_x(W_s, s)dW_s$$

debe entenderse como un límite de sumas del tipo

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_x(W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

- La segunda integral

$$\frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(W_s, s) ds$$

es específica del cálculo estocástico, y hace que las reglas de integración sean diferentes a las clásicas.

Sea  $f(x) = x^2$ . Tenemos

$$f_t = 0, \quad f_x = f' = 2x, \quad f_{xx} = f'' = 2.$$

Resulta

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) &= W_t^2 - W_0^2 = \int_0^t (2W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds \\ &= \int_0^t (2W_s) dW_s + t, \end{aligned}$$

que es distinta de la fórmula

$$y^2 = \int_0^y (2x) dx.$$

Ahora aparece un término más.

## 1.6. Movimiento Browniano Económico

Bachelier (1900) propone que las acciones evolucionan como

$$L_t = L_0 + \sigma W_t + \nu t,$$

donde  $W_t$  es un movimiento Browniano. Como  $W_t$  es gaussiana,  $L_t$  puede tomar valores negativos.

En 1965 P. Samuelson propone el modelo

$$G_t = G_0 \exp(\sigma W_t + \nu t),$$

para los precios de la acción.  $G$  se llama movimiento Browniano económico o geométrico. Veamos que esta definición verifica la fórmula del activo con riesgo  $S$  en BS. Como es función de  $W$ , aplicamos Itô. Considerando

$$f(x, t) = G_0 \exp(\sigma x + \nu t)$$

tenemos que

$$G_t = f(W_t, t)$$

Las derivadas parciales son,

$$f_x(x, t) = \sigma f(x, t), \quad f_{xx}(x, t) = \sigma^2 f(x, t), \quad f_t(x, t) = \nu f(x, t),$$

resultando

$$dG_t = df(W_t, t) = \sigma G_t dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 G_t dt + \nu G_t dt.$$

Dividiendo por  $G$

$$\begin{aligned} \frac{dG_t}{G_t} &= \left(\nu + \frac{1}{2} \sigma^2\right) dt + \sigma dW_t \\ &= \mu dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

donde designamos  $\mu = \nu + \frac{1}{2} \sigma^2$ .

Es decir, el movimiento browniano económico verifica la definición del activo con riesgo en BS.

Como  $\mu = \nu + \frac{1}{2} \sigma^2$  la fórmula para  $S$  es

$$S_t = S_0 \exp\left[\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right) t\right]$$

Observese que el término  $\frac{1}{2} \sigma^2 t$  proviene del  $f_{xx}$  la “novedad” de la fórmula de Itô.

*Conclusión* : El MBG es la “generalización” natural de agregar ruido a la evolución de un activo sin riesgo (determinístico). Comparemos:

$$dB = B(rdt), \quad dS = S(\mu dt + \sigma dW).$$

## 1.7. Valuación de opciones

Un portafolio en un modelo BS es un par de procesos estocásticos  $\pi = (a_t, b_t)$  que representan la cantidad  $a_t$  de bonos y  $b_t$  de acciones de un agente en cada instante  $t$ .

El valor de un portafolio  $\pi$  en el instante  $t$  es

$$V_t^\pi = a_t B_t + b_t S_t.$$

Para calcular el precio  $V(S_0, T)$  de una opción europea con premio  $f(S_T)$  Black y Scholes propusieron construir un portafolio que sea equivalente a poseer la opción. Propusieron que (1) *replique* la opción y (2) sea *autofinanciante*.

Cuando existe tal portafolio decimos que el modelo es *completo*.

Veámoslo en detalle. Sea un portafolio  $\pi = (a_t, b_t)$  tal que:

- *Replique* la opción, es decir, en el momento de ejecución de la opción en portafolio iguale en capital a la opción:

$$V_T^\pi = a_T B_T + b_T S_T = f(S_T).$$

- Sea *autofinanciante*, es decir, la variación de capital es producto únicamente de las variaciones de los precios de los activos  $B$  y  $S$ . Matemáticamente, esto se formula mediante

$$dV_t^\pi = a_t dB_t + b_t dS_t.$$

El precio de la opción se define entonces como el precio del portafolio autofinanciante en  $t = 0$ , es decir

$$V(S_0, T) = a_0 B_0 + b_0 S_0.$$

## 1.8. Construcción del portafolio

Black y Scholes demostraron que el portafolio replicante y autofinanciante es único, determinando entonces un precio *racional* para la opción.

