Centro de Matemática. 12 de marzo de 2003

Examen de Cálculo II

Ejercicio 1. (a) Calcular el volumen $V(r)$ de la esfera de centro en el origen y radio r.
(b) Demostrar, que si $E(a,b,c)$ es el volumen del elipsoide

$$\left\{(x,y,z)\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq r^2\right\},$$

se verifica $E(a,b,c)=abcV(r)$.
(c) Hallar los extremos absolutos de $E(a,b,c)$, condicionados a $a+b+c=3$, considerando que $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$.
(d) Hallar la superficie del elipsoide de volumen máxmo hallado, utilizando la fórmula

$$A=\iint_D\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}dxdy,$$

que da la superficie del gráfico de una función $f(x,y)$ en un dominio D.

Ejercicio 2. Se considera la función de dos variables

$$f(x,y)=\iint_{\{x-1\leq u\leq x+1,\ y-1\leq v\leq y+1\}}e^{-(u^2+v^2)}dudv.$$

(a) Estudiar continuidad y diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(b) Determinar sus puntos críticos.
(c) Calcular $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty}f(x,y)$.
(d) Determinar los extremos absolutos (si existen) de f en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 3. Se define la distancia $d(A,B)$ entre dos conjuntos A y B de $\mathbb{R}^2$, mediante

$$d(A,B)=\inf\{\|a-b\|\colon a\in A, b\in B\},$$

donde $\|x\|$ denota la norma euclideana.
(a) i) Demostrar que si A es compacto, B es cerrado, y son disjuntos ($A\cap B=\emptyset$), entonces $d(A,B)>0$.
ii) Sea $A\subset U$, A compacto, U abierto. Demostrar que existe $r>0$ tal que para todo $x\in A$ se verifica $B(x,r)\subset U$.
(b) Sea $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^1, 0 un valor regular de f, y $S=f^{-1}(0)$ la superficie de nivel 0 de f. Si $p\notin S$ y existe un $q\in S$ tal que $d(\{p\},S)=\|p-q\|>0$, demostrar que $p-q\perp T_qS$.
(c) Sea además $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase C^1, 0 valor regular de g, y $V=g^{-1}(0)$. Supongamos que existen dos puntos $p\in S$ y $q\in V$ tales que $d(S,V)=\|p-q\|>0$. Demostrar que $T_pS=T_qV$.