Centro de Matemática. 21 de diciembre de 2006

Soluciones - Cálculo diferencial e integral II

Ejercicio 1.

(a) Mediante cambio a coordenadas cilíndricas se obtiene

$$\frac{\pi}{9}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

(b) Mediante cambio a coordenadas polares afines se obtiene

$$\pi\sqrt{2}.$$

Ejercicio 2.

(a) El máximo absoluto se presenta el en punto $\frac{1}{\sqrt{10}}(2,1,2)$ y toma el valor $5/\sqrt{10}$. El mínimo absoluto se presenta el en punto $-\frac{1}{\sqrt{10}}(2,1,2)$ y toma el valor opuesto: $-5/\sqrt{10}$.

(b) El máximo en este caso se presenta el en punto $\frac{1}{\sqrt{15}}(2,1,3)$ y toma el valor $6/\sqrt{15}$. El mínimo absoluto se presenta el en punto $-\frac{1}{\sqrt{15}}(2,1,3)$ y toma el valor opuesto: $-6/\sqrt{15}$.

Ejercicio 3.

(a) Razonando por el absurdo supongamos que no existe tal δ. Entonces $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ x_n, y_n \in X$ tales que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$, pero no existe $i \in I$ tal que $x_n, y_n \in U_i$. Por la compacidad de X la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ tiene un punto de acumulación x, digamos $x_{n_k} \to x$. Sea $i \in I$ tal que $x \in U_i$, y sea $\varepsilon > 0\ /\ B(x,\varepsilon) \subset U_i$. Sea $n_k\ /\ n_k > \frac{2}{\varepsilon}$ y tal que $\|x_{n_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad triangular,

$$\|x - y_{n_k}\| \leq \|x_{n_k} - x\| + \|x_{n_k} - y_{n_k}\| < \varepsilon$$

Pero esto implica que $x_{n_k}, y_{n_k} \in U_i$ lo cual es absurdo.

(b) Sea $X = \mathbb{R} - \{0\}$, y sea el cubrimiento formado por $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. Dado $\delta > 0$ basta considerar $x = \frac{\delta}{4}$, $y = -x$.