Para encontrarlo, buscaremos una función  $H(x, t)$  tal que,

$$X_t^\pi = H(S_t, t)$$

La condición de réplica es  $X_T = f(S_T)$ , lo que se logra si

$$H(x, T) = f(x).$$

Como el portafolio y la opción son equivalentes, el precio de la opción será el capital necesario para comprar el portafolio en  $t = 0$ , es decir

$$V(S_0, T) = H(S_0, 0).$$

Para determinar  $H$  y  $\pi = (a_t, b_t)$  tales que

$$V_t = a_t B_t + b_t S_t = H(S_t, t)$$

comenzamos calculando el diferencial de  $V$  de dos formas distintas para igualar el resultado.

Primero, como  $S$  es función de  $W$ , y  $H$  es función de  $S$ , podemos aplicar la fórmula de Itô, resultando

$$dV^\pi = dH = (\mu S H_x + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 H_{xx} + H_t) dt + H_x S \sigma dW. \quad (1.1)$$

Por otra parte, como  $\pi$  es autofinanciante, teniendo en cuenta que  $a_t B_t = H_t - B_t S_t$ , tenemos

$$\begin{aligned} dV^\pi &= adB + bdS = raBdt + b(\mu Sdt + \sigma SdW) \\ &= r(H - bS)dt + \mu bSdt + bS\sigma dW. \\ &= (rH + (\mu - r)bS) dt + bS\sigma dW. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Igualemos primero el coeficiente en  $dW$  (1.1) y (1.2), para obtener:

$$b_t = H_x(S_t, t).$$

## 1.9. La ecuación de Black-Scholes

Luego de igualar el coeficiente en  $dW$ , y algunas transformaciones, obtenemos

$$rSH_x + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 H_{xx} + H_t = rH.$$

Ademas, para que sea réplica, tenemos  $H(S_T, T) = f(S_T)$ . Ambas condiciones se verifican, en caso de cumplirse para todos los valores posibles  $x$  que tome el activo, es decir, si

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 H_{xx}(x, t) + rxH_x(x, t) + H_t(x, t) = rH(x, t) \\ H(x, T) = f(x) \end{cases}$$

Esta es la ecuación de Black-Scholes. Es una ecuación diferencial en derivadas parciales. La condición de réplica es la condición inicial o de borde. La condición que obtuvimos primero:

$$b_t = H_x(S_t, t)$$

nos da la cantidad de acciones necesarias para replicar la opción.

Se puede verificar que la solución de la ecuación anterior viene dada por

$$H(x, t) = x\Phi(x_+(x, t)) - e^{-rT}K\Phi(x_-(x, t))$$

con

$$x_+(x, t) = \left( \log \frac{xe^{r(T-t)}}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right) / (\sigma\sqrt{T-t})$$
$$x_-(x, t) = \left( \log \frac{xe^{r(T-t)}}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right) / (\sigma\sqrt{T-t}).$$

Entonces, el valor de la opción que corresponde a  $t = 0$  es

$$V(S_0, T) = S_0\Phi(x_+) - e^{-rT}K\Phi(x_-)$$

con

$$x_{\pm} = \left( \log \frac{S_0e^{rT}}{K} \pm \frac{1}{2}\sigma^2T \right) / (\sigma\sqrt{T}).$$

## 1.10. Importancia de la Fórmula de Black y Scholes

El detalle clave es que la solución no depende de  $\mu$ , el rendimiento del activo subyacente a la opción. Los parámetros que aparecen son  $r$  y  $\sigma$ . Para aplicar la fórmula:

- $r$  se obtiene de bonos (preferentemente en la misma moneda) con vencimiento  $T$ .
- $\sigma$  no es observable, se calcula (en general) a partir de precios de opciones, es la *volatilidad implícita*.

