

## Soluciones - Cálculo diferencial e integral II

**Ejercicio 1.**

(a) Mediante cambio a coordenadas cilíndricas se obtiene

$$\frac{\pi}{9} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

(b) Mediante cambio a coordenadas polares afines se obtiene

$$\pi\sqrt{2}.$$

**Ejercicio 2.**

(a) El máximo absoluto se presenta el en punto  $\frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 2)$  y toma el valor  $5/\sqrt{10}$ . El mínimo absoluto se presenta el en punto  $-\frac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 2)$  y toma el valor opuesto:  $-5/\sqrt{10}$ .

(b) El máximo en este caso se presenta el en punto  $\frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, 3)$  y toma el valor  $6/\sqrt{15}$ . El mínimo absoluto se presenta el en punto  $-\frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, 3)$  y toma el valor opuesto:  $-6/\sqrt{15}$ .

**Ejercicio 3.**

(a) Razonando por el absurdo supongamos que no existe tal  $\delta$ . Entonces  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in X$  tales que  $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ , pero no existe  $i \in I$  tal que  $x_n, y_n \in U_i$ . Por la compacidad de  $X$  la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  tiene un punto de acumulación  $x$ , digamos  $x_{n_k} \rightarrow x$ . Sea  $i \in I$  tal que  $x \in U_i$ , y sea  $\varepsilon > 0 / B(x, \varepsilon) \subset U_i$ . Sea  $n_k / n_k > \frac{2}{\varepsilon}$  y tal que  $\|x_{n_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por la desigualdad triangular,

$$\|x - y_{n_k}\| \leq \|x_{n_k} - x\| + \|x_{n_k} - y_{n_k}\| < \varepsilon$$

Pero esto implica que  $x_{n_k}, y_{n_k} \in U_i$  lo cual es absurdo.

(b) Sea  $X = \mathbb{R} - \{0\}$ , y sea el cubrimiento formado por  $(-\infty, 0)$  y  $(0, +\infty)$ . Dado  $\delta > 0$  basta considerar  $x = \frac{\delta}{4}$ ,  $y = -x$ .