## 1.11. Consecuencias teóricas de BS

**Observación clave:** Como vimos, en la ecuación de BS no aparece  $\mu$ <sup>1</sup> sino  $r$ . Hagamos la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma dW = r dt + \sigma d\left(W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t\right) \\ &= r dt + \sigma dW_t^*\end{aligned}$$

donde hemos designado

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t.$$

Aquí viene a nuestra ayuda el *Teorema de Girsanov*

## 1.12. Probabilidad riesgo-neutral y Teorema de Girsanov

**Teorema** Dado un proceso de Wiener  $W$  en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , existe una medida de probabilidad  $Q$  tal que el proceso

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t = W_t + qt,$$

es un  $Q$  proceso de Wiener. Además,  $P$  y  $Q$  son equivalentes, y su densidad de Radon Nykodim viene dada por

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-qT - \frac{1}{2}q^2W_T\right)$$

Esto sugiere considerar el modelo

$$\frac{dB}{B} = r dt, \quad \frac{dS}{S} = r dt + \sigma dW^*$$

en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ , donde  $W^*$  es un proceso de Wiener.

Es importante observar que bajo  $Q$  el rendimiento esperado de ambos activos coincide, es  $r$ .

---

<sup>1</sup>Esa observación valió un Premio Nobel

Vimos que las respectivas soluciones de estas ecuaciones son

$$B_t = e^{rt}, \quad S_t = S_0 \exp(\sigma W_t^* + (r - \sigma^2/2)t)$$

Tenemos entonces que

$$\frac{S_t}{B_t} = S_0 \exp(\sigma W_t^* - \sigma^2 t/2) \text{ es una } Q\text{-martingala} \quad (1.3)$$

Se puede ver que  $Q$  es la única medida que verifica (1.3).

En conclusión:

- cambiamos  $P$  por  $Q$ ,  $\mu$  por  $r$ ,  $W$  por  $W^*$ .
- Los activos  $B$  y  $S$  tienen igual rendimiento bajo  $Q$ ,

Veamos la significación de  $Q$ .

Para eso utilizaremos las siguientes propiedades de la integral estocástica:

- $\left(\int_0^t b_t dW_t^*\right)_{t \geq 0}$  es una  $Q$ -martingala
- Si

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t^*$$

entonces

$$X \text{ es } Q\text{-martingala si y solo si } a_t = 0.$$

**Ejercicio:** Verificar que el valor del portafolio descontado es una martingala bajo la medida  $Q$ , es decir

$$\frac{H(S_t, t)}{B_t} \text{ es } Q\text{-martingala.}$$

Tenemos  $H/B = e^{-rT} H$ . Aplicando Itô,

$$d(e^{-rT} H) = e^{-rT} (-rH dt + dH)$$

Pero como  $dH = rH dt + bS\sigma dW^*$ , al sustituir resulta

$$d\left(\frac{H(S_t, t)}{B_t}\right) = bS_t\sigma dW_t^*$$

verificando que la tendencia es nula, y por la propiedad 2 obtenemos que es una  $Q$ -martingala.

Como las martingalas conservan el valor esperado, deducimos para el precio de la opción con pago  $f(S_T)$ , que

$$V(x, T) = H(S_0, 0) = E_Q(e^{-rT} H(S_T, T)) = e^{-rT} E_Q(f(S_T)),$$

por la condición final  $H(x, T) = f(x)$ .

**Conclusión:** El precio de la opción según BS es el valor esperado del pago  $f$  bajo la medida  $Q$ , que llamamos *probabilidad de riesgo-neutral*.

### 1.13. Aplicación: Fórmula de BS

Calculemos el precio  $V(S_0, T)$  de una opción de compra. Según vimos

$$V(x, T) = e^{-rT} E_Q(f(S_T))$$

recordando que bajo  $Q$ , con  $S_0 = x$

$$S_T = S_0 \exp(\sigma W_T^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT).$$

Utilizaremos

- $W_T^* \sim \sqrt{T}Z \sim \mathcal{N}(0, T)$ , si  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- $\alpha = \frac{\log(S_0 e^{rT}/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$ .

Tenemos,

$$\begin{aligned} V(x, T) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( S_0 e^{\sigma\sqrt{T}u - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT} - K \right)^+ \phi(u) du \\ &= e^{-rT} \int_{-\alpha}^{+\infty} \left( S_0 e^{\sigma\sqrt{T}u - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT} - K \right) \phi(u) du \\ &= S_0 \int_{-\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma\sqrt{T}u - \frac{1}{2}\sigma^2 T - u^2/2} du - K e^{-rT} \int_{\alpha}^{+\infty} \phi(u) du \\ &= S_0 \int_{-\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u - \sigma\sqrt{T})^2/2} du - K e^{-rT} \int_{-\infty}^{\alpha} \phi(u) du \\ &= S_0 P(Z + \sigma\sqrt{T} \geq -\alpha) - K e^{-rT} P(\sqrt{T}Z \geq -\alpha) \\ &= S_0 P(Z \leq \alpha + \sigma\sqrt{T}) - K e^{-rT} P(Z \leq \alpha), \end{aligned}$$

que es la Fórmula de Black y Scholes.

# Capítulo 2

## Modelos con saltos

### 2.1. Alternativas a Black Scholes (BS)

Comenzamos con dos observaciones:

- Los precios de los activos no verifican las propiedades estadísticas del modelo de Black-Scholes (distribución normal, independencia, ...)
- Las propiedades de los precios teóricos obtenidos de la fórmula de BS no coinciden con los precios observados (fenómeno de la sonrisa “smile phenomena”)

Distingimos innovaciones en dos direcciones (a pesar de la popularidad de BS):

- Modelos con volatilidad estocástica:
  - pierden la independencia de los incrementos,
  - preservan la continuidad de las trayectorias:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma(S_t, S'_t)dW_t)$$

incluyendo la posibilidad de dependencia de otras fuentes de incertidumbre  $S'$  (modelos de dos factores)

- Modelos con saltos:
  - pierden la continuidad de las trayectorias,

- conservan la independencia y la homogeneidad de los incrementos:

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

donde  $X$  es un proceso de Lévy (es decir, un proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios)

## 2.2. Procesos de Lévy

$X = (X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Lévy en  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si

- $X_0 = 0$ , es decir, parte del origen.
- $X$  tiene trayectorias continuas por la derecha con límite a la izquierda (“cadlag”)
- Sus incrementos son independientes. Si  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , entonces

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

- Sus incrementos son homogéneos, es decir

$$X_t - X_s \sim X_{t-s}.$$

## 2.3. Fórmula de Lévy-Kinchine

Existe una herramienta analítica para el estudio de los procesos de Lévy. La fórmula de Lévy-Kinchine establece:

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)},$$

donde  $\psi$  está dado por

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbf{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}}) \Pi(dy)$$

donde

- $b$  y  $\sigma \geq 0$  son números reales,

- $\Pi$  es la *medida de saltos*, medida positiva en  $\mathbf{R} - \{0\}$ , tal que  $\int (1 \wedge y^2) \Pi(dy) < +\infty$ .

Tenemos una tripleta

$$(b, \sigma, \Pi).$$

**Teorema** Cada proceso de Lévy tiene un único exponente  $\psi$  y recíprocamente, cada exponente tiene su proceso.

Concluimos que toda la información de un proceso puede leerse en  $\psi$ . Veamos por ejemplo:

$$E(X_t) = t\psi'(0). \quad (2.1)$$

En efecto, derivando  $E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)}$  respecto de  $z$ , obtenemos

$$E(X_t e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)} \psi'(z),$$

que evaluado en  $z = 0$  da la fórmula (2.1). Análogamente obtenemos

$$E(X_t^2) = t\psi''(0).$$

Escribamos estos valores en términos de la tripleta:

Derivando

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbf{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}}) \Pi(dy)$$

tenemos

$$\psi'(z) = b + \sigma^2 z + \int_{\mathbf{R}} (ye^{zy} - y\mathbf{1}_{\{|y|<1\}}) \Pi(dy),$$

de donde

$$E(X_1) = \psi'(0) = b + \int_{\mathbf{R}} y\mathbf{1}_{\{|y|\geq 1\}} \Pi(dy).$$

Análogamente

$$E(X_1^2) = \sigma^2 + \int_{\mathbf{R}} y^2 \Pi(dy).$$

## 2.4. Modelos con saltos

Tenemos dos activos:

- Una cuenta corriente

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

como en BS,

- Un activo con riesgo, de la forma

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

donde  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Lévy.

## 2.5. Ejemplos

### 2.5.1. Ejemplo: Black Scholes

El proceso  $X$  (log-precio del activo) es

$$X_t = \sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t,$$

es un PL con tripleta

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma, 0\right).$$

La ausencia de saltos se corresponde con la condición

$$\Pi = 0.$$

### 2.5.2. Ejemplo: Proceso de Poisson

Sean  $T_1, T_2, \dots$  variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ . Sea

$$N_t = \inf\{k: T_1 + T_2 + \dots + T_k \leq t\}.$$

$N = (N_t)_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$ .

$$X_t = bt + cN_t$$

es un PL con tripleta  $(b, 0, \Pi)$ , donde

$$\Pi(dy) = \lambda \delta_c(dy).$$

$\sigma = 0$  corresponde con la ausencia de movimiento browniano.

### 2.5.3. Ejemplo: Proceso de Poisson compuesto

Consideremos  $T_1, T_2, \dots$  como antes e  $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbf{N}}$  variables aleatorias independientes con distribución  $F = F(y)$ . Construimos

$$X_t = bt + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

La tripleta es

$$(b, 0, \lambda F(dy)).$$

Si  $Y = c$  (constante), tenemos  $F(dy) = \delta_c(dy)$  y es el ejemplo anterior.

### 2.5.4. Ejemplo: Difusión con saltos

Consideremos como antes

- $N$  proceso de Poisson,
- $Y = \{Y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  variables independientes con distribución  $F(y)$
- $W$ , un movimiento Browniano,

para construir  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  dado por

$$X_t = bt + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k.$$

$X$  tiene tripleta

$$(b, \sigma, \lambda F(dy))$$

### 2.5.5. Ejemplo: Modelo de Merton

El modelo de Merton (1976, Difusión con saltos de Merton) es una difusión donde los saltos son gaussianos, Es decir, las variables  $Y_k$  son gaussianas. Tenemos

$$F(dy) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\nu)^2/(2\delta^2)} dy.$$

La medida de saltos es  $\lambda F(dy)$ , y el exponente característico

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \lambda \left( e^{\nu z + \delta^2 z^2/2} - 1 \right)$$

Si  $\lambda = 0$  (no hay saltos) obtenemos BS.

### 2.5.6. Ejemplo: Modelo de Kou

El modelo de Kou asume que los saltos tienen distribución doble-exponencial asimétrica. Mas precisamente las variables  $Y_k$  tienen densidad

$$f(dy) = \begin{cases} p\alpha e^{-\alpha y}, & \text{si } y > 0, \\ (1-p)\beta e^{\beta y}, & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

El exponente característico, en este caso, es

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \lambda \left( \frac{pz}{\alpha - z} - \frac{(1-p)z}{\beta + z} \right).$$

## 2.6. Principios de valuación en mercados con saltos

Tenemos la equivalencia:

- *Mercado completo*
- *Cobertura (“hedging”) perfecto*
- *Unicidad de la medida de riesgo-neutral*
- *Existencia de precio racional*

Pero los mercados con saltos se denominan *incompletos* y se caracterizan por

- *No existe cobertura (“hedging”) perfecta*
- *Existen infinitas medidas de riesgo-neutral*
- *Existen infinitos precios, llamados admisibles*

Una medida  $Q$  es de riesgo-neutral, si

1.  $Q$  es equivalente a  $P$ , la medida histórica o física,
2.  $S_t/B_t = S_0 e^{X_t - rt}$  es una  $Q$ -martingala

Para elegir la medida de riesgo-neutral para hay distintas alternativas:

- En modelos con procesos con trayectorias continuas e incompletos, Föllmer y Schweizer introdujeron la *medida minimal*, que minimiza la pérdida cuadrática de una cobertura: Si  $\pi$  es un portafolio autofinanciante con capital  $V^\pi$ , para un pago  $f(S_T)$  se minimiza

$$\min_{\pi} E((V_T^\pi - f(S_T))^2)$$

- En procesos de Lévy, Gerber and Shiu proponen la transformada de Esscher (de la matemática actuarial), que minimiza la entropía relativa (Chan, 1999).
- Los PL son estables bajo la transformación de Esscher: si  $X$  es PL bajo  $P$ , entonces es PL bajo  $Q$ , con exponente característico  $\psi_Q$ .

## 2.7. Transformada de Esscher

Existe un  $\theta$  tal que

$$\psi_P(\theta + 1) - \psi_P(\theta) = r$$

La medida de Esscher es tal que

$$\frac{dQ}{dP} = \exp(\theta X_T - \psi_P(\theta)T).$$

El proceso  $X$  bajo  $Q$  tiene exponente

$$\psi_Q(z) = \psi_P(z + \theta) - \psi_P(\theta).$$

y la condición de martingala es

$$\psi_Q(1) = r.$$

## 2.8. Valuación de opciones

Diversos autores (Carr y Madan, 1999; Raible, 2000) presentan fórmulas con el uso de la transformada de Fourier para calcular precios de opciones europeas. Presentamos la Fórmula de Lewis (2001). La opción tiene las siguientes características:

- Tipo europeo, ejercicio en  $T$ .
- Función de pago  $f(S_T)$
- Si es opción de compra (“call”) corresponde  $f(x) = (x - K)^+$ ,
- Si es opción de venta (“put”) corresponde  $f(x) = (K - x)^+$ .
- Suponemos elegida la medida “Q” transformada de Esscher para calcular la esperanza.

## 2.9. Fórmula de Lewis

El precio de una opción europea con pago  $f(S_T)$  está dado por

$$V(S_0, T) = \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \frac{1}{S_0^{iz}} E_Q(e^{-izX_T}) \hat{f}(z) dz$$

Aquí:

- El dominio de integración es una recta  $\{z = i\nu + t, t \in \mathbb{R}\}$ , en el plano complejo, donde  $\nu > 1$  es tal que las integrales convergen.
- $\hat{f}$  es la transformada de Fourier de la función de pago  $f$ :

$$\hat{f}(z) = \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{izx} f(x) dx.$$

Si  $f(x) = (x - K)^+$ , tenemos  $\hat{f}(z) = -K^{1+iz}/(z^2 - iz)$ .

- La fórmula se obtiene en base a la identidad de Parseval (válida en espacios con producto interno):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)\hat{p}^*(u)du,$$

( $z^*$  es conjugado, válida en ciertas condiciones). Se aplicada a la densidad  $p(u)$  de  $S_T$

$$\hat{p}^*(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izu} p(u) du = (S_0)^{-iz} E_Q e^{-izX_T},$$

- El cálculo se realiza utilizando la transformada de Fourier rápida (Fast Fourier Transform)
- Con algunas transformaciones se obtiene la conocida fórmula de Carr y Madan (1999)

Consideremos una opción europea en el modelo de Merton. Tenemos

- $E_Q(e^{-iZX_T}) = e^{T\psi(-iz)} = \exp\left(-ibz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \lambda\left(e^{-ivz - \delta^2 z^2/2} - 1\right)\right)$
- $f(x) = (x - K)^+$  por lo que  $\hat{f}(z) = -K^{1+iz}/(z^2 - iz)$

Tenemos

$$V(S_0, T) = \frac{-Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \frac{(K/S_0)^{iz}}{z^2 - iz} \exp\left(-ibz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \lambda\left(e^{-ivz - \delta^2 z^2/2} - 1\right)\right) dz$$

Si  $\lambda = 0$  en el modelo de Merton obtenemos el modelo BS. Tenemos  $b = r$  por la condición de martingala. El precio de la opción es

$$\begin{aligned} V(S_0, T) &= \frac{-Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \frac{(S_0/K)^{-iz}}{z^2 - iz} e^{-irz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2} dz \\ &= \frac{-Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \frac{e^{-ikz}}{z(z-i)} e^{-irz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2} dz \\ &= \frac{-Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{-ikz} \left(\frac{i}{z} - \frac{i}{z-i}\right) e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2} dz \end{aligned}$$

donde  $k = \log(S_0/K) + rT$ . Cada uno de los términos da el correspondiente de BS mediante el cálculo de residuos del análisis complejo (detalles en Lewis (2000)).

## 2.10. FFT en la Fórmula de Lewis

Tenemos que calcular, con  $k = \log S_0 + rT$ , denotando  $X_t^r = X_t - rt$ , valores de

$$V(S_0, T, k) = \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{-ikz} E_Q(e^{-izX_T^r}) \hat{f}(z) dz,$$

que son de la forma

$$V(k) = \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{-ikz} g(z) dz$$

La FFT es discreta, aproximamos entonces:

$$\int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} e^{-ikz} g(z) dz \approx \int_{i\nu-A/2}^{i\nu+A/2} e^{-ikz} g(z) dz \approx \frac{A}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w_j g(z_j) e^{-ikz_j}$$

donde

- $z_j = -A/2 + j\Delta \quad (j = 0, \dots, N-1)$
- $\Delta = A/(N-1)$
- $w_j$  son los pesos de la regla de integración discreta, por ejemplo con la regla del paralelogramo

$$w_0 = w_{N-1} = 1/2, \quad w_j = 1 \quad (j = 1, \dots, N-2).$$

Ahora poniendo  $k = k_n = 2\pi n/(N\Delta) = \log S_{0,n} + rT$  (vector de precios), la suma se convierte en una transformada de Fourier discreta

$$\frac{A}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w_j g(z_j) e^{-i(2\pi n/(N\Delta))(-A/2+j\Delta)} = \frac{A}{N} e^{iA u_n/2} \sum_{j=0}^{N-1} w_j g(z_j) e^{-i(2\pi j n/N)}$$

En síntesis, la transformada de Fourier rápida nos permite (en forma eficiente) calcular precios con valores iniciales del activo de la forma

$$S_{0,n} = \exp\left(\frac{2\pi n}{N\Delta} - rT\right)$$

Otras parametrizaciones permiten calcular precios en otros vectores (dependientes de  $K$  por ejemplo).

## 2.11. Opciones americanas

Recordamos que una opción americana es un contrato que paga un premo  $f(S_\tau)$  en un instante  $\tau \in [0, T]$  que elige el comprador.

Cuando la opción no tiene límite de vencimiento ( $T = \infty$ ) tenemos opciones americanas perpetuas.

Las opciones americanas con  $T < \infty$  no admiten soluciones explícitas, y se utilizan métodos numéricos para el cálculo de precios.

En el caso de las opciones perpetuas, existen algunas fórmulas cerradas. Las primeras fueron obtenidas por Mc Kean (1965, opción americana de venta perpetua en el modelo BS) y Merton (1973, opción americana de compra perpetua en BS). Los resultados que presentamos son una generalización de los anteriores.

Agregemos que elegimos  $Q$  tal que  $X$ :

- $X$  es un proceso de Lévy bajo  $Q$ ,
- $\left(S_t/B_t\right)_{t \geq 0}$  es una martingala bajo  $Q$

Para obtener el precio de una opción de venta perpetua (put option) el problema a resolver es un problema de parada óptima, hay que calcular

$$V(S_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} E_Q(e^{-r\tau}(K - S_\tau - K)^+),$$

El resultado es el siguiente:

**Teorema.** Consideremos un proceso de Lévy  $X$ . Sea

$$I = \inf\{X_t: 0 \leq e_r\}$$

donde  $e_r$  es una variable exponencial de parámetro  $r$  independiente de  $X$ . El precio de la opción put perpetua para  $S_t = S_0 e^{X_t}$  es

$$V(S_0) = \frac{E(K - S_0 e^I)^+}{E(e^I)},$$

y el momento óptimo de ejercicio viene dado por

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0: S_t \leq S_0 E(e^I)\}.$$

Nota: Para algunas clases de procesos de Lévy (incluyendo Black Scholes y el Modelo de Kou) es posible obtener fórmulas cerradas explícitas para la distribución de  $I$ , y por lo tanto para los precios de las opciones.

# Referencias

## Libros

- Cont, R., Tankov, P. Financial Modelling with Jump Processes. Chapman Hall, 2004.
- Merton, R.C.: Continuous Time Finance. Cambridge Oxford: Blackwell 1990
- Mikosh, T., Elementary Stochastic Calculus with Finance in view. World Scientific, 1998.
- Shiryaev, Albert N. Essentials of stochastic finance. World Scientific Publishing (1999)

## Artículos clásicos

- Black, R. Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, **81**, 637–659, (1973).
- Merton, R.C.: Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics, **3**, 125–144, (1976).
- Mc Kean, Jr. H.P.: Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in Mathematical Economics. Industrial Management Review, **6** (spring) 32–39 (1965)

## Algunas referencias recientes

- Föllmer, H., Schweizer, M.: Hedging of contingent claims under incomplete information. In: Applied Stochastic Analysis (London), Stochastic Monographs **5**, New York: Gordon and Breach 1991, 389–414.

- Gerber H. U., Shiu E. S. W., Option pricing by Esscher transforms. Transactions of the Society of Actuaries. **46**, 99–191, (1994).
- Lewis, A. A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy Processes, (2000) <http://www.opcioncity.net>
- Mordecki, E. Optimal stopping and Perpetual Options for Lévy Processes. Finance & Stochastics, **6** (4) 473–493, (2002).